



高等教育“十一五”规划教材  
高职高专公共课教材系列

# 高等数学

Gaodeng shuxue

常天松 主编  
秦体恒



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共课教材系列

# 高等数学

常天松 秦体恒 主编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的。本书力求贯彻“以必须、够用为度”的教学原则,以“掌握概念,强化应用”为出发点,在保证科学性的基础上,注重讲清概念,减少论证,加强对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

全书共十章,分别讲述了向量代数与空间解析几何,函数、极限与连续,导数与微分,中值定理及导数的应用,不定积分,定积分及其应用,多元函数积分学,常微分方程,级数以及 MATLAB 6.1 软件应用。此外,本书的附录中分别给出了积分表和书中全部习题的参考答案。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学/常天松,秦体恒主编. —北京:科学出版社,2007

(高职高专公共课教材系列)

ISBN 978-7-03-019840-2

I. 高… II. ①常… ②秦… III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材  
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 135015 号

责任编辑:王 超 / 责任校对:刘彦妮

责任印制:吕春珉 / 封面设计:东方人华平面设计部

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

|                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| 2007 年 9 月第 一 版 | 开本: 787×1092 1/16 |
| 2007 年 9 月第一次印刷 | 印张: 22 1/2        |
| 印数: 1—3 600     | 字数: 534 000       |

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62135235 (VP04)

# 前 言

本书是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的。本书力求贯彻“以必须、够用为度”的教学原则，以“掌握概念，强化应用”为出发点，在保证科学性的基础上，注重讲清概念，减少论证，加强对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

本书结合高职高专学校的特点，对高等数学课程的内容进行了优化，对课程体系进行了整合。打破了传统的先讲一元函数微积分再讲多函数微积分的教学模式，将一元函数微分、多元函数微分整合为一个模块，而将一元函数积分、多元函数积分整合为另一个模块。

在教材优化方面，以应用性构造数学教学内容体系，减少了理论推导和运算技巧等方面的内容，增加了应用性知识。主要体现在：①极限概念采用描述性定义；②微分中值定理只作几何说明；③淡化了数项级数的敛散性，强化了幂级数及其应用；④介绍了 MATLAB 6.1 的简单应用，引入了数学建模的基本知识。

全书共十章，分别讲述了向量代数与空间解析几何，函数、极限与连续，导数与微分，中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数积分学，常微分方程，级数以及 MATLAB 6.1 软件应用。此外，书末的附录中分别给出了积分表和书中全部习题的参考答案。

本书由常天松、秦体恒任主编，第 1 章由秦体恒编写，第 2 章、第 7 章由许雁琴编写，第 3 章由王秀梅编写，第 4 章由杨旭岩编写，第 5 章、第 8 章由王东升编写，第 6 章由张清叶编写，第 9 章由常天松编写，第 10 章由李新芳编写。全书由河南科技大学杨万才教授主审。

尽管我们在编写本书时已尽了最大努力，但由于水平有限，书中仍难免存在这样或那样的问题，敬请广大读者不吝赐教。

# 目 录

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| 第 1 章 向量代数与空间解析几何 .....            | 1  |
| 1.1 空间直角坐标系与向量的概念 .....            | 1  |
| 1.1.1 空间直角坐标系 .....                | 1  |
| 1.1.2 向量的概念及线性运算 .....             | 2  |
| 1.1.3 向量的坐标表示 .....                | 4  |
| 1.2 向量的数量积与向量积 .....               | 7  |
| 1.2.1 两向量的数量积 .....                | 7  |
| 1.2.2 两向量的向量积 .....                | 10 |
| 1.3 平面与直线 .....                    | 13 |
| 1.3.1 平面 .....                     | 13 |
| 1.3.2 直线 .....                     | 16 |
| 1.4 二次曲面与空间曲线 .....                | 20 |
| 1.4.1 曲面方程的概念 .....                | 20 |
| 1.4.2 常见的二次曲面及其方程 .....            | 21 |
| 1.4.3 空间曲线 .....                   | 25 |
| 习题一 .....                          | 27 |
| 第 2 章 函数、极限与连续 .....               | 33 |
| 2.1 函数 .....                       | 33 |
| 2.1.1 函数的概念 .....                  | 33 |
| 2.1.2 数学建模方法简述 .....               | 36 |
| 2.2 函数的极限 .....                    | 38 |
| 2.2.1 数列的极限 .....                  | 38 |
| 2.2.2 一元函数的极限 .....                | 39 |
| 2.2.3 左极限与右极限 .....                | 40 |
| 2.2.4 极限的性质 .....                  | 40 |
| 2.2.5 二元函数 $z = f(x, y)$ 的极限 ..... | 41 |
| 2.3 无穷小量与无穷大量 .....                | 41 |
| 2.3.1 无穷小量 .....                   | 41 |
| 2.3.2 无穷大量 .....                   | 42 |
| 2.3.3 无穷大与无穷小之间的关系 .....           | 42 |
| 2.4 极限的运算法则 .....                  | 43 |

|       |                      |    |
|-------|----------------------|----|
| 2.4.1 | 极限的运算法则              | 43 |
| 2.4.2 | 举例                   | 43 |
| 2.5   | 两个重要极限               | 45 |
| 2.5.1 | 第一个重要极限              | 45 |
| 2.5.2 | 第二个重要极限              | 48 |
| 2.6   | 无穷小的比较               | 50 |
| 2.7   | 函数的连续性               | 51 |
| 2.7.1 | 一元函数连续的概念            | 51 |
| 2.7.2 | 二元函数的连续性             | 52 |
| 2.7.3 | 连续函数的基本性质            | 53 |
| 2.7.4 | 函数间断点的分类             | 54 |
| 2.7.5 | 闭区间上连续函数的性质          | 55 |
| 习题二   |                      | 56 |
| 第3章   | 导数与微分                | 62 |
| 3.1   | 导数概念                 | 62 |
| 3.1.1 | 瞬时速度与曲线的切线斜率         | 62 |
| 3.1.2 | 导数的定义                | 63 |
| 3.1.3 | 导数的几何意义              | 64 |
| 3.1.4 | 左导数、右导数              | 65 |
| 3.1.5 | 可导和连续之间的关系           | 65 |
| 3.2   | 函数的求导法则              | 66 |
| 3.2.1 | 几个基本初等函数的导数          | 66 |
| 3.2.2 | 函数的和、差、积、商的求导法则      | 67 |
| 3.2.3 | 反函数的求导法则和基本初等函数的导数公式 | 69 |
| 3.2.4 | 复合函数的求导法则            | 70 |
| 3.2.5 | 由参数方程所确定的函数的导数       | 74 |
| 3.3   | 高阶导数                 | 75 |
| 3.4   | 偏导数                  | 76 |
| 3.4.1 | 偏导数的概念               | 76 |
| 3.4.2 | 高阶偏导数                | 78 |
| 3.5   | 微分及其应用               | 80 |
| 3.5.1 | 一元函数微分的概念            | 80 |
| 3.5.2 | 微分的几何意义              | 82 |
| 3.5.3 | 微分的求法与一阶微分形式不变性      | 82 |
| 3.5.4 | 二元函数全微分概念            | 84 |
| 3.5.5 | 微分在近似计算中的应用          | 86 |
| 3.6   | 多元复合函数的求导法则与隐函数的求导公式 | 87 |

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 3.6.1 多元复合函数的求导法则                                     | 87  |
| 3.6.2 隐函数的求导公式                                        | 90  |
| *3.7 方向导数与梯度                                          | 91  |
| 3.7.1 方向导数                                            | 91  |
| 3.7.2 梯度                                              | 93  |
| 习题三                                                   | 94  |
| 第4章 中值定理及导数的应用                                        | 101 |
| 4.1 微分中值定理                                            | 101 |
| 4.1.1 罗尔 (Rolle) 定理                                   | 101 |
| 4.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理                            | 101 |
| 4.1.3 柯西 (Cauchy) 定理                                  | 103 |
| 4.2 洛必达法则                                             | 103 |
| 4.2.1 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的求法 | 104 |
| 4.2.2 其他未定式的求法                                        | 105 |
| 4.3 函数的单调性及其极值                                        | 107 |
| 4.3.1 函数单调性的充分条件                                      | 107 |
| 4.3.2 函数的极值                                           | 108 |
| 4.3.3 最大值与最小值                                         | 111 |
| 4.4 曲线的凹性及拐点                                          | 113 |
| 4.4.1 曲线的凹性                                           | 113 |
| 4.4.2 曲线的拐点及求法                                        | 114 |
| 4.5 函数作图                                              | 115 |
| 4.5.1 曲线的渐近线                                          | 115 |
| 4.5.2 函数图形的描绘方法                                       | 116 |
| *4.6 曲率                                               | 118 |
| 4.6.1 弧微分                                             | 118 |
| 4.6.2 曲率及其计算                                          | 119 |
| 4.6.3 曲率半径和曲率圆                                        | 121 |
| 4.7 偏导数的应用                                            | 122 |
| 4.7.1 偏导数在几何中的应用                                      | 122 |
| 4.7.2 多元函数的极值                                         | 124 |
| 4.7.3 多元函数的最大值与最小值                                    | 126 |
| 4.7.4 条件极值                                            | 127 |
| 习题四                                                   | 129 |
| 第5章 不定积分                                              | 134 |
| 5.1 不定积分的概念与性质                                        | 134 |

|       |                             |     |
|-------|-----------------------------|-----|
| 5.1.1 | 原函数与不定积分                    | 134 |
| 5.1.2 | 不定积分的性质                     | 135 |
| 5.1.3 | 基本积分公式                      | 135 |
| 5.1.4 | 不定积分的几何意义                   | 137 |
| 5.2   | 换元积分法                       | 137 |
| 5.2.1 | 第一类换元法(凑微分法)                | 137 |
| 5.2.2 | 第二类换元法                      | 141 |
| 5.3   | 分部积分法                       | 143 |
| 5.4   | 简单有理函数的积分                   | 145 |
| 5.4.1 | 有理函数                        | 145 |
| 5.4.2 | 有理真分式的性质                    | 146 |
| 5.4.3 | 简单有理函数的积分                   | 146 |
|       | 习题五                         | 148 |
| 第6章   | 定积分及其应用                     | 152 |
| 6.1   | 定积分的概念                      | 152 |
| 6.1.1 | 引例                          | 152 |
| 6.1.2 | 定积分的定义                      | 154 |
| 6.1.3 | 定积分的几何意义                    | 154 |
| 6.1.4 | 定积分的性质                      | 155 |
| 6.2   | 微积分基本公式                     | 157 |
| 6.2.1 | 变上限积分                       | 157 |
| 6.2.2 | 牛顿(Newton)——莱布尼兹(Leibniz)公式 | 158 |
| 6.3   | 定积分的换元积分法与分部积分法             | 159 |
| 6.3.1 | 定积分的换元积分法                   | 159 |
| 6.3.2 | 定积分的分部积分法                   | 161 |
| 6.4   | 定积分在几何中的应用                  | 162 |
| 6.4.1 | 定积分的微元法                     | 162 |
| 6.4.2 | 平面图形的面积                     | 163 |
| 6.4.3 | 体积                          | 167 |
| 6.4.4 | 平面曲线的弧长                     | 169 |
| *6.5  | 定积分在物理学中的应用                 | 171 |
| 6.5.1 | 变力所做的功                      | 171 |
| 6.5.2 | 液体压力                        | 172 |
| 6.6   | 广义积分                        | 173 |
| 6.6.1 | 积分区间为无限的广义积分                | 173 |
| 6.6.2 | 无界函数的广义积分                   | 174 |
|       | 习题六                         | 176 |

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 第 7 章 多元函数的积分学 .....                | 181 |
| 7.1 二重积分的概念与性质 .....                | 181 |
| 7.1.1 二重积分的概念 .....                 | 181 |
| 7.1.2 二重积分的性质 .....                 | 183 |
| 7.2 二重积分的计算 .....                   | 184 |
| 7.2.1 利用直角坐标计算二重积分 .....            | 184 |
| 7.2.2 利用极坐标计算二重积分 .....             | 187 |
| 7.3 二重积分的应用 .....                   | 189 |
| 7.3.1 几何上的应用 .....                  | 189 |
| *7.3.2 平面薄板的质量 .....                | 191 |
| *7.3.3 平面薄板的重心 .....                | 192 |
| *7.3.4 平面薄板的转动惯量 .....              | 193 |
| *7.4 对坐标的曲线积分 .....                 | 193 |
| 7.4.1 对坐标曲线积分的概念 .....              | 193 |
| 7.4.2 对坐标曲线积分的性质 .....              | 194 |
| 7.4.3 对坐标曲线积分的计算 .....              | 194 |
| *7.5 格林公式及其应用 .....                 | 197 |
| 7.5.1 格林公式 .....                    | 197 |
| 7.5.2 平面上曲线积分与路径无关的条件 .....         | 200 |
| 习题七 .....                           | 202 |
| 第 8 章 常微分方程 .....                   | 205 |
| 8.1 微分方程的基本概念 .....                 | 205 |
| 8.1.1 微分方程 .....                    | 205 |
| 8.1.2 微分方程的解 .....                  | 206 |
| 8.2 一阶微分方程 .....                    | 207 |
| 8.2.1 可分离变量方程 .....                 | 208 |
| 8.2.2 一阶线性微分方程 .....                | 211 |
| 8.3 可降阶的高阶微分方程 .....                | 215 |
| 8.3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程 ..... | 215 |
| 8.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程 ..... | 215 |
| 8.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 ..... | 216 |
| 8.4 二阶常系数线性微分方程 .....               | 217 |
| 8.4.1 二阶常系数线性齐次方程 .....             | 217 |
| 8.4.2 二阶常系数线性非齐次方程 .....            | 219 |
| 8.5 常微分方程在数学建模中的应用 .....            | 225 |
| 8.5.1 人口模型 .....                    | 225 |
| 8.5.2 冷却模型 .....                    | 226 |

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| 8.5.3 混合溶液的数学模型 .....            | 227        |
| 8.5.4 振动模型 .....                 | 228        |
| 习题八 .....                        | 229        |
| <b>第9章 级数</b> .....              | <b>234</b> |
| 9.1 数项级数的概念和性质 .....             | 234        |
| 9.1.1 数项级数的概念 .....              | 234        |
| 9.1.2 数项级数的基本性质 .....            | 237        |
| 9.1.3 数项级数收敛的必要条件 .....          | 238        |
| 9.2 数项级数的审敛法 .....               | 238        |
| 9.2.1 正项级数及其敛散性 .....            | 238        |
| 9.2.2 交错级数的审敛法 .....             | 242        |
| 9.2.3 绝对收敛和条件收敛 .....            | 243        |
| 9.3 幂级数 .....                    | 244        |
| 9.3.1 函数项级数 .....                | 244        |
| 9.3.2 幂级数及其收敛性 .....             | 245        |
| 9.3.3 幂级数的计算 .....               | 247        |
| 9.4 函数的幂级数展开式 .....              | 250        |
| 9.4.1 函数可展开为幂级数的条件 .....         | 250        |
| 9.4.2 函数展开为幂级数的方法 .....          | 251        |
| 9.5 幂级数在近似计算中的应用 .....           | 255        |
| 习题九 .....                        | 257        |
| <b>*第10章 MATLAB 6.1 基础</b> ..... | <b>263</b> |
| 10.1 MATLAB 概述 .....             | 263        |
| 10.1.1 MATLAB 的主要功能 .....        | 263        |
| 10.1.2 MATLAB 的开发环境 .....        | 264        |
| 10.1.3 MATLAB 的基本操作 .....        | 266        |
| 10.2 MATLAB 的基本数学功能 .....        | 271        |
| 10.2.1 算术运算 .....                | 271        |
| 10.2.2 数学函数与矩阵函数 .....           | 275        |
| 10.2.3 建立特殊数组(矩阵) .....          | 278        |
| 10.3 MATLAB 数值计算 .....           | 282        |
| 10.3.1 多项式 .....                 | 282        |
| 10.3.2 线性代数 .....                | 285        |
| 10.3.3 数据分析与统计 .....             | 288        |
| 10.3.4 插值 .....                  | 289        |
| 10.4 MATLAB 符号计算 .....           | 291        |
| 10.4.1 符号表达式的创建 .....            | 291        |

|        |             |     |
|--------|-------------|-----|
| 10.4.2 | 符号表达式的化简和替换 | 293 |
| 10.4.3 | 符号微积分       | 296 |
| 10.4.4 | 符号方程的求解     | 298 |
| 10.5   | MATLAB 程序设计 | 300 |
| 10.5.1 | M 文件        | 300 |
| 10.5.2 | 程序结构        | 303 |
| 10.5.3 | 数据的输入与输出    | 309 |
| 10.6   | MATLAB 绘图   | 310 |
| 10.6.1 | 二维图形        | 311 |
| 10.6.2 | 三维图形        | 318 |
| 附录一    | 积分表         | 322 |
| 附录二    | 习题参考答案      | 329 |
| 参考文献   |             | 348 |

# 第 1 章

## 向量代数与空间解析几何

向量是解决工程技术问题的重要工具, 空间直角坐标系是研究向量和多元函数的基础. 本章在建立了空间直角坐标系的基础上研究向量的概念、运算和它的一些应用, 并以向量为工具来讨论空间的平面和直线, 最后介绍空间曲线及几种特殊的二次曲面.

### 1.1 空间直角坐标系与向量的概念

#### 1.1.1 空间直角坐标系

为了用二元数组来刻画平面上的点, 我们曾引入了平面直角坐标系. 本节引入空间直角坐标系, 目的在于使空间点  $M$  与三元有序数组  $(x, y, z)$  建立起一一对应关系, 从而使得我们可以用代数方法研究三维空间的向量和几何问题.

过空间定点  $O$  作三条互相垂直的数轴:  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴, 它们都以  $O$  为原点, 并且取相同的长度单位, 这样就组成了一个空间直角坐标系. 如果坐标系满足: 以右手握住  $z$  轴, 让右手的四指从  $x$  轴的正向以  $\frac{\pi}{2}$  的角度转向  $y$  轴的正向, 这时拇指所指的方向是  $z$  轴的正向, 则称该直角坐标系为右手系 (图 1.1 (a)). 如不作特殊说明, 本书所指的空间直角坐标系均为右手系, 并称  $O$  为坐标原点;  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴分别称为横轴、纵轴、竖轴, 三者统称为坐标轴; 两条坐标轴所确定的平面称为坐标面,  $x$  轴与  $y$  轴所确定的坐标面称为  $xOy$  坐标面, 类似的有  $yOz$  坐标面、 $zOx$  坐标面.

设  $M$  为空间的一点, 过  $M$  点分别作垂直于三个坐标轴的平面, 与坐标轴分别相交于  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三点, 且这三点在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的坐标依次为  $x$ 、 $y$ 、 $z$ , 则点  $M$  唯一确定了一组有序数组  $x$ 、 $y$ 、 $z$ . 反之, 设给定一组有序数组  $x$ 、 $y$ 、 $z$ , 且它们分别在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上依次对应  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  点, 若过  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  点分别作平面垂直于所在坐标轴, 则这三个平面确定了唯一的交点  $M$ . 这样, 空间的点就与一组有序数组  $x$ 、 $y$ 、 $z$

之间建立了一一对应关系 (图 1.1 (b)). 有序数组  $x, y, z$  称为点  $M$  的坐标, 并依次称  $x, y$  和  $z$  为点  $M$  的横坐标、纵坐标和竖坐标, 记为  $M(x, y, z)$ .

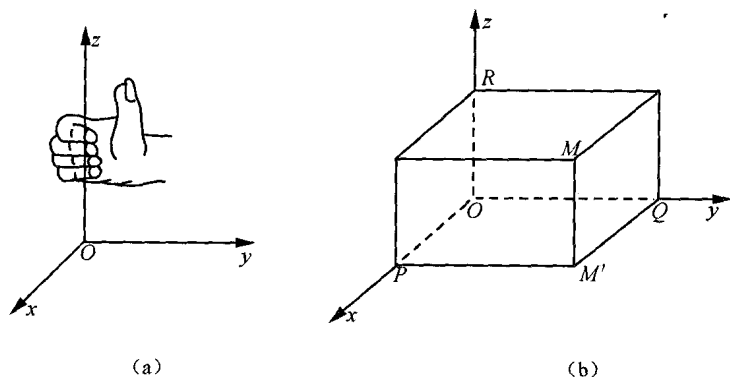


图 1.1

由坐标  $(x, y, z)$  求空间点  $M(x, y, z)$ , 还可以采用如下的简便方法: 即分别在  $x$  轴、 $y$  轴上找到坐标为  $x, y$  的点  $P, Q$ , 过点  $P, Q$  分别作  $y$  轴、 $x$  轴的平行线交于点  $M'$ , 自点  $M'$  引  $z$  轴的平行线  $M'M$ , 使  $M'M = z$  (当  $z > 0$  时,  $M$  在  $M'$  的上方; 当  $z < 0$  时,  $M$  在  $M'$  的下方; 当  $z = 0$  时,  $M$  与  $M'$  重合), 则  $M$  为以  $(x, y, z)$  为坐标的点.

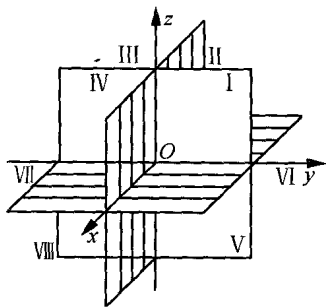


图 1.2

显然, 原点  $O$  的坐标为  $(0, 0, 0)$ , 坐标轴上的点至少有两个坐标为  $0$ , 坐标面上的点至少有一个坐标为  $0$ . 例如, 在  $x$  轴上的点均有  $y = z = 0$ ; 在  $xOy$  坐标面上的点均有  $z = 0$ . 三个坐标面将空间分成八个部分, 每一部分称为一个卦限, 在  $xOy$  坐标面上方有四个卦限, 下方有四个卦限, 含  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正半轴的卦限叫做第 I 卦限, 从第 I 卦限开始, 逆着  $z$  轴正向向下看, 按逆时针方向, 先后出现的卦限依次称为第 II、III、IV 卦限, 位于 I、II、III、IV 卦限下面的四个卦限依次称为第 V、VI、VII、VIII 卦限

(图 1.2).

八个卦限中, 不在坐标面上的点的坐标符号如下:

I  $(+, +, +)$ , II  $(-, +, +)$ , III  $(-, -, +)$ , IV  $(+, -, +)$

V  $(+, +, -)$ , VI  $(-, +, -)$ , VII  $(-, -, -)$ , VIII  $(+, -, -)$ .

## 1.1.2 向量的概念及线性运算

### 1. 向量的概念

在物理学中, 通常会遇到既有大小又有方向的量, 如力、位移、速度、加速度等,

这类量称为向量（或矢量）.

通常用有向线段来表示向量，以  $A$  为起点、 $B$  为终点的有向线段所表示的向量，记为  $\overrightarrow{AB}$ . 也可用一个黑体字母或加箭头的字母来表示向量. 如向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{F}$  或  $\vec{a}$ 、 $\vec{i}$ 、 $\vec{F}$  等.

向量  $\vec{a}$  的大小称为该向量的模，记作  $|\vec{a}|$ . 模等于 1 的向量称为单位向量，与  $\vec{a}$  同向的单位向量记为  $\vec{a}^0$ . 模等于 0 的向量称为零向量，记为  $\vec{0}$ ，其方向不定.

在数学研究中，一般只考虑向量的大小和方向，不考虑其位置，因此，把大小相等、方向相同的向量视为同一个向量.

**定义 1.1** 如果向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  的模相等且方向相同，则称向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  相等，记为  $\vec{a} = \vec{b}$ .

满足定义 1.1 的向量在空间平行移动后，两向量完全重合. 允许平行移动的向量称为自由向量. 本书所讨论的向量均为自由向量.

## 2. 向量的线性运算

加法的定义如下所述.

**定义 1.2** 设有两个非零向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，将向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的起点放在一起，并以  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量为向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  的和向量，记为  $\vec{a} + \vec{b}$  (图 1.3).

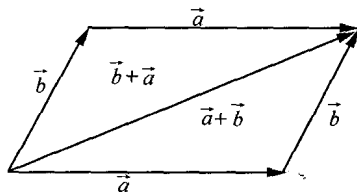


图 1.3

这种求向量和的方法称为向量加法的平行四边形法则. 由于向量可以平移，所以，若以  $\vec{a}$  的终点作为向量  $\vec{b}$  的起点，则自  $\vec{a}$  的起点到向量  $\vec{b}$  的终点的向量也是  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的和向量 (图 1.4). 这种求向量和的方法称为向量加法的三角形法则. 这个法则可以推广到任意有限个向量相加的情形 (图 1.5).

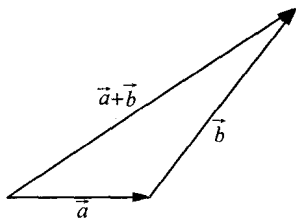


图 1.4

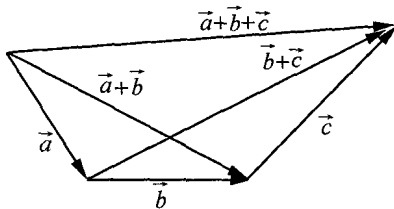


图 1.5

由向量加法的定义可知，向量的加法满足下列运算规律：

- (1) 交换律  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- (2) 结合律  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

数乘向量的定义如下所述.

**定义 1.3** 设  $\vec{a}$  是一个非零向量， $\lambda$  是一个非零实数，则  $\vec{a}$  与  $\lambda$  的乘积仍是一个向量，且

$$(1) |\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|;$$

$$(2) \lambda \vec{a} \text{ 的方向 } \begin{cases} \text{与 } \vec{a} \text{ 同向, 当 } \lambda > 0 \\ \text{与 } \vec{a} \text{ 反向, 当 } \lambda < 0. \end{cases}$$

如果  $\lambda = 0$  或  $\vec{a} = \vec{0}$ , 规定  $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ .

数乘向量满足下列运算规律:

$$(1) \text{ 交换律 } \lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda;$$

$$(2) \text{ 结合律 } \lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a} = \mu(\lambda \vec{a});$$

$$(3) \text{ 分配律 } (\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}.$$

其中  $\lambda, \mu$  都是实数.

向量的加法及数乘向量统称为向量的线性运算.

设  $\vec{a}$  是非零向量, 由数乘向量的定义可知, 向量  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  的模等于 1, 且与  $\vec{a}$  同向, 所以有

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

这是求与非零向量  $\vec{a}$  同向的单位向量的方法, 而且  $\pm \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  均是与  $\vec{a}$  平行的单位向量, 任一非零向量  $\vec{a}$  都可表示为  $\vec{a} = \vec{a}^0 |\vec{a}|$ .

**定义 1.4** 当  $\lambda = -1$  时, 记  $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ , 则  $-\vec{a}$  与  $\vec{a}$  的方向相反, 模相等, 称  $-\vec{a}$  为  $\vec{a}$  的负向量 (也称为  $\vec{a}$  的逆向量).

引入负向量后, 可以规定两向量的减法, 即  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的差规定为

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

向量的减法也可按三角形法则进行, 只要把  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的起点放在一起,  $\vec{a} - \vec{b}$  即是以  $\vec{b}$  的终点为起点, 以  $\vec{a}$  的终点为终点的向量 (图 1.6).

为将向量运算代数化, 下面介绍向量的坐标表示法.

## 1.1.3 向量的坐标表示

### 1. 向径及其坐标表示

在空间直角坐标系中, 分别与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量, 分别用  $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$  表示, 起点在坐标原点  $O$ 、终点为  $M$  的向量  $\overrightarrow{OM}$  称为点  $M$  的向径 (也称为点  $M$  的位置向量), 记为  $\vec{r}(M) = \overrightarrow{OM}$  (图 1.7). 若点  $M$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 则向量

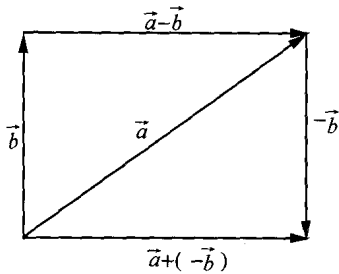


图 1.6

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

由向量加法得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.\end{aligned}$$

即点  $M(x, y, z)$  的向径  $\overrightarrow{OM}$  的坐标表示式为

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

简记为

$$\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}.$$

## 2. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表达式

设  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ , 则以  $M_1$  为起点, 以  $M_2$  为终点的向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

如图 1.8 所示, 因为  $\overrightarrow{OM_1}$ 、 $\overrightarrow{OM_2}$  均为向径, 所以

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

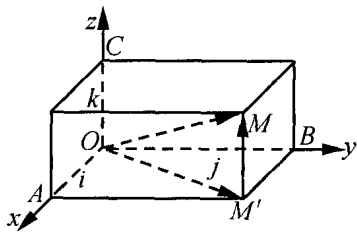


图 1.7

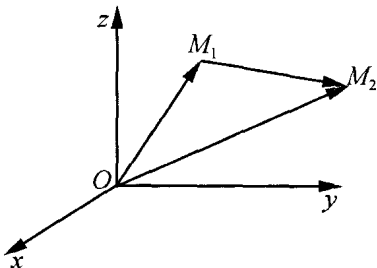


图 1.8

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

即以  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  为起点, 以  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  为终点的向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  的坐标表达式为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

## 3. 向量 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 的模

任给一向量

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

都可将其视为以点  $M(x, y, z)$  为终点的向径  $\overrightarrow{OM}$ , 由图 1.7 不难看出

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2.$$

即

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

## 4. 空间两点间的距离公式

点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  与  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  间的距离记为  $d(M_1M_2)$ , 则

$$d(M_1M_2) = |\overline{M_1M_2}|.$$

而

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

所以

$$d(M_1M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

该公式显然是平面上两点间距离公式的推广.

**例 1.1** (1) 写出点  $A(1, 2, 3)$  的向径.

(2) 写出起点为  $A(1, 2, 3)$ 、终点为  $B(3, 3, 2)$  的向量的坐标表示式.

(3) 计算  $A, B$  两点间的距离.

**解** (1)  $\overline{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

(2)  $\overline{AB} = (3-1)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (2-3)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

(3)  $d(AB) = |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ .

**例 1.2** 求证以  $A(1, -1, 2), B(0, 2, 1), C(-2, 0, 1)$  为顶点的三角形为等腰三角形.

**证** 由于

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(0-1)^2 + (2-(-1))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{11},$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-(-1))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{11}.$$

所以

$|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$ , 即  $\triangle ABC$  为等腰三角形.

## 5. 坐标表示下的向量运算

利用向量的坐标表示, 可将向量的线性运算转化为普通的代数运算.

设  $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ,  $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ , 则有

(1)  $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$ ;

(2)  $\lambda\vec{a} = \lambda x_1\vec{i} + \lambda y_1\vec{j} + \lambda z_1\vec{k}$ ;

(3)  $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$ ;

(4)  $\vec{a} = \vec{b}$  的充要条件为  $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ ;

(5)  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  的充要条件为  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ .