普通高等教育基础课规划教材

高等数学辅导与练习

李群高 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等数学辅导与练习

主　编　李群高
参　编　代西武　吕亚芹　袁晓娜
主　审　王日爽

机械工业出版社

本书是为普通工科院校高等数学课编写的教学参考书。全书共12章，包括函数、极限与连续，一元函数微积分学，空间解析几何与向量代数，多元函数微积分学，无穷级数，常微分方程等内容，每章分为内容提要、基本要求、基本题型分析、练习题、习题选编、自测题、习题解答7个部分。全书共选编1900多道题目，类型全面、覆盖面广、信息量大，能满足不同层次学生的要求。

本书也可作为夜大、职大、自考等学生的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学辅导与练习/李群高主编．—北京：机械工业出版社，2006.12（2007.11重印）

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-20465-7

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第145430号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：郑　丹　责任编辑：郑　丹　郑　玫

版式设计：霍永明　责任校对：刘志文

封面设计：刘　科　责任印制：邓　博

北京市朝阳展望印刷厂印刷

2007年11月第1版第2次印刷

169mm×239mm·12.125印张·554千字

标准书号：ISBN 978-7-111-20465-7

定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：（010）68326294

购书热线电话：（010）88379639　88379641　88379643

编辑热线电话（010）88379722

前　言

本书是根据教育部教学指导委员会制订的工科高等数学基本要求，配合《高等数学》教材，为加强学生“三基”训练而编写的一本教学参考书。

全书每章均由六部分内容组成：

1. 内容提要：编者结合多年教学经验，对本章的主要内容，按照基本概念、重要结论、方法与技巧三方面进行归纳总结，便于学生查找复习。

2. 基本要求：按照工科高等数学基本要求，给出本章教学的基本要求，使学生心中有数，目的明确。

3. 基本题型分析：总结本章的典型例题，并给出详细的分析和解答，供学生课后复习。

4. 练习题：供学生课后练习使用，题型有选择题、填空题、计算题、证明题、应用题等，并按难易程度分为 A、B、C 三档，其中 C 档题目大多是近几年的考研试题。所有题目都附有详细解答。

5. 习题选编：这部分是为教师编写的习题课用题，也可作为学生课堂练习之用。

6. 自测题：每章都编有一套基本内容占 80% 的自测题。学生可用来检测本章的学习效果，也可作为章节测验题。

最后，还按照上、下两个学期，分别编写了两套期中模拟试卷和四套期末模拟试卷，供学生考前模拟练习使用。

本书选编了 1900 多道题目，类型全面、覆盖面广、信息量大，既有基本题，又有一定难度的提高题，能满足不同层次学生的需求。

本书主要是为普通高等工科院校学生课外练习而编写的，也可作为夜大、职大、自考等学生的参考书。

本书由李群高、代西武、吕亚芹、袁晓娜共同编写。李群高任主编，负责全书的结构设计和全部稿件的统稿工作，并完成第 1 章至第 3 章以及附录的编写。袁晓娜编写第 4 章至第 6 章，吕亚芹编写第 7 章至第 9 章，代西武编写第 10 章至第 12 章。王日爽教授任本书主审，仔细审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中一定会有错误和不妥之处，恳请同行专家和热心读者批评指教，不胜感激。

编　者

目录
Contents

第 5 章 定积分

第 6 章 定积分的应用

第 7 章 空间解析几何与向量代数

第 8 章 多元函数微分法及其应用

第 9 章 重积分

第 10 章 曲线积分与曲面积分

第 11 章 无穷级数

第 12 章 微分方程

附录

第1章　函数、极限与连续

1.1　内容提要

1.1.1　函数

1. 基本概念

(1) 一元函数定义. 函数定义的两要素是定义域和对应法则，两个函数当定义域 D 与对应法则 f 完全相同时恒等.

(2) 反函数定义. 在同一坐标系下，原函数与反函数的图形关于 $y=x$ 对称.

(3) 基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数.

(4) 复合函数定义. 函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 能够复合成函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的条件是 $u=\varphi(x)$ 的值域的全部或部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域内.

(5) 初等函数是由基本初等函数经有限次四则运算、有限次复合步骤构成，且可用一个式子表示的函数.

说明：高等数学的研究对象主要是初等函数，而初等函数是由基本初等函数经四则运算和复合步骤构成的，故以后讨论问题大多是从基本初等函数出发，得到有关基本初等函数的结果，再研究四则运算和复合函数的规则，从而可得初等函数的结论.

(6) 分段函数在定义域的不同范围内，其表达式是不同的初等函数.

2. 重要结论

基本初等函数的表达式、定义域、图形及简单性质(有界性、奇偶性、单调性、周期性).

3. 方法和技巧

(1) 确定函数的定义域. 如果函数代表某个实际问题，其定义域由实际意义确定. 一般函数的定义域是使函数表达式有意义的实数集合.

(2) 确定函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(3) 分解复合函数. 分解复合函数可由外往里顺次拆开，拆开后的每个函数都是基本初等函数或是基本初等函数与常数经过四则运算构成的简单函数.

(4) 用函数表达实际问题. 这类问题一般分成三步：第一步，设未知量（自变量和因变量)；第二步，根据已知条件得到未知量之间的关系（函数表达式)；第三步，根据实际意义确定自变量变化范围（定义域).

1.1.2　极限

1. 基本概念

(1) 极限定义，包括数列极限 ($\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$) 的定义，函数极限 ($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$) 的定

义，函数极限（$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$）的定义以及函数在一点左右极限的定义.

注：$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x),f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 为左极限和右极限.

（2）无穷小和无穷大的定义. 无穷小是极限为零的函数，任何充分小的非零常数都不是无穷小，常数零的极限为零，故常数零是无穷小 . 无穷大与无穷小互为倒数关系.

（3）无穷小的比较及等价无穷小的概念.

（4）函数渐近线的定义，包括水平渐近线、铅直渐近和斜线渐近线.

2. 重要结论

（1）单调有界数列必有极限.

（2）两边夹准则.

（3）函数在一点极限存在的充分必要条件是，在这一点左右极限存在且相等. 即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 存在且相等.

（4）极限四则运算法则.

（5）无穷小与函数极限的关系为

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\alpha=0$.

（6）无穷小的性质. 有限个无穷小的和仍是无穷小，有限个无穷小的乘积仍是无穷小，有界量与无穷小的乘积仍是无穷小.

等价无穷小代换. 设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$.

（7）两个重要极限.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

$$(8)\ \lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},m=n\\0,m<n\\\infty,m>n\end{cases}\quad(a_0\neq0,b_0\neq0).$$

3. 方法与技巧

这一节主要掌握求极限的方法. 求极限的常用方法有：

（1）利用极限运算法则，包括四则运算法则和复合函数极限法则.

（2）利用连续函数的性质，包括初等函数在定义区间内连续，连续函数在一点极限值等于函数值，连续复合函数极限符号与函数符号可交换. 即

$$\lim\varphi(x)=B,f(u)\text{ 在 }u=B\text{ 连续}\Rightarrow\lim f[\varphi(x)]=f[\lim\varphi(x)]=f(B).$$

（3）利用无穷小的运算性质. 主要用到有界量与无穷小的乘积仍是无穷小，利用等价无穷小代换简化极限运算.

（4）利用两个重要极限求其他极限.

(5) 将函数恒等变形化为极限可确定的形式（如消去公因子、根式有理化、分子分母同除以 x 的最高次幂等）.

(6) 分段函数在交界点的极限可通过讨论左、右极限得到.

(7) 极限存在准则. 单调有界数列必有极限和两边夹准则.

(8) 利用洛必达法则求未定式的极限.

(9) 求幂指函数 $y = f(x)^{g(x)}$ 的极限.

如果 $\lim f(x) = A > 0, \lim g(x) = B$, 则 $\lim f(x)^{g(x)} = \lim f(x)^{\lim g(x)} = A^B$

如果 $\lim f(x)^{g(x)}$ 是未定式, 则利用 $\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$ 转化为求 $\lim g(x)\ln f(x)$.

1.1.3 连续

1. 基本概念

(1) 函数 $y = f(x)$ 在一点连续的定义（两种）.

注: $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点$\begin{cases}\text{有定义}\\ \text{极限存在}\\ \text{极限值} = \text{函数值}\end{cases}$.

(2) 函数 $y = f(x)$ 在开区间内和闭区间上连续的定义.

(3) 间断点定义及分类. 不连续的点即为间断点，间断点的分类取决于该点的极限. 左、右极限都存在，该点为第一类间断点；左、右极限有一个不存在，该点为第二类间断点.

2. 重要结论

(1) 基本初等函数在定义域内连续.

(2) 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数，连续函数的复合函数仍为连续函数.

(3) 初等函数在定义区间内连续.

(4) 闭区间上连续函数的性质，包括最大、最小值定理，零点定理和介值定理.

3. 方法与技巧

(1) 讨论函数的连续性. 由于初等函数在定义区间内连续，对于初等函数，其定义区间即为连续区间. 分段函数在交界点必须通过求左、右极限，并看左、右极限是否相等且等于函数值来判断.

(2) 求函数的间断点并分类. 初等函数考虑定义域外的孤立点，分段函数重点关注交界点.

1.2 基本要求

1. 理解函数的概念

2. 了解反函数的概念

3. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性
4. 理解复合函数的概念
5. 掌握基本初等函数的定义域、性质及图形
6. 会建立简单实际问题中的函数关系
7. 了解极限精确定义
8. 掌握极限四则运算法则
9. 了解两个极限存在准则
10. 会用两个重要极限求极限
11. 了解无穷小、无穷大，以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限
12. 理解函数在一点连续的概念
13. 了解间断点的概念，并会判别间断点的类型
14. 了解初等函数的连续性
15. 了解闭区间上连续函数的性质

说明：高等数学课程的内容按教学要求的不同，分为两个层次．对于较高要求，学生必须深入理解、牢固掌握、熟练应用，其概念、理论用“理解”一词表述，方法、运算用“掌握”一词表述；次一等的要求也是必不可少的，其概念、理论用“了解”一词表述，方法、运算用“会”或“了解”表述．

1.3 基本题型分析

例 1-1 确定函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$ 的定义域．

分析 求函数的定义域，就是找出使该表达式有意义的实数的集合．$f(x)$ 是有理函数，除了分母为零的点，其他地方都有意义．

解 由 $x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$ 得 $x=-1, x=2$，定义域为

$$(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty).$$

注：由于初等函数在定义区间内是连续的，如果要求初等函数的连续区间，只要求定义域就行了．

例 1-2 已知 $f(\ln x)=\begin{cases}x-1, & x>1\\ \ln x, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$，求 $f(x)$．

分析 由 $f[g(x)]$ 的表达式求 $f(x)$ 的一般方法是令 $u=g(x)$，从中解出 $x=g^{-1}(u)$，将它代入 $f[g(x)]$ 可得 $f(u)$．

解 令 $u=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^u$，因此

$$f(u)=\begin{cases}\mathrm{e}^u-1 & \mathrm{e}^u>1\\ u, & 0<\mathrm{e}^u\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^u-1, & u>0\\ u, & u\leqslant 0\end{cases}.$$

由此可得
$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-1, & x>0\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$$

例 1-3 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt[3]{x}-1}$.

分析 $x\to 1$ 时，$\sqrt[3]{x}-1\to 0$，$\sqrt{2x+7}-3\to 0$，$\sqrt[3]{x}-1$ 与 $\sqrt{2x+7}-3$ 中都含有零因子 $x-1$，为了去掉零因子，利用平方差公式和立方差公式.

$$(\sqrt{2x+7})^2-3^2=(\sqrt{2x+7}+3)(\sqrt{2x+7}-3),$$

$$(\sqrt[3]{x})^3-1=(\sqrt[3]{x}-1)[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1].$$

解 $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^3-1}\cdot\frac{(\sqrt{2x+7})^2-3^2}{\sqrt{2x+7}+3}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{2x+7}+3}=1.$$

例 1-4 讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 是否存在.

分析 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，$x\to 0^-$ 时，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$，$e^{\frac{1}{x}}\to 0$.
因此，本题必须通过左、右极限来说明.

解 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{y=\frac{1}{x}}\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{1+e^y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^{-y}+1}=1.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{y=\frac{1}{x}}\lim_{y\to-\infty}\frac{e^y}{1+e^y}=0.$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 不存在.

注：分段函数在两段交接点处的极限也需通过左、右极限来得到.

例 1-5 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x+1})=0$.

分析 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{x}\to+\infty$，$\sqrt{x+1}\to+\infty$，而 $\sin\sqrt{x}$ 与 $\sin\sqrt{x+1}$ 在 -1 与 1 之间振荡，利用和差化积公式

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

证 $$\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x+1}=2\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2}\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}$$

$$=2\sin\frac{-1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=0$，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{-1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}=0$. 又 $\cos\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}$ 是有界量，根据“无穷小量乘以有界量仍然是无穷小量”得

$$\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{-1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2}=0.$$

例 1-6　确定 a，b 的值，使 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+ax+b}{x+1}=3$.

分析　由 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+ax+b}{x+1}=3$ 知，当 $x\to -1$ 时，$2x^2+ax+b$ 与 $x+1$ 是同阶无穷小，故有 $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+ax+b)=0$.

解　$\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+ax+b)=2-a+b=0$,所以 $b=a-2$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+ax+b}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+ax+a-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(x-1)+a(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}[2(x-1)+a]=a-4.$$

由条件 $a-4=3$ 有，$a=7$，$b=a-2=7-2=5$.

例 1-7　设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}+a & x<1 \\ 2, & x=1 \\ b\arctan x, & x>1 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 a，b 的值.

分析　显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内连续，重点讨论在 $x=1$ 处连续，必须左、右极限相等且等于 $f(1)$.

解
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1}b\arctan x=\frac{\pi}{4}b,$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(e^{\frac{1}{x-1}}+a)=a.$$

由 $f(1)=2=\dfrac{\pi}{4}b=a$,得 $a=2,b=\dfrac{8}{\pi}$.

1.4　练习题

A

填空题

1. $f(x)=\arcsin(2x-1)$ 的定义域是__________.

2. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,3]$，则 $f(\ln x)$ 的定义域是__________.

3. 若在 x_0 的某邻域内 $f(x)>\varphi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$，则 A 与 B 的大小关系是__________.

4. 曲线 $y=\dfrac{x}{2x-1}$ 的渐近线方程是__________.

5. 曲线 $y=\ln(x+3)$ 的渐近线方程是__________.

6. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\times 10^n-3\times 10^{2n}}{3\times 10^{n-1}+2\times 10^{2n-1}}=$__________.

7. 极限 $\lim\limits_{x\to -\infty}e^x\arctan x=$__________.

8. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}=$__________.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{4x+4}$ 的值等于________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{3x}$ 的值等于________.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\arccos[\ln(1+x)]$ 的值等于________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)$ 的值等于________.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3}$ 的值等于________.

14. $f(x)=\sqrt{x}+\ln(3-x)$ 在区间________是连续的.

15. 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ 的连续区间是________.

16. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<a\\ 2a, & x=a\\ 3x-2, & x>a\end{cases}$ 在 $x=a$ 处连续，则 $a=$________.

单选题

17. $f(x)=(\sin 3x)^2$ 在定义域（$-\infty$，$+\infty$）上为（　　）.

A. 周期是 3π 的周期函数　　B. 周期是$\frac{\pi}{3}$的周期函数

C. 周期是$\frac{2}{3}\pi$的周期函数　　D. 不是周期函数

18. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3, & -3\leqslant x\leqslant 0\\ -x^3, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$，则此函数是（　　）.

A. 有界函数　　B. 奇函数

C. 偶函数　　D. 周期函数

19. $f(x)=(e^x+e^{-x})\sin x$ 在其定义域（$-\infty$，$+\infty$）上是（　　）.

A. 有界函数　　B. 周期函数

C. 偶函数　　D. 奇函数

20. 设 $f(x)=\begin{cases}-\sin^3 x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \sin^3 x, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$ 则此函数是（　　）.

A. 周期函数　　B. 单调增函数

C. 奇函数　　D. 偶函数

21. “数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在”是“数列 $\{x_n\}$ 有界”的（　　）.

A. 充分必要条件　　B. 充分但非必要条件

C. 必要但非充分条件　　D. 既非充分条件，也非必要条件

22. 当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，则下列结论正确的是（　　）.

A. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必无极限

B. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必有极限

C. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 可能有极限，也可能无极限

D. 当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)g(x)$ 有极限则极限必为零

23. "当 $x \to x_0$ 时，$f(x)-A$ 是无穷小" 是 "$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$" 的（　　）.

A. 充分但非必要条件　　B. 必要但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件，也非必要条件

24. 当 $x \to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的（　　）.

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小，但不是等价无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

25. 当 $x \to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的（　　）.

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小，但不是等价无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

26. "当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 是无穷小" 是 "当 $x \to x_0$ 时，$|\alpha(x)|$ 是无穷小" 的（　　）.

A. 充分但非必要条件　　B. 必要但非充分条件

C. 既非充分条件，也非必要条件　　D. 充分必要条件

27. 无穷小量就是（　　）.

A. 比任何数都小的量　　B. 零

C. 以零为极限的函数　　D. 以上三种情况都不是

28. 极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$ 的值是（　　）.

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. 不存在

29. 极限 $\lim\limits_{x \to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sin x\right)$ 的结果是（　　）.

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 不存在

30. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ x+1, & x \geqslant 1 \end{cases}$，则函数 $f(x)$ 当 $x \to 1$ 时的极限值是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. 不存在

31. 设曲线方程为 $y=\dfrac{\sin x}{x}+\arctan(1-\sqrt{x})$，则（　　）.

A. 曲线没有渐近线　　B. $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线的渐近线

C. $x=0$ 是曲线的渐近线　　D. $y=\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线的渐近线

32. 设 $f(x)=x\cos\dfrac{2}{x}+x^2$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

33. $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

A. 连续点　　　　B. 可去间断点
C. 跳跃间断点　　D. 振荡间断点

34. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x+x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ x^2+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点
C. 振荡间断点　　D. 连续点

计算题

35. 设 $f(x)=\sqrt{3-x}$，求 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$ 及其定义域.

36. 设 $f(x)=\arcsin x, \varphi(x)=\ln x$，求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域.

37. 求 $f(x)=\sin x\sin 3x$ 的最小正周期.

38. 设 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x+2)$.

39. 一列火车每小时的运行费用由两部分组成，一部分是固定费用 a，另一部分费用与火车的平均速度 x 的立方成正比（比例系数 k），用 y 表示一列火车连续运行路程 s 所需的总费用，试将 y 表示为 x 的函数.

40. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+6}{(n+3)^3}$ 的值.

41. 计算 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$ 的值.

42. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1}$.

43. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan mx}{\sin nx}$，其中 m，n 为非零常数.

44. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$ 的值.

45. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{2\cdot n}$.

46. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{x}$.

47. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, & -\infty<x<-1\\ b, & x=-1\\ a+\arccos x, & -1<x\leqslant 1\end{cases}$，试确定 a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

48. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a+b\cos 10x}{e^{x^2}-1}, & x\neq 0\\ 50, & x=0\end{cases}$，试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

B

填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(\cos^2x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin 2x}+(1+x)^x\right]=$ ________.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}=$ ________.

3. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，无穷小 $f(x)+g(x)$ 与无穷小 $g(x)$ 的关系是________.

4. 若 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^a\cos\dfrac{1}{x-1}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 a 的值为________.

5. 若 $f(x)=\dfrac{e^{x-1}-a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，则 $a=$ ________.

6. 设 $f(x)$ 处处连续，且 $f(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}f\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right]$ 等于________.

单选题

7. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,\ b]$ 上的单调增函数，$x_0\in(a,b)$，则（　　）.

A. $f(x-0)$ 存在，但 $f(x+0)$ 不一定存在

B. $f(x+0)$ 存在，但 $f(x-0)$ 不一定存在

C. $f(x-0)$、$f(x+0)$ 都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不一定存在

D. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在

8. 若当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$ 都是无穷小（$\beta\neq0$），则 $x\to x_0$ 时，下列表示式中不一定是无穷小的是（　　）.

A. $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$　　B. $\alpha^2(x)+\beta^2(x)$

C. $\ln[1+\alpha(x)\beta(x)]$　　D. $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

9. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}]$ 的结果是（　　）.

A. 无穷大　　B. 0

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. 不存在，也不是无穷大

10. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+e^x}$ 的结果是（　　）.

A. 0　　B. 1

C. 不存在，但不是∞　　D. ∞

11. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ 的结果是（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. ∞　　D. 不存在

12. 设 $f(x)=x^2+\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x-1}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点