高等学校“十一五”规划教材

线性代数

第二版

邵建峰　刘彬　编

化学工业出版社

线性代数

第二版

高等学校“十一五”规划教材

线 性 代 数

第二版

邵建峰　刘　彬　编

化学工业出版社

·北京·

线性代数是大学数学教育中的重要基础课程之一。本书是按照国家教育部颁布的“工程数学课程教学基本要求”编写而成的。

本书共七章和一个附录。从第一章到第七章主要介绍了行列式、矩阵的基本概念及其运算，矩阵的初等变换与初等矩阵，n 维向量空间，线性方程组解的结构与求解方法，矩阵的特征值与特征向量，以及矩阵的对角化，二次型及其标准化，线性空间与线性变换等。附录介绍了 MATLAB 基本命令与编程方法并辅以应用实例。

本书可作为大学理工科与经济、管理等学科线性代数课程的教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/邵建峰，刘彬编. —2 版. —北京：化学工业出版社，2007.8

高等学校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-122-00956-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①邵…②刘… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 118530 号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：宋湘玲

责任校对：郑　捷　　装帧设计：华审视觉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　装：化学工业出版社印刷厂

720mm×1000mm　1/16　印张 12　字数 225 千字　2007 年 8 月北京第 2 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：18.00 元

第二版前言

本书第一版自2002年出版以来，虽经多次印刷发行，然而除少许文字类的修正外，都没有机会做大的修改。现在根据我们在教学过程中所得到的一些经验，并结合使用本书的师生所提出的宝贵意见，将全书作了比较大的改动，故此成为第二版。

本书修改的主旨一是希望经过修改后的教材更便于教学的使用；其次是与我们编写的、相配套的学习指导书一起，增强本套教材在MATLAB基础编程与应用方面的一个特色。

这次修改保留了原版主要的结构体系，但是对原书各章的内容均作了较系统和全面的修订。除各章节中文字上的修改、定理与例题增减等局部微小改动外，较大改变之处也有不少。例如在第二章，我们将齐次线性方程组有非零解的判定这一部分与方阵求逆合并在一起新组成该章的最后一节（第二章第六节）。在第三章中，将矩阵的非零子式与等价标准形的内容，从第四节矩阵的秩这一节中分离出来构成了该章新增加的第五节。还有在附录MATLAB软件基础与应用中的第六节应用实例部分，增加了多项式曲线拟合与最小二乘法，多元函数极值的求法与判定两小节。

本书修改工作主要由邵建峰、刘彬完成。在此，对关心和帮助本次修订工作的同事和学校有关部门表示感谢！

编者

2007年6月

第一版前言

线性代数是大学数学教学中一门主要的基础课程，是理工科大学生学科知识结构中的一个重要环节，同时也是用数学知识解决实际问题的一个强有力的工具。本书的编写是按照国家教育部颁布的“工程数学课程教学基本要求”进行的，并且还作了一些改革性的尝试，即在本书的附录部分，介绍了工程数学软件 MATLAB 在线性代数运算方面的基本功能与编程实现方法，并给出了线性代数的几个应用实例。

在本书编写的过程中，编者考虑到以下几个方面。

(1) 本书作为大学理工科与经济管理等学科线性代数课程的教材，课内学时一般在 32～40 学时左右，所以无论是在章节安排上还是在内容取舍上，注意简洁明了，尽量符合工科的学科要求。

(2) 编写过程中充分考虑到工科大学生的知识基础。在教材内容上以基本概念与基本方法为核心，力求做到重点突出，简明扼要，清晰易懂，便于教学。在习题配备上，既安排了必要的基本训练题，又有适当的综合提高题。

(3) 为了增强学生应用数学知识与数学软件的能力，本书附录讲述了 MATLAB 在线性代数方面的基本功能与编程方法。把数学实验的思想引入到数学基础课程教学之中，逐步培养学生应用数学知识、结合计算机方法和使用已有的软件来解决实际问题的能力，应该说是值得重视的教学环节。

本书共分七章和一个附录。第一章主要介绍了行列式的基本概念、行列式的性质与计算，行列式的一个应用——Cramer 法则。第二章介绍了矩阵及其运算，可逆矩阵，分块矩阵以及矩阵的初等变换与初等矩阵。第三章中讨论了 n 维向量组的线性相关性，向量组的秩，n 维向量空间，向量的内积与正交矩阵等。第四章研究了线性方程组的解的结构与求解方法。第五章探讨了矩阵的特征值与特征向量，矩阵对角化的条件与实对称矩阵的对角化。第六章研究了二次型及其标准化问题。第七章介绍了线性空间的维数、基与坐标，线性空间中的基与坐标变换，欧氏空间，线性变换的矩阵表示等。在附录中，介绍了 MATLAB 基本命令与编程方法。对每章配备的习题，书后给出了答案。

本书第一、二章由邵建峰编写，第三、四章由朱耀亮编写，第五、六章由刘彬编写，第七章与附录部分由殷翔编写。全书由邵建峰、朱耀亮统稿。由于编者水平有限，错漏之处不可避免，还望使用本书的老师与学生批评指正。

编者

2002 年 5 月

目　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中的一个基本工具。在初等数学里已经介绍过二阶、三阶行列式，现在为了研究 n 元线性方程组，需要进一步讨论 n 阶行列式。本章将在二阶、三阶行列式的基础上，给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质与计算。作为行列式的初步应用，还将解决一类 n 元方程组的求解问题。

第一节　n 阶行列式

在讨论一般 n 阶行列式之前，先简单回顾一下二阶、三阶行列式。

一、二阶、三阶行列式

在初等数学中，二阶、三阶行列式的概念是在线性方程组的求解中提出的。例如，对于一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

从二元线性方程组解的形式可以发现，如果引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \tag{1.3}$$

则（1.2）式可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

把按（1.3）式规定其值且由 a,b,c,d 四个数构成的两行、两列的式子

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

叫做二阶行列式。用二阶行列式来表示二元线性方程组的解较简洁明了。

【例 1】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1,\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{1}{2}$$

类似地，如果在求解三元方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的过程中引入下列三阶行列式的记号，并规定其值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.4}$$

则当三元线性方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

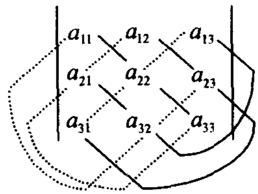
时，用消元法求解这个方程组可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D},\quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1.5}$$

式中，$D_j(j=1,2,3)$是用常数项 b_1, b_2, b_3 替换 D 中的第 j 列所得的三阶行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

在（1.4）中三阶行列式的展开式可以用所谓主、副对角线法则得到



其中每一条实线上的三个元素的乘积带正号，而每一条虚线上的三个元素的乘积带负号。所得六项的代数和就是三阶行列式的值。

【例 2】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 $D=1\times2\times1+1\times(-1)\times1+0\times3\times3-1\times2\times3-1\times3\times1-0\times(-1)\times1$
$=-8$

但是需要指出的是，主、副对角线法则不易于向一般 n 阶行列式推广。事实上，二阶、三阶行列式还有这样一个规律，它们都可以按第一行展开得到行列式的值。例如对三阶行列式有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{1.6}$$

其中 A_{11},A_{12},A_{13} 分别是第一行元素 a_{11},a_{12},a_{13} 的代数余子式

$$\begin{aligned} A_{11}&=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} \\ A_{12}&=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) \\ A_{13}&=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1.7}$$

这一展开的规律表明，对一般的 n 阶行列式，可以像（1.6）式、（1.7）式那样，用低阶行列式的值去定义高阶行列式的值。这样的定义方式具有内在的一致性。对于用这种方法定义的各阶行列式必然会有许多共同的性质和统一的计算方法。

二、n 阶行列式

现给出 n 阶行列式的归纳式定义。

定义 1 由 $n\times n$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的具有 n 行 n 列的式子

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|a_{ij}|_{n\times n}$$

叫做 n 阶行列式 (Determinant)，并且规定其值为

(1) 当 $n=1$ 时 $\qquad D=|a_{11}|=a_{11}$

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{1.8}$$

其中

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称 M_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的余子式(Cofactor)，A_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的**代数余子式**(Algebraic cofactor)。

由 n 阶行列式的定义，其值为 n^2 个元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的乘积构成的和式，称为**行列式的展开式**。显然其有下面的性质：

性质 n 阶行列式 D 的展开式中有 $n!$ 个项，每项都是来自于行列式的不同行不同列的 n 个元素的乘积。

证 对该性质不难用归纳法给予证明。

(1) 当 $n=1$ 时，结论显然成立；

(2) 假设对 $n-1$ 阶行列式结论也成立。则对 n 阶行列式 D，由 (1.8) 式

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

和归纳假定可知，行列式 D 的第一行每个元素 a_{1j} 的代数余子式 A_{1j} 均为 $n-1$ 阶行列式。因而，它的展开式中有 $(n-1)!$ 个项，而且每一项都是来自于除第一行和第 j 列以外的 $n-1$ 个不同行不同列的元素的乘积。将 D 的第一行 n 个元素的所有代数余子式 A_{1j} 代入展开式 (1.8) 中，易知这样产生的所有项都互不相同，并且可得到，n 阶行列式 D 的展开式中确实有 $n\times(n-1)!=n!$ 个项，且每项都是来自于不同行不同列的 n 个元素的乘积。

综合上述，性质得证。

此外，实际上还可证明，在行列式的展开式中带正号的项和带负号的项各占一半。证明过程留给大家。

【例 3】 计算 n 阶上三角行列式 (Upper triangular determinant)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由行列式定义，按第一行展开时，元素 a_{12}，a_{13}，…，a_{1n}的余子式皆等于零。所以

$$D_n=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times M_{11}$$

以此类推，得 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

特别地，对下列（主）对角行列式（Diagonal determinant），有

$$\overline{D}_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【例 4】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式的定义，可以得到

$$D_n=a_{1n}\times(-1)^{1+n}\times M_{1n}$$

注意到上式右端中余子式 M_{1n}是 $n-1$ 阶行列式，而且具有 n 阶行列式 D_n 同样的形式，反复利用（n 阶）行列式定义，有

$$\begin{aligned} D_n&=(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}\cdot a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-1)2}a_{n1} \\ &=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1} \end{aligned}$$

值得注意的是：这个 n 行列式 D_n 的值并不总等于（-1）$a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$。

【例 5】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$

$$=1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+0-2\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\times1-0+0-2\times4=-7$$

实际上，行列式不但可以按第一行元素展开，而且也可以按第一行以外的任一行或者任一列去展开，其结果都是相同的，即有

定理 1 n 阶行列式 D 等于它的任一行（列）元素与它们所对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad \forall i=1,2,\cdots,n \tag{1.9}$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad \forall j=1,2,\cdots,n \tag{1.10}$$

（定理的证明略去）

在前述例 5 中，如果按第四行元素展开行列式，就得到

$$D=1\times(-1)^{4+2}\times\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7$$

这与按 n 阶行列式定义计算的结果是一致的。

第二节　n 阶行列式的性质

由行列式的定义可知，当行列式阶数 n 较大时，直接用定义计算行列式是较为繁琐的。下面介绍行列式的一些性质，以此简化行列式的计算。

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

把 D 中的行与列互换，所得到的行列式记为 D'（或 D^{T}），即

$$D'=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称行列式 D' 为行列式 D 的**转置行列式**（Transposed determinant）。

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。

证 对行列式的阶数作数学归纳法。

（1）当 $n=2$ 时，命题显然成立；

(2) 现假设对 $n-1$ 阶行列式命题成立，下面证对 n 阶行列式命题也成立。

事实上，若将 D 和 D' 分别按第一行和第一列元素展开，有

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\cdot(-1)^{1+k}M_{1k} \tag{1.11}$$

$$D'=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}B_{k1}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\cdot(-1)^{k+1}N_{k1} \tag{1.12}$$

其中 A_{1k}，M_{1k} 是 D 的第一行元素的代数余子式和余子式；B_{k1}，N_{k1} 是 D' 的第一列元素的代数余子式和余子式。

M_{1k}，N_{k1} 都是 $n-1$ 阶行列式，而且显然可看出 N_{k1} 是 M_{1k} 的转置行列式。由归纳法假设知 $N_{k1}=M_{1k}$，$\forall k=1,2,\cdots,n$ 成立，从而由（1.11）式、（1.12）式得 $D=D'$，即命题对 n 阶行列式也成立。

综合上述，命题得证。

性质 1 说明，行列式中行和列的地位是对称的。行列式关于行成立的性质对于列也同样成立；反之亦然。

性质 2 互换行列式中两行（列），行列式变号。

证 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \end{array}$$

互换第 i 行与 j 行（$1\leqslant i$，$j\leqslant n$，$i\neq j$），得

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \end{array}$$

下面用数学归纳法证明 $\overline{D}=-D$。

(1) 当 $n=2$ 时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}$$

显然 $\overline{D}=-D$。

(2) 假设对阶数小于 n 的行列式，结论皆成立，下面证明对 $n(\geqslant 3)$ 阶行列式命题结论也成立。

注意到行列式 D 与 $\overline{D}$ 中除去第 i 行与第 j 行的位置互换外，其余各行均相同。取定一个 $k(k\neq i,j)$，并将行列式 D 与 $\overline{D}$ 都按第 k 行展开，由第一节定理 1 的结论，得到

$$D=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\cdot(-1)^{k+l}M_{kl} \tag{1.13}$$

$$\overline{D}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}B_{kl}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\cdot(-1)^{k+l}N_{kl} \tag{1.14}$$

式中，A_{kl}，M_{kl} 是 D 的第 k 行元素的代数余子式和余子式；B_{kl}，N_{kl} 是 $\overline{D}$ 的第 k 列元素的代数余子式和余子式。

M_{kl}，N_{kl} 都是 $n-1$ 阶行列式，而且 N_{kl} 与 M_{kl} 除去两行的元素互换外，其余各行都相同。由归纳法假设知 $N_{kl}=-M_{kl}$，$\forall\, l=1,2,\cdots,n$ 成立，从而由 (1.13)、(1.14) 式知 $\overline{D}=-D$，即命题对 n 阶行列式也成立。

综合上述，命题得证。

推论 1 如果行列式中有两行（列）元素对应相等，则此行列式为零。

性质 3 行列式中的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 将等号左、右两边的行列式分别记为 $\overline{D}$ 与 D，并将行列式 $\overline{D}$ 按第 i 行展开，得

$$\begin{aligned}\overline{D}&=ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}\\&=k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})\\&=kD\end{aligned}$$

推论 2 行列式中某一行（列）中所有元素的公因数，可以提取到行列式符号的前面。

推论 3 如果行列式中某行（列）的元素全为零，则此行列式为零。

推论 4 如果一个行列式的两行（列）元素对应成比例，则此行列式为零。

性质 4 如果行列式中某行（列）的各元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 与性质 3 的证明类似，将等式左边的行列式按第 i 行展开即可。

性质 5 把行列式的某一行（列）的元素的 $k(k\in R)$ 倍加到另一行（列）上去，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

证 由性质 4 和推论 4 即可证得。

性质 6 行列式 D 的某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ \forall i \neq j$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,\ \forall i \neq j$$

证 作行列式（把原行列式中的第 j 行元素换为第 i 行元素）

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \end{matrix}$$

首先由上述性质 2 的推论 1 可知，当 $i\neq j$ 时，$\overline{D}=0$。再将它按第 j 行展开（注意到行列式 $\overline{D}$ 与行列式 D 仅有第 j 行的元素不同，第 j 行的元素的代数余子式是相同的），则又有

$$\overline{D} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

从而