21 世纪高等院校教材

概率论与数理统计

金治明　李永乐　编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

金治明　李永乐　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据教育部新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写的，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念与抽样分布、参数估计、假设检验等，在“工科类本科数学基础课程教学基本要求”之外，还在概率论部分增加了特征函数这一节内容，在数理统计部分增加了样本容量的确定、正态性检验、回归分析与方差分析等有广泛应用的内容. 本书注重概率统计思想的阐述，突出概率统计方法及其实际背景的介绍，强调应用能力和统计建模能力的培养. 全书论述严谨，行文深入浅出，富有启发性和可读性. 为了便于自学，书后附有习题参考答案.

本书可作为高等工科院校非数学类专业的概率论与数理统计课程的教材，也可作为医药类专业学生的教材，对广大工程技术人员来说也是一本不可多得的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/金治明，李永乐编著. —北京：科学出版社，2007
(21世纪高等院校教材)
ISBN 978-7-03-020681-7

I. 概… II. ①金… ②李… III. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 IV. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第182736号

责任编辑：李鹏奇 王 静／责任校对：林青梅
责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008年1月第一次印刷 印张：23 1/4
印数：1—5 000 字数：445 000

定价：29.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉)

前 言

众所周知, 自然界与人类社会的现象可以分为两大类: 必然性现象与随机现象. 概率论与数理统计就是研究随机现象中数量关系的数学学科. 概率论是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科, 数理统计则是以概率论为主要数学工具, 研究怎样用有效的方法去收集和使用受随机性影响的数据, 并对所研究的问题作出推断和预测, 直至为决策和行动提供依据和建议的一门数学学科. 概率论与数理统计的应用非常广泛, 几乎在人类活动的一切领域都能不同程度地找到它的应用. 它向各个基础学科和工程学科的渗透产生了不少边缘学科, 如生物统计、统计物理、金融数学等; 信息论、控制论、可靠性理论和人工智能等的发展也都广泛地应用了概率论与数理统计.

随着现代科学技术日新月异的发展, 很多工科类专业对概率论与数理统计的需求越来越高. 本书就是我们在教学过程中, 通过对教学内容、教学方法和教学手段的研究与改革, 为我校本科非数学类专业所编写的教材.

本书的内容覆盖了教育部新制定的 "工科类本科数学基础课程教学基本要求(修订稿)" 所规定的内容, 考虑到某些专业的读者深入学习的需要, 我们在概率论部分增加了特征函数这一节内容, 在数理统计中增加了样本容量的确定、正态性检验和双因子方差分析等有广泛应用的内容. 这些内容, 我们标以 * 号. 书中除了为巩固所学知识所必需的基本例题之外, 还介绍了一些实际应用及一些军事应用的例子, 以培养学生的应用能力和统计建模能力.

经验表明, 初学者的困难是不易正确把握和深刻理解有关的思想和概念. 所以本书花了一定的篇幅用在概率统计思想的阐述上. 当然, 这门课还是数学课, 不能只教给学生一些现成的使用方法, 还要培养学生用正确的概率统计方法解决一些实际问题的能力.

在编写过程中, 我们尽可能做到 "厚实基础, 淡化技巧, 突出概率统计思想的教学, 加强应用能力和创新能力的培养". 本书的数学符号和概念采用了 1982 年颁布的 "国家标准".

本书的编写工作得到了校、部和院三级领导的关怀与指导, 得到了学校专项课题经费的支持, 在此表示衷心的感谢. 本书由金治明教授主持编写, 并由他执笔概率论部分, 数理统计部分由李永乐执笔. 全书由李永乐负责校对和统稿.

由于编者水平有限, 谬误之处在所难免, 敬请同行和广大读者批评指正.

编 者

2006 年 11 月于长沙

目　录

第 1 章　随机事件与概率

自然界与人类社会的现象可以分为两大类：必然性现象与随机现象. 所谓必然性现象就是在一定的条件下必然会发生的现象, 比如向上抛一块石头必然会落下. 随机现象则不一样, 即使在确定的条件下所发生的结果也并不一样. 比如掷一颗骰子, 可能出现的点数, 事先并不能确定. 每次打靶时我们都瞄准同一目标, 但每次的弹着点也不尽相同, 事先也不能确定. 然而多次重复掷一颗均匀的骰子, 我们会发现出现每一个点的次数大约占投掷次数的六分之一, 而弹着点的分布也呈现一定的规律. 这种在每次试验中结果不确定的现象, 称之为随机现象. 如上所说, 对于随机现象, 在大量重复试验中其结果又呈现某种规律性, 概率论与数理统计就是研究随机现象中量的关系的数学分支.

随机现象是一大类现象, 它几乎发生在所有的自然界与社会现象中, 即使是我们称之为必然性现象中, 也伴随着随机现象的发生. 虽然上抛一个物体必然会落下, 但是由于受到空气的扰动, 着地点也会有差别. 因此概率论与数理统计的应用范围十分广泛, 几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中. 例如, 使用概率统计的方法可以进行气象预报、水文预报、产品的抽样验收、武器精度的评估、优化试验方案、生产的自动化控制以及从事金融与保险业的研究等.

1.1　样 本 空 间

1.1.1　样本空间

我们把对各种随机现象的观察或试验统称为随机试验, 简称为试验. 把随机试验的一切可能结果的全体称为**样本空间**. 这里“空间”二字并不是我们现实世界中真正的空间, 数学家们喜欢用它表示我们所研究的事物的全体. 在概率论中我们用大写的希腊字母 Ω 或者带有上、下标的 Ω 来表示. 试验的每个结果称之为**样本点**或**基本事件**, 通常用小写的希腊字母 ω 或 $\omega_1, \omega_2, \cdots$ 来表示.

随机试验的特点是：可以在相同的条件下重复地进行, 试验的全部可能的结果是事先可知的, 但每次试验的结果是不能事先确定的. 下面举一些例子, 并用 E_i, Ω_i 分别表示相应的试验与由它产生的样本空间.

(1) E_1：掷一颗均匀的骰子. 我们有

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(2) E_2：掷一枚硬币. 则

$$\Omega_2 = \{1, 0\}$$

其中 1 表示出现正面, 0 表示出现反面.

(3) E_3：从一批产品中任意抽取 n 件，检验这 n 件产品中的次品数. 则

$$\Omega_3 = \{0, 1, \cdots, n\}$$

(4) E_4：对某目标进行射击, 直到目标击中为止. 则

$$\Omega_4 = \{1, 2, \cdots\}$$

(5) E_5：记录某地区一月的日平均气温. 则

$$\Omega_5 = [-50, 50]$$

(6) E_6：考虑对某靶心的射击的落点, 则

$$\Omega_6 = \{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \infty\}$$

其中 (x_0, y_0) 为靶心的坐标.

由上述可知, 样本空间可以是有限点集, 可以是可列点集（即它可以与自然数集是一一对应的集合）, 也可以是某区间或平面上的一个区域.

1.1.2　随机事件

在实际问题中, 我们往往关心某种满足一定条件的样本点的集合. 这种满足一定条件的样本点的集合我们称之为**随机事件**, 简称为**事件**. 所以随机事件就是某些样本点的集合, 也就是样本空间 Ω 的某些子集合. 在试验时, 如果出现了事件 A 中的样本点. 我们就说事件 A 发生了或者说 A 出现了. 例如

(1) 在 E_1 中事件 A:“出现大于 3 的点”, 即

$$A = \{4, 5, 6\}$$

(2) 在 E_5 中事件 B:“日平均气温为 25~32℃”, 即

$$B = [25, 32]$$

Ω 作为自身的子集合, 在每次试验中总是发生的, 我们称之为**必然事件**, 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点, 在每次试验中总是不发生的, 称之为**不可能事件**. 事件通常用大写的英文字母 $A, B, C, \cdots$ 来表示, 其具体内容可写为 $A = \{\cdots\}$, 其中大括号中或

者是 A 所包含样本点的列举, 如上面的 A, 或者是对 A 中样本点所具有的性质的描述, 比如在 E_3 中, 设 C 为次品个数大于 k 的事件, 那么可写 $C=\{\omega\in\Omega:\omega>k\}$. 事件 B 也属于这种情形, 不过我们用一个闭区间表示 "$25\leqslant\omega\leqslant 32$".

事件间的关系与运算

事件既然是 Ω 的子集合, 它们之间的关系与运算就是集合间的关系与运算. 下面设 $A,B,A_1,A_2,\cdots$ 等均为事件.

(1) 若 $A\subset B$, 则称 B 包含事件 A 或 A 含于 B. 这表示事件 A 发生必导致 B 发生. 若 $A\subset B$, 且 $B\subset A$, 即 $A=B$, 则称事件 A 与 B**相等**.

(2) 事件 $A\cup B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A\text{或}\omega\in B\}$, 称为两事件的**并事件**. 也即是把两事件的样本点放在一起所组成的新事件. 因此 $A\cup B$ 发生当且仅当 A,B 中至少有一个发生. 类似地, 称

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega\text{至少属于}A_1,A_2,\cdots,A_n\text{中一个事件}\}$$

为 **n 个事件的并事件**, 称

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega\text{至少属于}A_1,A_2,\cdots\text{中一个事件}\}$$

为**可列个事件的并事件**.

(3) 事件

$$A\cap B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A\ \text{并且}\ \omega\in B\}$$

称为事件 A 与 B 的**交事件**, 简记为 AB, 也即是两事件中公共的样本点所组成的事件. 因此 AB 发生当且仅当 A 与 B 同时发生. 类似地, 称

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega\text{属于一切}A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

为 **n 个事件的交事件**, 称

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{\omega\in\Omega:\omega\text{属于一切}A_1,A_2,\cdots\}$$

为**可列个事件的交事件**.

(4) 事件

$$A-B=\{\omega\in\Omega:\omega\in A\ \text{但}\omega\notin B\}$$

称为事件 A 与 B 的**差事件**, 事件 $A-B$ 发生当且仅当 A 发生, 而 B 不发生. 特别当 $A\supset B$ 时, 则称 $A-B$ 为真差.

(5) 若 $A \cap B = \varnothing$, 则称事件 A 与 B**互不相容**或**互斥**, 也即两事件不能同时发生.

(6) 若 $A \cup B = \Omega$, 且$A \cap B = \varnothing$, 则称两事件互为**逆事件**, 并记 $B = \overline{A}$或$A = \overline{B}$.

事件的关系与运算可用图 1-1 来表示.

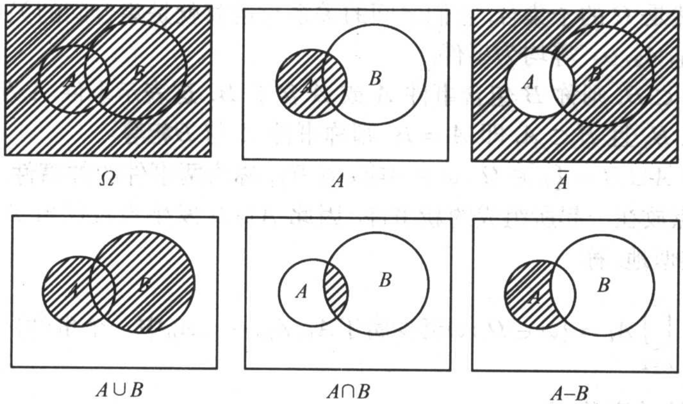

图 1-1

事件的运算满足下列定律.

(1) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(2) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(3) 分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(4) 德摩根律:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

这些定律均可用严格的数学的方法证明, 也即证明等式两边的事件互相包含. 但是用图示的方法验证这些定律会显得更加直观, 例如图 1-2 中的 $\overline{(A \cup B)}$ 即为方框中阴影部分, 而如果你把 A 的外面涂上红色, 把 B 的外面涂上蓝色, 那么既有红色又有蓝色的部分恰是方框中的阴影部分.

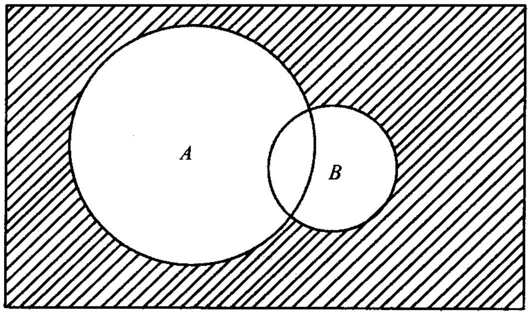

图 1-2

1.2 频率与概率

我们在 1.1 节中已经指出随机试验的基本特点是每做一次试验事先并不能确定会有哪个结果, 因此一个确定的事件 (必然事件与不可能事件除外) 在一次试验中可能发生也可能不发生. 那么如果重复做同样的试验, 该事件发生的客观可能性①有多大? 为了描述事件发生的可能性, 我们引入下面频率与概率的定义.

定义 1.1 在相同的条件下, 重复做同样的 n 次试验, 如果事件 A 发生 n_A 次, 则称 n_A 为事件 A 的**频数**, 称比数 n_A/n 为事件 A 的**频率**. 一般地我们用 $f_n(A)$ 表示 n 次试验中事件 A 的频率.

由定义可见频率 $f_n(A)$ 有下面的性质:

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega) = 1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两不相容的事件, 则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_n)$$

事件的频率能否反映在多次重复试验中事件发生的客观可能性大小呢? 在历史上有人做过试验表明, 当试验次数比较小的时候, 频率的波动较大, 而当试验次数较大时, 频率就呈现出稳定性. 比如你掷几次硬币, 记下每次出现正面的频率, 发现没有什么规律可言, 但如果掷它成千上万次, 就看出出现正面的频率大约在 0.5 左右. 这个事实表明虽然随机试验中每次的结果是不确定的, 但大量的随机试验中确实隐藏着某种规律性: 它就是事件发生的可能性, 我们称之为**概率**, 而频率就是对它的量度. 概率是随机现象中的一种客观存在, 我们说它是客观存在, 因为它不依赖于我们的主观意识, 大量的试验证明了这一点. 正如我们都承认物体的长度是一种客观存在一样. 我们用尺可以度量物体的长度, 同样的道理, 频率也是对概率的度

① 这里把可能性前面冠上 "客观" 二字, 是为了区别它与主观可能性或信仰程度的不同.

量, 尺子要造得精细, 度量才会准确, 同样地重复试验的次数要比较多, 也即我们得到的样本点 $\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 的容量 n 比较大, 频率才会比较准确地度量出概率的大小. 在第 5 章中我们将证明, 当 $n\to\infty$ 时频率 $f_n(A)$ 在某种意义下逼近概率 $P(A)$, 而本书的数理统计部分将会更清楚地告诉我们, 如何用频率近似度量 (估计) 概率? 站在认识论的角度, "概率" 具有两重性: 一方面是它的客观存在性, 这正是概率论中假定事件概率的存在, 因而展开概率论的理由; 另一方面, "概率" 必须通过大量的试验去认识 (估计) 它, 这就是数理统计的任务.

正如上面所说, 下面关于概率的定义应该从频率的性质抽象出来.

定义 1.2 设 Ω 为样本空间, 对于 Ω 中的每个事件 A, 我们赋予一个实数 $P(A)$, 称之为概率, 如果它满足下面的条件:

(1) 对于每个事件 $A, P(A)\geqslant 0$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件, 即对于 $i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots$, 则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1-1}$$

式 (1-1) 称为概率的可列可加性, 它是概率的主要特征, 而频率只具有有限可加性, 所以频率与概率是两个不同的概念.

概率具有以下的性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(概率的有限可加性) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两不相容事件, 则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1-2}$$

证明 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$, 由于 $P(\varnothing)=0$ 及式 (1-1), 可直接得到

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cdots)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0+0+\cdots=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\end{aligned}$$

性质 3 设 A,B 是两个事件, 且 $A\subset B$, 则

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1-3}$$

$$P(B)\geqslant P(A) \tag{1-4}$$

证明 由 $A\subset B$, 可知 $B=A\cup(B-A)$, 且 $A(B-A)=\varnothing$, 由概率的有限可加性得

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

所以式 (1-3),(1-4) 得证.

性质 4 对于任意事件 A,

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

证明 因 $A \cup \overline{A} = \Omega$, 且$A\overline{A} = \varnothing$, 由概率的有限可加性, 得

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$

性质 5 对于任意两事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1-5}$$

证明 因 $A \cup B = A \cup (B - BA)$, 由式 (1-2) 及式 (1-3) 得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

式 (1-5) 还可推广到事件个数 $n > 2$ 的情形. 如 $n = 3$, 我们有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) \\ &- P(A_2A_3) - P(A_3A_1) + P(A_1A_2A_3) \end{aligned} \tag{1-6}$$

对于一般的 n, 可用归纳法证明:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =& \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots \\ &+ (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdots A_n) \end{aligned} \tag{1-7}$$

1.3 古典概型

1.1.1 中所列举的试验 E_1, E_2 有两个特点:

(1) 样本空间所包含的样本点个数是有限的;

(2) 试验中每个样本点发生的可能性是相等的.

具有以上两个特点的试验模型称之为古典概型, 也称为等可能概率模型 (等可能概型), 这个模型在实际中有广泛的应用. 下面我们给出等可能概型中事件概率的计算公式.

设样本空间

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \cdots, \omega_n\}$$

亦即 Ω 有 n 个样本点, 且 $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}) = \dfrac{1}{n}$, 而事件 A 包含 k 个样本点, 则

$$P(A) = \frac{k}{n} \tag{1-8}$$

古典概型的计算公式非常简单, 但应用却是千变万化的, 而且经常要应用排列组合公式. 下面我们介绍几个排列组合的公式.

(1) 设有 n 个不同的事物, 我们设想在一条直线上排成一列, 每个事物在直线上都占据一个位置, 要问这 n 个事物有多少种不同的排列? 这里两种排列认为是不同的, 是指它们至少在一个位置上的事物不相同. 在第一个位置上, 可以是 n 个事物中的任一个, 所以有 n 种; 当第一个位置上的事物确定后, 第二个位置就只能排 $n-1$ 个事物中的任意的一个, 所以有 $n-1$ 种排法; 照此推理, 当前 $k-1$ 个位置上的事物确定之后, 第 k 个位置只有 $n-k+1$ 种排法, 最后一个位置只有 1 种排法. 因此 n 个事物的**全排列**方法的总数 P_n(也称之为**全排列数**) 为

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \tag{1-9}$$

(2) 设有 n 个事物, 从中任选 r 个进行排列, 问有多少种不同的排列? 这里 r 个事物是从 n 个事物中选取的, 选定后再进行排列, 这种排列称之为**选排列**. 所求的不同排列的个数称为选排列数, 记为 A_n^r. 这里两个不同排列是指或者两者中元素有不同, 或者两者元素虽然完全相同, 但排列的顺序不同. 如果从 n 个中选取 r 个, 只考虑所选取的是哪些事物而不理会它们的顺序, 称不同的选取方法的总数为组合数, 记为 C_n^r. 这里所谓“不同的选取方法”是指所选取的事物中至少有一个不同. 在选排列中当 r 个事物选定之后, 这 r 个事物将有 $r!$ 种不同的排列. 因此选排列数与组合数之间有如下的关系:

$$\mathrm{A}_n^r = \mathrm{C}_n^r \cdot r! \tag{1-10}$$

现在我们来计算组合数 C_n^r. 为此按如下的方式考虑全排列的形成: 我们设想先选出 r 个事物放在一条直线的左边, 所余者放在右边, 左边的事物任意排列, 右边的也可任意排列. 由于选取的方法有 C_n^r 种, 因此总共有 $\mathrm{C}_n^r \cdot r! \cdot (n-r)!$ 不同的排列. 它恰好等于全排列数 P_n, 所以

$$\mathrm{C}_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \tag{1-11}$$

于是

$$\mathrm{A}_n^r = \mathrm{C}_n^r \cdot r! = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1-12}$$

这里的 C_n^r 即是二项式展开中的系数.

(3) 更复杂一点, 我们考虑 n 个不同事物分成 k 个组, 使得第 i 组恰有 n_i 个事物, 且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, 问有多少种不同的分法?

容易看出 n 个事物的全排列与先把 n 个事物分成 k 个组, 然后每个组再排列是一样的. 第 i 组事物的全排列数为 $n_i!, i=1,2,\cdots,k$, 因此上述的分组数再乘以 $n_1!n_2!\cdots n_k!$ 就等于全排列数, 所以上述的分组数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

下面给出一些古典概率计算的例子.

例 1-1 袋中有 a 只红球, b 只白球, 现在随机地将球一个个地摸出, 求第 k $(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 次摸出的是红球的概率.

解法一 设想把球全部摸出后依次摆成一条直线, 而且把球看成是有区别的 (比如设想把球编号). 于是所有可能的结果, 即样本点的总数为 $(a+b)!$. 我们所关心的事件 $A=\{$第k次摸出红球$\}$, 可以设想成在直线的第 k 个位置上为红球, 而其他位置为任意的球. 第 k 个位置上可以放置 a 个红球中的任意一个, 所以它有 a 种选择, 而当它取定之后, 其他位置可以是任意的球, 即为 $(a+b-1)$ 个球的全排列. 因此 A 包含 $a\cdot(a-b+1)!$ 个样本点, 所以

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

解法二 现在设想这些球除颜色外是无区别的, 我们仍然把球取出排成直线. 显然我们可以只考虑红球的位置, 因为余下的位置必然会是白球.$a+b$ 个位置中选出 a 个红球的位置有 C_{a+b}^a 种, 我们把每种选法的结果看成是随机试验的一个样本点, 于是样本点总数为 C_{a+b}^a. 事件 A 表明第 k 位置上必须是红球, 注意红球之间是无区别的, 所以第 k 位置必须放红球, 只要考虑其他红球的位置, 它可以放在 $a+b-1$ 个位置中任 $a-1$ 个位置上, 这有 C_{a+b-1}^{a-1} 种选择. 因此事件 A 包含 C_{a+b-1}^{a-1} 个样本点, 所以

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_{a+b-1}^{a-1}}{\mathrm{C}_{a+b}^a}=\frac{a}{a+b}$$

注 例 1-1 的不同解法说明我们可以用不同的样本空间来描述同一个随机试验. 第一种我们把球的各种排列看成是样本空间的样本点, 也即把球当成是个个有区别的. 而第二种解法, 把球看成是除颜色外无区别的, 因此不计同一种球间的次序, 所以用 $a+b$ 个球选取 a 个红球的组合数作为样本点的总数. 这两种解法都是正确的, 当然结果也是相同的. 事实上容易看出, 在第二个样本空间中, 我们把第一个样本空间的 $a!b!$ 个点看成是它的一个点. 这里的关键是: **在计算事件的样本点数**

时必须始终坚持在一个确定的样本空间里考虑事件所包含的样本点数, 否则一定会出错!

例 1-2 (占位问题)　设有 n 个质点, 每个质点都以 $\frac{1}{N}$ 的概率落于 $N(\geqslant n)$ 个盒子中之一, 试求事件 A:"某预先指定的 n 个盒中各有一个质点"的概率 $P(A)$.

解　这是统计物理中抽象出来的模型, 由统计物理的具体意义, 对质点与盒有三种不同假设, 因此得到三种不同的结果. 首先不妨假设盒是排成直线的, 而且预先指定的 n 个盒就是排在前面 n 个盒, 编号为 $1,2,\cdots,n$.

(1) (Maxwell-Boltzmann)假设 n 个质点可辨, 每个盒可容纳任意多的质点. 由于每个质点都可落入 N 个盒之一, 所以 n 个质点落入 N 个盒子所有的可能数为 N^n, 因此样本点总数为 N^n. 设想 n 个质点有编号 $1,2,\cdots,n$. 为了实现事件 A, 第 1 号质点可以落入 n 个指定盒的任意一个, 它有 n 种可能, 第 2 号则只能落入 $n-1$ 个盒子之一, 而第 $n-1$ 个质点只有 2 种可能的选择, 最后的质点只有 1 种可能, 所以事件 A 所含的样本点数为 $n!$, 这样

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2) (Bose-Einstein)假设 n 个质点完全相同 (不可辨), 每个盒仍然可容纳任意多的质点. 由于质点不可辩, 我们只能看到某盒中有几个质点, 不能区分是哪几个质点. 如果记第 i 盒中质点数为 a_i, 则我们只能看到质点在盒中的占位情况: $(a_1,a_2,\cdots,a_N)$, 其中 $\sum_{i=1}^{N}a_i=n, 0\leqslant a_i\leqslant n$. 亦即样本点的总数就是这里不同的 $(a_1,a_2,\cdots,a_N)$ 的组数, 而 A 事件就是一个样本点 $(\overbrace{1,\cdots,1}^{n\text{个}},0,\cdots,0)$. 为了计算样本点的总数, 我们设想每个质点在盒中的占位, 排成

$$|\overbrace{*,\cdots,*}^{a_1\text{个}}|\overbrace{*,\cdots,*}^{a_2\text{个}}|\cdots|$$

这里代表 N 个盒的"|"有 $N+1$ 条, 代表质点的"*"有 n 个, 第一个与最后一个必须是代表盒的"|", 不容选择. 因此不同的占位数就是在 $n+N-1$ 个位置中选出表示质点的位置数, 所以

$$P(A)=\frac{1}{\mathrm{C}_{n+N-1}^{n}}$$

(3) (Fermi-Dirac) 假设质点不可辨, 而每盒最多容纳 1 个质点. 于是任何一种占位必须占用 n 个盒子, 所以质点在盒中的占位总数为 C_N^n, 而

$$P(A)=\frac{1}{\mathrm{C}_N^n}=\frac{n!(N-n)!}{N!}$$