高等工科数学系列课程教材

微积分初步——典型计算与练习

孙振绮 总主编　孙振绮 丁效华 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等工科数学系列课程教材

微积分初步

——典型计算与练习

总主编　孙振绮
主　编　孙振绮　丁效华
副主编　金承日　李宝家　伊晓东

机 械 工 业 出 版 社

本书针对数列与极限，函数及其性质，函数的图形，函数的极限与连续性，导数及其应用，不定积分，定积分等微积分初步的基本内容编写了丰富的典型计算题与练习题，并紧密联系初等数学的内容介绍了许多新鲜解法，同时给出了四百多个函数图形，书末附有习题参考答案与提示．

本书主要供各类大学非数学专业的一年级学生使用，高等院校可选作工科数学分析习题课教学参考书，也可作为高中生的课外学习参考书．

图书在版编目（CIP）数据

微积分初步——典型计算与练习/孙振绮，丁效华主编．—北京：机械工业出版社，2004.10

高等工科数学系列课程教材

ISBN 7-111-15332-4

Ⅰ．微…　Ⅱ．①孙…②丁…　Ⅲ．微积分-高等学校-教材

Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 098998 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：郑　丹　版式设计：张世琴　责任校对：刘志文

封面设计：鞠　杨　责任印制：石　冉

三河市宏达印刷有限公司印刷・新华书店北京发行所发行

2005 年 7 月第 1 版・第 2 次印刷

1000mm×1400mm　B5・8.5 印张・330 千字

定价：22.00 元

前　言

为适应科学技术进步的要求，培养高素质人才，必须改革工科数学课程体系与教学方法，为此，我们进行了十多年的教学改革实践，先后在哈尔滨工业大学、黑龙江省教委立项，长期从事《高等工科数学教学过程的优化设计》课题的研究，该课题曾获哈尔滨工业大学优秀教学研究成果奖．这套系列课程教材正是这一研究成果的最新总结．其中包括：《工科数学分析教程》（上，下），《空间解析几何与线性代数》，《概率论与数理统计》，《复变函数论与运算微积》，《数学物理方程》，《最优化方法》，《计算技术与程序设计》等．

这套教材在编写上广泛吸取国内外知名大学的教学经验，特别是吸取了莫斯科理工学院、乌克兰人民科技大学（原基辅工业大学）等的教学改革经验，提高了知识起点，适当地扩大了知识信息量，加强了基础，并突出了对学生的数学素质与学习能力的培养．具体体现在：①加强对传统内容的理论叙述；②适当运用近代数学观点来叙述古典工科数学内容，加强了对重要的数学思想方法的阐述；③加强了系列课程内容之间的相互渗透与相互交叉，注重培养学生综合运用数学知识解决实际问题的能力；④把精选教材内容与编写典型计算题有机地结合起来，从而加强了知识间的联系，形成课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使内容具备较高的系统性和逻辑性；⑤强化对学生的科学工程计算能力的培养；⑥加强对学生数学建模能力的培养；⑦突出工科特点，增加了许多现代工程应用数学方法；⑧注意到课程内容与工科研究生数学的连接与区别．

本书是《工科数学分析教程》的配套用书，主要针对微积分初步的基本内容：数列与极限，函数及其性质，函数的图形，函数的极限与连续性，导数及其应用，不定积分，定积分等，编写了丰富的典型计算题，并紧密联系初等数学的内容，介绍了许多新鲜解法，可提高学习微积分的兴趣，书中含有大量的练习题，并给出参考答案与提示，这是一本较好地解答数学习题的学习指导书．

目前，高等工科数学系列课程改革正在深入开展，这对中学数学教育提出了新的较高要求．许多大学生刚入学时，感到学习工科数学课程很吃力，学习压力很大．这一方面反映出新生如何尽快适应大学学习生活，增强自身独立学习能力的问题，另一方面，如何缩小中学与大学数学教学要求的差距，使学生能够较平稳地实现从中学到大学数学学习的过渡，也是教学改革必须重视的重要问题，正是基于这种想法我们编写了这本书．

本书给出了400多个函数图形，这对学好一元函数微积分非常重要，也是目

前教学中常被忽视的内容，这也是本书一个较为鲜明的特色之一．教师可利用本书积极地组织教学过程，加强对学生解题的指导．

本书主要供各类大学非数学专业的一年级学生使用，也可用作高等院校工科数学分析习题课教学参考书，还可供高中生的课外学习参考．

全套教材由孙振绮任总主编．本书由孙振绮、丁效华任主编，金承日、李宝家、伊晓东任副主编．参加本书编写的还有哈尔滨工业大学（威海）数学系邹巾英、孙建邵、李福梅、范德军、杨毅等．刘铁夫教授、文松龙教授审阅了全部书稿．

在此，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意！

由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

目　录

第1章　数　　列

1.1　数列及其性质

如果对于每个自然数 n 都有一个确定的数 a_n 相对应,则称给定一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

称数 $a_1, a_2, \cdots$ 为数列的项,a_n 为数列的通项,n 为 a_n 的序号.

通常把数列记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{a_n\}$ 或简记为 $a_n, n = 1, 2, \cdots$.

数列也可用公式 $a_n = f(n), n \in \mathbf{N}$ 表示,其中 $y = f(x), x \in X, \mathbf{N} \subset X$;$f$ 是某个函数.这时,称这个公式为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

数列也可以用其他方法给出.如

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 2, a_6 = 4, a_7 = 2, \cdots$$

记 $a_n = d(n), n \in \mathbf{N}$,它表示数 n 的所有不同因数的个数.

最常用的方法是给出数列的递推公式,如对数列 $\{a_n\}$ 有递推公式

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_k a_{n-k}, n > k$$

其中,$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 与 $k \in \mathbf{N}$ 都是已知的.称这种类型的数列为 k 阶回归数列.

例 1.1　对于数列 $\{a_n\}$,已知

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, n \geqslant 1$$

求数列的通项公式 $a_n = f(n)$.

解　求数列 $\{q^n\}$,使它满足

$$b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n, n \geqslant 1$$

即 $b_{n+2} = q^{n+2}, b_{n+1} = q^{n+1}, b_n = q^n$,从而得 $q^2 - 5q + 6 = 0$,解得 $q_1 = 2, q_2 = 3$.所以数列 $\{2^n\}$,$\{3^n\}$ 满足上述递推关系式.显然,$b_n = C_1 2^n + C_2 3^n$ 也满足递推关系式,C_1, C_2 均为任意常数,故要求出 $a_n = f(n)$,只需确定 C_1 与 C_2,使 $b_1 = 1$,$b_2 = 1$.为此,得到方程组

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = 1 \\ 4C_1 + 9C_2 = 1 \end{cases}$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = -\dfrac{1}{3}$.最后得出通项公式

$$a_n = 2^n - 3^{n-1}, n \geqslant 1$$

例 1.2 对于数列$\{a_n\}$,已知

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n, n \geqslant 1$$

求这个数列的通项公式.

解 设$b_n = q^n$满足递推关系式

$$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 9b_n, n \geqslant 1$$

则有$q^2 - 6q + 9 = 0$,解得$q = 3$.在$q = 3$是重根的情况下,容易验证:不仅$\{3^n\}$满足递推关系式,数列$\{n3^n\}$也满足,从而数列$\{C_1 \cdot 3^n + C_2 n \cdot 3^n\}$满足递推关系式,其中$C_1, C_2$为任意常数.

令

$$\begin{cases} 3C_1 + 3C_2 = 2 \\ 9C_1 + 18C_2 = 3 \end{cases}$$

解得$C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{3}$.所以,所求的数列的通项公式为

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{3}n\right)3^n = (3 - n)3^{n-1}$$

一般情形,如果对于数列$\{a_n\}$给出递推关系式

$$a_1 = a, a_2 = b, a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, n \geqslant 1$$

则数列$\{a_n\}$的通项公式可用如下方式确定:

(1) 若方程$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$有两个不等的实根,则

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, n \geqslant 1$$

其中,C_1, C_2为常数.

(2) 若方程$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$有一对相等的实根$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$,则

$$a_n = (C_1 + C_2 n)\lambda_1^n, n \geqslant 1$$

其中,C_1, C_2为常数.

下面考虑数列$\{x_n\}$,它的通项满足递推关系式

$$x_{n+1} = qx_n + d, x_1 = a$$

其中,q, d为已知常数,且$q^2 + d^2 \neq 0$.

显然,当$q = 1$时,$\{x_n\}$是公差为d的等差数列;当$d = 0$时,$\{x_n\}$是公比为q的等比数列.

下面导出数列$\{x_n\}$在一般情况下的通项公式.

当$q \neq 1$时,取数列$\{b_n\}$,使其满足

$b_{n+1} = x_{n+1} + \frac{d}{q-1}, b_1 = a + \frac{d}{q-1}$,且$\{b_n\}$是以$q$为公比的等比数列,则有

$$b_{n+1} = \left(x_{n+1} + \frac{d}{q-1}\right)q^n, x_{n+1} = \left(a + \frac{d}{q-1}\right)q^n - \frac{d}{q-1}$$

从而

$$x_n = \frac{d}{1-q} + \left(a + \frac{d}{q-1}\right)q^n, n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$$

$$q = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}, d = \frac{x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}}{x_n - x_{n-1}}, n \geqslant 2$$

由上述第一个等式知,当 $q \neq 1$ 时,数列 $\{y_n\}$:

$$y_n = x_{n+1} - x_n, y_1 = x_2 - x_1$$

是公比为 q 的等比数列,特别地有

$$(x_{n+1} - x_n)^2 = (x_n - x_{n-1})(x_{n+2} - x_{n+1}), n \geqslant 2$$

例 1.3 已知数列

$$\{x_n\}: x_{n+1} = 3x_n + 2n - 3, x_1 = 2$$

求 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解 因 $x_{n+1} + n + 1 = 3(x_n + n) - 2, n \geqslant 1$,则数列 $\{y_n\}: y_n = x_n + n$ 满足

$$y_{n+1} = 3y_n - 2$$

由此知,当 $n \geqslant 1$ 时有

$$y_{n+1} = \frac{-2}{1-3} + (3 + \frac{-2}{3-1}) \cdot 3^n, n \geqslant 1$$

即

$$y_{n+1} = 1 + 2 \cdot 3^n, n \geqslant 1$$

因此

$$x_1 = 2, x_{n+1} = -n + 2 \cdot 3^n, n \geqslant 1$$

所以

$$x_n = 1 - n + \frac{2}{3} \cdot 3^n, n \geqslant 1$$

设数列 $\{a_n\}$ 的前 N 项和为

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_N, N \geqslant 1$$

如果存在数列 $\{b_n\}$,使有

$$a_n = b_{n+1} - b_n, n \geqslant 1$$

则

$$\begin{aligned} S_N &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N \\ &= (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_N - b_{N-1}) + (b_{N+1} - b_N) \end{aligned}$$

即

$$S_N = b_{N+1} - b_1, N \geqslant 1$$

例如
$$\frac{1}{k(k+1)}=\left(-\frac{1}{k+1}\right)-\left(-\frac{1}{k}\right),k\geqslant 1$$
$$k=\frac{k(k+1)}{2}-\frac{k(k-1)}{2},k\geqslant 1$$
则
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{N(N+1)}=-\frac{1}{N+1}+1=\frac{N}{N+1},$$
$$1+2+\cdots+N=\frac{N(N+1)}{2}-0=\frac{N(N+1)}{2}.$$

例 1.4 求
$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3+6n^2+11n+6}$$

解 因方程 $x^3+6x^2+11x+6=0$ 有三个不同的根:$x_1=-1,x_2=-2,x_3=-3$,故利用待定系数法可求得
$$\frac{1}{x^3+6x^2+11x+6}=\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right)$$
因而得
$$S_N=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{N(N+5)}{12(N+2)(N+3)}$$

例 1.5 求 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}n(n+1)\cdots(n+m),m\in\mathbf{N}$.

解 设
$$b_n=\frac{1}{m+2}(n-1)n(n+1)\cdots(n+m),n\geqslant 1$$
由此得
$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{m+2}n(n+1)\cdots(n+m+1)-$$
$$\frac{1}{m+2}(n-1)n(n+1)\cdots(n+m)=n(n+1)\cdots(n+m)$$
从而有
$$S_N=b_{N+1}-b_1=\frac{1}{m+2}N(N+1)\cdots(N+m+1)$$

典型计算题 1

1. 求数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项.

(1) $a_n=n^3$ (2) $a_n=\sin\pi n$

(3) $a_n=\left[\sqrt{n^2+n}\right]$ (4) $a_n=n^{(-1)^n}$

(5) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$　　(6) $a_n = \sum_{k=1}^{n} k$

2. 根据已知递推关系式求数列$\{a_n\}$的前5项.

(1) $a_{n+1} = 3a_n - 2, a_1 = 1$

(2) $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, a_1 = 1, a_2 = 2$

(3) $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, a_1 = 1$

3. 求数列的通项公式.

(1) $1, \frac{4}{2}, \frac{9}{6}, \frac{16}{24}, \frac{25}{120}, \frac{36}{720}, \cdots$

(2) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \cdots$

(3) $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \frac{37}{6}, \cdots$

(4) $1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, \cdots$

(5) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \cdots$

典型计算题 2

1. 根据已知通项a_n,求数列$\{a_n\}$的前5项.

(1) $a_n = \frac{1}{n+2}$　　(2) $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(3) $a_n = \frac{(-1)^n + (-1)^{n-1}}{2}$　　(4) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)k}$

(5) $a_n = \frac{1}{n!}$　　(6) $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

2. 根据已知递推关系式,求数列$\{a_n\}$的前6项.

(1) $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, a_1 = 1, a_2 = 2$

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), a_1 = 2$

3. 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1) $1, 7, 31, 127, 511, \cdots$

(2) $1, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{1}{3}, \cdots$

(3) $1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \cdots$

(4) $3, -3, 3, -3, 3, -3, \cdots$

(5) $1, -2, \frac{1}{3}, -4, \frac{1}{5}, -6, \frac{1}{7}, \cdots$

典型计算题 3

1. 证明:数列$\{a_n\}$是递增的.

(1) $a_n = n^2 + 1$　　(2) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$

(3) $a_n = 2^{n-1}$　　(4) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$

(5) $a_n = n^3 - n^2$　　(6) $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$

2. 证明:数列$\{a_n\}$是递减的.

(1) $a_n = \dfrac{2n+3}{3n-2}$　　(2) $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n+4}$

(3) $a_n = \dfrac{3n^2+2}{3n^2+1}$　　(4) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

3. 证明:数列$\{a_n\}$不是递增的.

(1) $a_n = (-1)^n$　　(2) $a_n = [\sqrt{n}]$

(3) $a_n = \dfrac{1}{n^3+n}$

4. 研究数列$\{a_n\}$的单调性.

(1) $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$　　(2) $a_n = 1 + (-1)^n + n^2$

(3) $a_n = \sin n$　　(4) $a_n = \dfrac{n-2}{2n+3}$

5. 证明:递增数列与不减数列的和是递增数列.

典型计算题 4

1. 证明:数列$\{a_n\}$是递增的.

(1) $a_n = n^2 + 4n + 1$　　(2) $a_n = \sqrt{n+3}$

(3) $a_n = \log_2 n$　　(4) $a_n = \cot\dfrac{1}{n}$

2. 证明:数列$\{a_n\}$是递减的.

(1) $a_n = \log_{\frac{1}{2}} n$　　(2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

(3) $a_n = 2^{-n}$　　(4) $a_n = \dfrac{2n+1}{6n+2}$

3. 证明:数列$\{a_n\}$不是递减的.

(1) $a_n = \cos n$　　(2) $a_n = 2^n(1 + (-1)^n)$

(3) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2n^2}$

4. 研究数列$\{a_n\}$的单调性.

(1) $a_n = |2-n|$　　(2) $a_n = \frac{1}{\log_2(n+4)}$

(3) $a_n = (n^2)^{(-1)^n}$

5. 证明:递减数列与不增数列之和是递减数列.

典型计算题 5

1. 证明:数列$\{a_n\}$是上有界的.

(1) $a_n = \frac{n^2+2}{n^2+1}$　　(2) $a_n = 100-\sqrt{n}$

(3) $a_n = 7-2n-n^2$

2. 证明:数列$\{a_n\}$是下有界的.

(1) $a_n = n^2-n-11$　　(2) $a_n = \frac{1}{n}+\sin\sqrt{n}$

(3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}+\frac{n+2}{n^2}$

3. 证明:数列$\{a_n\}$是有界的.

(1) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$　　(2) $a_n = \frac{1}{n^2}-\cos^3\frac{1}{n+1}$

(3) $a_n = \frac{2n+3}{a^2+2n+3}$

4. 证明:两个有界数列的和是有界数列.

5. 试举例满足下列条件的数列.

(1) 数列是上有界,但不是下有界的.

(2) 数列是下有界,但不是上有界的.

(3) 数列既不是上有界也不是下有界的.

典型计算题 6

1. 证明:数列$\{a_n\}$是上有界的.

(1) $a_n = 5-2^n$　　(2) $a_n = \frac{n+4}{n+3}$

(3) $a_n = \frac{n^2+n}{n^2+3}$

2. 证明:数列$\{a_n\}$是下有界的.

(1) $a_n = n-\sqrt{n}$　　(2) $a_n = \frac{2^n}{3^n+n^2}$

(3) $a_n = \frac{1}{n}\cos^2(n-n^3+2)$　　(4) $a_n = n+2-\frac{n+1}{2n+3}$

3. 证明:数列$\{a_n\}$是有界的.

(1) $a_n = \frac{n+n^2+2}{n^2+4n}$　　(2) $a_n = \frac{n+2}{2^n}$

(3) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n + 1}$　　(4) $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$

4. 下列数列$\{a_n\}$哪个是有界的?

(1) $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{n\text{个}}$

(2) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n + 1}$

(3) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & n = 2k \\ \dfrac{n^2}{n + 2} & n = 2k + 1 \end{cases}$

(4) $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{100}, a_1 = -\dfrac{1}{100}$

5. 上有界数列与下有界数列之和是有界数列吗?

典型计算题 7

1. 根据已知的递推关系式求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1) $a_1 = a, a_{n+1} = (n + 1)(1 + a_n), n \geqslant 1$

(2) $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = \dfrac{1}{(2 - a_n)}, n \geqslant 1$

(3) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = \dfrac{1}{2}(3a_{n+1} - a_n), n \geqslant 1$

2. 求数列$\{a_n\}$的最大项.

(1) $a_n = \dfrac{21}{(3n^2 - 14n - 17)}$　　(2) $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 9}$

3. 求数列$\{a_n\}$的最小项.

(1) $a_n = (2n - 5)(2n - 11)$　　(2) $a_n = n + \dfrac{5}{n}$

4. 证明:数列$\{a_n\}$从某项开始递减.

(1) $a_n = \dfrac{(6n + 1)^2}{6^n}$　　(2) $a_n = \dfrac{n^3}{10^n}$

5. 求 S_n 的值.

(1) $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}$

(2) $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)(n + 2)}$

典型计算题 8

1. 根据已知递推关系式求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(1) $a_1 = a, a_{n+1} = \alpha a_n + \beta 2^n, n \geqslant 1, \alpha \neq 2$

(2) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n}, n \geqslant 1$

(3) $a_1 = a, a_2 = b, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, n \geqslant 1$

2. 求数列$\{a_n\}$的最大项.

(1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$　　(2) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

3. 求数列$\{a_n\}$的最小项.

(1) $a_n = \log_3^2 n - 3\log_3 n$　　(2) $a_n = \frac{1.4^n}{n}$

4. 证明:数列$\{a_n\}$从某一项开始递增.

(1) $a_n = 2^n - 10n$　　(2) $a_n = 3^n - 2^n$

5. 求 S_n 的值.

(1) $S_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

(2) $S_n = \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 15} + \frac{1}{11 \cdot 15 \cdot 19} + \cdots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$

练习

1. 试根据数列的前几项求数列的通项公式.

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \cdots$

(2) $0, 3, 2, 5, 4, 7, \cdots$

(3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, -\frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \frac{7}{20}, -\frac{8}{23}, \cdots$

(4) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \cdots$

(5) $2, 10, 26, 82, 242, 730, \cdots$

(6) $-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, -\frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \cdots$

2. 根据已知递推关系式求数列$\{a_n\}$的通项.

(1) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$

(2) $a_1 = 7, a_{n+1} = 3a_n + 5 \cdot 2^n$

(3) $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n}{4 + a_n}$

(4) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{5a_n}{3 - 7a_n}$

(5) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n}$

(6) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = \dfrac{3a_{n+1} - a_n}{2}$

(7) $a_1 = 4, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

(8) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2} + 1$

(9) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2$

3. 已知 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. 求数列 $\{a_n\}$ 的项 a_{37} 与 a_{1967}.

4. 已知 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. 求数列 $\{a_n\}$ 的项 a_{90} 与 a_{885}.

5. 求数列 $\{a_n\}$ 的第 1224 项.

(1) $a_n = \begin{cases} 1 & n = 3k-2 \\ -2 & n = 3k-1 \\ \dfrac{1}{n} & n = 3k \end{cases} \quad k \in \mathbf{N}$

(2) $a_n = \begin{cases} 2n+1 & n = 2k \\ 3n-1 & n = 2k-1 \end{cases} \quad k \in \mathbf{N}$

6. 数列 $1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots,a_n,\cdots$ 从第 3 项开始每一项都等于它前面两项之和,即

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

称此数列为非波那奇数列. 试证明:

(1) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

(2) $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} = a_{2n+2}$

(3) $1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1}$

(4) $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n-1}$

(5) $a_{n-1}^2 + a_n^2 = a_{2n-1}$

(6) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$

(7) $a_n a_{n+1} - a_{n-2}a_{n-1} = a_{2n-1}$

(8) $a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n$

(9) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_{2n-1}a_{2n} = a_{2n}^2$

(10) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \pm a_n = \pm a_{n-1} + 1$

(11) $a_n^3 + a_{n+1}^3 - a_{n-1}^3 = a_{3n}$

(12) $a_n^4 - a_{n-2}a_{n-1}a_{n+1}a_{n+2} = 1$

(13) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$

(14) $\dfrac{1}{10}(a_{n+60} - a_n)$ 是整数

(15) 数 a_{15k}(k 是整数)的最后一个数字是零

(16) a_n 的数字个数大于$\frac{n-2}{5}$

7. 试研究数列$\{a_n\}$的单调性.

(1) $a_n=\frac{n^2+1}{n}$

(2) $a_n=\frac{n^2+2n+7}{n^2+2n+8}$

(3) $a_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt{n}$

(4) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$

(5) $a_n=\frac{1}{[\sqrt{2n}]}$

(6) $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

(7) $a_n=1+(-1)^n+n$

(8) $a_n=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} & n=2k-1\\ \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} & n=2k\end{cases}$

8. 证明:数列$\{a_n\}$不是单调的.

(1) $a_n=(-1)^n$

(2) $a_n=\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}$

(3) $a_n=2n-(-1)^n$

(4) $a_n=\sin\frac{\pi n}{4}$

(5) $a_n=2\cos\pi n$

(6) $a_n=n^{(-1)^n}$

(7) $a_n=(-1)^n n$

(8) $a_n=\tan\frac{\pi(2n+1)}{4}$

(9) $a_n=\cot\frac{\pi(4n+3)}{4}$

(10) $a_n=(1+n)^{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$

(11) $a_n=n^{\cos\pi n}$

(12) $a_n=\frac{n-(-1)^n n}{2n+1}$

(13) $a_n=2^{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$

(14) $a_n=n^2\sin\frac{\pi n}{4}$

9. 证明:数列$\{a_n\}$从某项开始是单调的.

(1) $a_n=\frac{3n+4}{n+2}$

(2) $a_n=n^3-8n^2$

(3) $a_n=\frac{125n}{n^2+20}$

(4) $a_n=\frac{n^2+48}{n+4}$

(5) $a_n=\frac{n^3}{n^2-2n+3}$

(6) $a_n=\frac{n^2}{n^3+32}$

(7) $a_n=\frac{1-n}{\sqrt{n}}$

(8) $a_n=\frac{n-3}{\sqrt{n^2+1}}$

(9) $a_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$

(10) $a_n=\sqrt{n^2+2n}-n$

(11) $a_n=2^n-10n$

(12) $a_n=\frac{2^n}{n}$