PINGMIAN JIHE SHITI QUANSHI

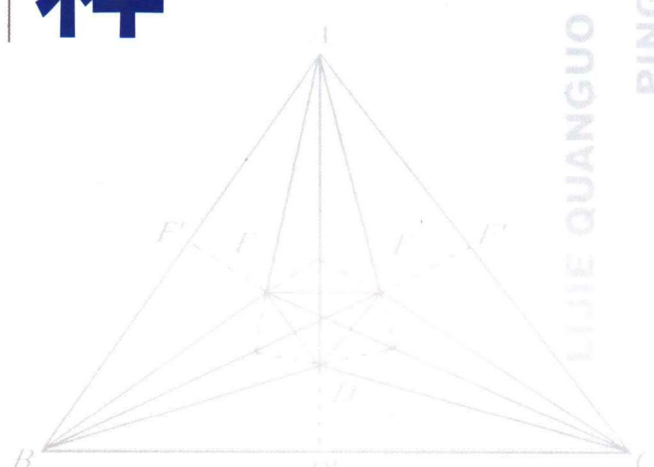
走向国际数学奥林匹克的
平面几何试题诠释

历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解 上

主编 沈文选

$$S_{\triangle z_1z_2z_3}=\frac{1}{2}\mid z_2-z_1\mid\cdot d=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)=\frac{\mathrm{i}}{4}\begin{vmatrix}1&1&1\\ z_1&z_2&z_3\\ \overline{z_1}&\overline{z_2}&\overline{z_3}\end{vmatrix}$$

LIJIE QUANGUO GAOZHONG SHUXUE LIANSAI PINGMIAN JIHE SHITI YITIDUOJIE



哈爾濱工業大學出版社

走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释

历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解

（上）

主　编　沈文选

副主编　杨清桃　步凡　昊凡

哈爾濱工業大學出版社

ZOUXIANG GUOJI SHUXUE AOLINPIKE DE PINGMIAN JIHE SHITI QUANSHI

LIJIE QUANGUO GAOZHONG SHUXUE LIANSAI PINGMIAN JIHE SHITI YITIDUOJIE

内容提要

全书对1978~2006年间的全国高中数学联赛(包括全国女子竞赛、西部竞赛、东南竞赛、北方竞赛)、中国数学奥林匹克(CMO,即全国中学生数学冬令营)、中国国家队队员选拔赛中的一百余道平面几何试题进行了诠释,每道试题给出了尽可能多的解法(多的近30种解法)及命题背景,以70个专题讲座的形式对试题所涉及的有关知识或相关背景进行了深入地探讨,揭示了平面几何试题的有关命题途径。该书极大地拓展了读者的视野,可全方位地开启读者的思维,扎实地训练其基本功。该书适合于广大数学爱好者,初、高中数学竞赛选手,初、高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用,也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的"竞赛数学"课座教材及国家级、省级骨干教师培训班参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释.上:历届全国高中数学联赛平面几何试题一题多解/沈文选主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5603-2441-8

Ⅰ.走… Ⅱ.沈… Ⅲ.平面几何-高中-解题

Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第147212号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　李广鑫　唐　蕾
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　总印张55　总字数955千字
版　　次　2007年1月第1版　2007年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2441-8
印　　数　1~4000册
定　　价　68.00元

前　言

在国际数学奥林匹克(IMO)中,中国学生的突出成绩已得到举世公认。这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是龙的传人潜质的反映,它实现民族振兴的希望,它折射国家富强的未来。

回顾我国的数学奥林匹克的发展过程,可以说是一个由小到大的发展过程,是一个由单一到全面的发展过程。在开始举办数学奥林匹克活动时,只限于少数的几个城市内的单独行动,而今天举办的数学奥林匹克活动,几乎遍及了全国各省、区、市,这是一种规模最大,种类与层次最多的学科竞赛活动,有各省、市的初、高中竞赛,有全国的初、高中联赛,还有全国女子竞赛、西部竞赛、东南竞赛、北方竞赛、“希望杯”邀请赛以及中国数学奥林匹克、国家队选拔赛,等等(本书中的全国高中联赛题、中国数学奥林匹克题、国家队选拔赛题分别用 A、B、C 表示)。

数学奥林匹克活动的中心环节是试题的命制,而平面几何能够提供各种层次、各种难度的试题,是数学奥林匹克的一个方便而丰富的题源,因而在各种类别、层次的数学奥林匹克活动中,平面几何试题始终占据着重要地位,随着活动级别的升高,平面几何试题分量也随之加重,甚至占到总题量的三分之一。因此,诠释走向 IMO 的平面几何试题,也是数学奥林匹克理论深入研究的一个重要方面。

诠释这些平面几何试题,可以使我们更清楚地看到平面几何试题具有重要的检测作用与开发价值:

它可以检测应试者所形成的科学世界观和理性精神(平面几何知识是人们认识自然、认识现实世界的中介与工具,这种知识对于人的认识形成有较强的功用,是一种高级的认识与方法论系统)的某些侧面。

它可以检测应试者所具有的思维习惯(平面几何材料具有深刻的逻辑结构、丰富的直观背景和鲜明的认知层次,处理时思维习惯的优劣对效果产生较大影响)。

它可以检测应试者的演绎推理和逻辑思维能力(平面几何内容的直观性、难度的层次性、真假的实验性、推理过程的可预见性,成为训练逻辑思维和演绎推理的理想材料)的某些侧面。

试题内容的挑战性具有开发价值。平面几何是一种理解、描述和联系现实空间的工具(几何图形保持着与现实空间的直接的丰富联系;几何直觉在数学活动中常常起着关键的作用;几何活动常常包含创造活动的各个方面,从构造猜想、表示假设、探寻证明、发现特例和反例到最后形成理论等,这些在各种水平的几何活动中都得到反映)。

试题内容对进行创新教育具有开发价值。平面几何能为各种水平的创造活动提供丰富的素材(几何题的综合性便于学生在学习时能够借助于观察、实验、类比、直觉和推理等多种手段;几何题的层次性使得不同能力水平的学生都能从中得到益处;几何题的启发性可以使学生建立广泛的联系,并把它应用于更广的领域)。

试题内容对开展数学应用与建模教育具有开发价值。平面几何建立了简单直观、能被青少年所接受的数学模型,并教会他们用这样的数学模型去思考、探索、应用。点、线、面、三角形、四边形和圆——这是一些多么简单又多么自然的数学模型,却能让青少年沉醉在数学思维的天地里乐而忘返,很难想象有什么别的模型能够这样简单同时又这样有成效。平面几何又可作为多种抽象数学结构的模型(许多重要的数学理论都可以通过几何的途径以自然的方式组织起来,或者从几何模型中抽象出来)。

诠释这些平面几何试题,可以使我们更理性地领悟到:几何概念为抽象的科学思维提供直观的模型,几何方法在所有的领域都有广泛的应用,几何直觉是“数学地”理解高科技和解决问题的工具,几何的公理系统是组织科学体系的典范,几何思维习惯则能使一个人终身受益。

诠释这些平面几何试题,可以使我们更深刻地认识到:奥林匹克数学的综

合基础性、实验发展性、创造问题性、艺趣挑战性等体系特征。

许多试题有着深刻的高等几何(如仿射几何、射影几何、几何变换等)和组合几何背景,它是高等数学思想与中学数学的精妙技巧相结合的基础性综合数学问题;试题中所涵盖的许多新思想、新方法,不断地影响着中学数学,从而促进中学数学课程的改革,为中学数学知识的更新架设了桥梁,为现代数学知识的传播和普及提供了科学的测度;许多试题既包含了传统数学的精华,又体现出很大的开放性、发展性、挑战性。

诠释这些平面几何试题,作者作为一种尝试,首先给出试题的尽可能多的解法,然后从试题所涉及的有关知识,或者有关背景进行深入地探讨,企图扩大读者的视野,开启思维,训练基本功。作者为图"文无遗珠"的效果,大量参考了多家书刊杂志中发表的解法与探讨,并在书中加以注明,在此向他们表示谢意。

在本书的撰写过程中,得到了周宇、羊明亮、肖登鹏、吴仁芳、彭熹、汤芳、张丹、陈丽芳、梁红梅、唐祥德、刘洁、陈明、刘文芳等的帮助,他们帮助收集资料、抄录稿件、校对清样,付出了辛勤的汗水,在此也表示感谢。

限于作者的水平,书中的疏漏之处在所难免,敬请读者批评指正。

沈文选

2006年10月于长沙

目　录

第 1 章　1978 年试题的诠释

这一年全国高中数学联赛第二试的平面几何试题共有 3 道，即第 1、4、6 题.

试题 A1　四边形两组对边延长后分别相交，且交点的连线与四边形的一条对角线平行. 证明：另一条对角线的延长线平分对边交点连成的线段.

如图 1.1，四边形 $ABCD$ 的两组对边延长后分别交于点 E、F，$EF // BD$，直线 AC 与 EF 交于点 G.

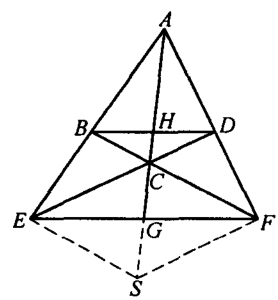


图 1.1

证法 1　过 E 作 $ES // BF$ 交 AC 的延长线于点 S，则 $\frac{AC}{AS}=\frac{AB}{AE}$，又因 $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AF}$，有 $\frac{AC}{AS}=\frac{AD}{AF}$.

联结 SF，则 $ED // SF$. 从而，$CESF$ 是平行四边形. 故 $EG=GF$.

证法 2　设 AC 与 BD 交于点 H，由题设，有

$$\frac{DH}{FG}=\frac{AH}{AG}=\frac{HB}{GE},\quad \frac{DH}{GE}=\frac{HC}{CG}=\frac{HB}{FG}$$

亦即

$$\frac{DH}{FG}=\frac{HB}{GE},\quad \frac{DH}{GE}=\frac{HB}{FG}$$

上述两式相除得

$$\frac{GE}{FG}=\frac{FG}{GE}$$

即知

$$EG=GF$$

证法 3　对 $\triangle AEF$ 及点 C 应用塞瓦定理，有

$$\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EG}{GF}\cdot\frac{FD}{DA}=1 \qquad (*)$$

又由 $BD // EF$，有 $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{DF}$，即 $\frac{AB}{BE}\cdot\frac{FD}{DA}=1$，从而由式（*），有 $\frac{EG}{GF}=1$，故 $EG=GF$.

证法 4 如图 1.1,设$\angle AED=\alpha$,$\angle DEF=\beta$.

以 E 为视点,分别对 B、C、F,A、D、F 及 A、C、G 应用张角公式,得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EC}=\frac{\sin\alpha}{EF}+\frac{\sin\beta}{EB} \quad ①$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ED}=\frac{\sin\alpha}{EF}+\frac{\sin\beta}{EA} \quad ②$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EC}=\frac{\sin\alpha}{EG}+\frac{\sin\beta}{EA} \quad ③$$

因 $BD /\!/ EF$,则知$\angle BDE=\beta$.

在$\triangle BED$ 中,由正弦定理,得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{ED}=\frac{\sin\beta}{EB} \quad ④$$

由①+②-③-④,得

$$\frac{2\sin\alpha}{EF}=\frac{\sin\alpha}{EG}$$

从而 $EF=2EG$,故 $EG=GF$.

注 (1)由此题可得梯形的一条性质:对于梯形两腰延长线的交点、两条对角线的交点、上底与下底的中点这四点,若一条直线过其中两点,则也必过其余两点,或者说这四点在一条直线上.

(2)此题包含了射影几何中的一个基本定理,也包含仿射几何的一个基本原理,可参见图 1.23.

试题 A2 设 $ABCD$ 为任意给定的四边形,边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 E、F、G、H.证明:$S_{ABCD}\leqslant EG\cdot HF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot\frac{1}{2}(AD+BC)$.

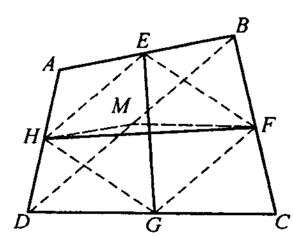


图 1.2

证法 1 如图 1.2,联结 HE、DB、GF、EF、HG,则 $HE /\!/ DB /\!/ GF$,同理 $EF /\!/ HG$,故 $EFGH$ 为平行四边形.易证 $S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$,由于 $EFGH$ 为平行四边形,$S_{EFGH}\leqslant\frac{1}{2}EG\cdot HF$,从而 $S_{ABCD}\leqslant EG\cdot HF$.

设 M 为 BD 的中点,显然有

$$\frac{1}{2}(AB+CD)=HM+MF\geqslant HF$$

同理 $$\frac{1}{2}(AD+BC)\geqslant EG$$

从而 $$EG\cdot HF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot\frac{1}{2}(AD+BC)$$

故结论获证.

证法 2　如图 1.3(a),将四边形 $ABCD$ 分成四块,重新拼成图 1.3(b)中的平行四边形.易知其面积小于等于两边乘积,其两边分别是原四边形的两条对边中点的连线,这就证明了第一个不等式.

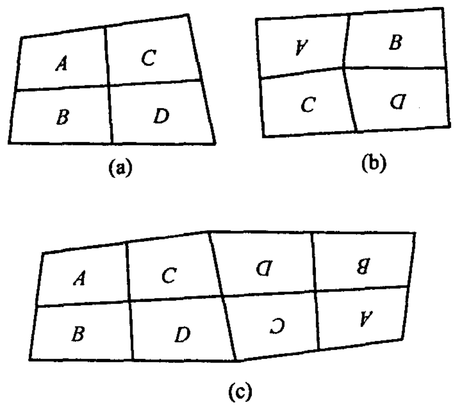


图 1.3

再将原四边形扩充一倍,拼成图 1.3(c)形状,易知结论获证.

注　关于此试题的背景如下.

(1)从数学的角度看.1953 年第 16 届莫斯科数学竞赛中有这样一道试题,设四边形四边的长分别为 a、b、c、d,面积为 S,求证:$S\leqslant\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.将此不等式隔离,便得到如上试题 A2.

(2)从实际问题的角度看.华罗庚教授指出①,是一个量地问题,一块四边形的土地要丈量它的面积.解放前,北方地主是用两组对边中点连线长度的乘积作为面积,而南方地主是用两组对边边长平均值的乘积作为面积.这两种量法都把土地面积量大了,农民就得多交租.实际上,四边形真正的面积小于等于两组对边中点连线长度的乘积小于等于两组对边边长平均值的乘积.

① 华罗庚.全国中学数学竞赛题解[M].北京:科学普及出版社,1978:1-2.

试题 A3 设有一边长为 1 的正方形,试在这个正方形的内接正三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的,并求出这两个三角形面积(要证明你的论断).

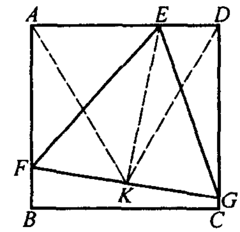


图 1.4

解 假设$\triangle EFG$为正方形 $ABCD$ 的任一内接正三角形,如图 1.4 所示,由于正三角形的三个顶点必落在正方形的三边上,所以不妨设其中的 F、G 是在正方形的一组对边上.

作$\triangle EFG$ 的边 FG 上的高 EK,则 E、K、G、D 四点共圆.联结 KD,则知$\angle KDE=\angle EGK=60^\circ$.

同理,联结 AK,由 E、K、F、A 四点共圆,则有$\angle KAE=\angle EFK=60^\circ$,所以,$\triangle KDA$ 为正三角形,而 K 是它的一个顶点.

由此可知,内接正$\triangle EFG$ 的边 FG 的中点必是不动点 K.

又正三角形的面积由边长决定,当 $KF\perp AB$ 时,边长为 1,这时边长最小,

而面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$也最小;当 KF 通过点 B(或 C)时,边长为 $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$,这时边长最大,面积 $S=2\sqrt{3}-3$ 也最大.

第 1 节 与三角形有关的十个基本定理

1. 与三角形三边所在直线上的三点有关的两个定理

定理 1 设 A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线(包括三边的延长线)上的点,则 A'、B'、C'三点共线的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1 \quad ①$$

证明 必要性:如图 1.5,过 A 作直线 $AD /\!/ C'A'$ 交 BC 的延长线于 D,则

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{CA'}{A'D},\quad \frac{AC'}{C'B}=\frac{DA'}{A'B}$$

故
$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CA'}{A'D}\cdot\frac{DA'}{A'B}=1$$

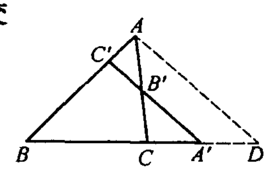


图 1.5

充分性:设直线 $A'B'$ 交 AB 于 C_1,则由必要性得到

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

又由题设有$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$，于是

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$$

由合比定理，得
$$\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB'}$$

从而 C_1 与 C' 重合，故 A'、B'、C' 三点共线.

注　(1)上述定理中，若采用有向线段，则式①右边为 -1.

(2)定理中的必要性即为梅涅劳斯定理，充分性即为梅涅劳斯定理的逆定理.

定理 1 的角元形式　设 A'、B'、C' 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的点，则 A'、B'、C' 三点共线的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1 \qquad ①'$$

事实上，注意到
$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{AB\sin\angle BAA'}{AC\sin\angle A'AC}$$

等三式及式①即可得式①′.

定理 2　设 A'、B'、C' 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的点(即三点中或三点或一点在边上)，则三直线 AA'、BB'、CC' 共点或平行的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1 \qquad ②$$

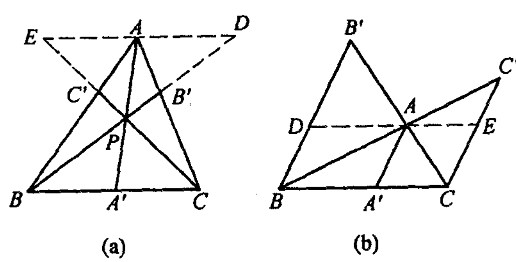


图 1.6

证明　必要性：若 AA'、BB'、CC' 交于一点 P，则过 A 作 BC 的平行线分别

交 BB'、CC' 的延长线于 D、E，如图 1.6(a)所示，得

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AD},\frac{AC'}{C'B}=\frac{EA}{BC}$$

又由
$$\frac{BA'}{AD}=\frac{A'P}{PA}=\frac{A'C}{EA}$$

有
$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{AD}{EA}$$

从而
$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{AD}{EA}\cdot\frac{BC}{AD}\cdot\frac{EA}{BC}=1$$

若 AA'、BB'、CC' 三线平行，如图 1.6(b)所示，可类似证明(略).

充分性：若 AA' 与 BB' 交于点 P，设 CP 与 AB 的交点为 C_1，则由必要性知

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

而题设有
$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

由此有
$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$$

即 C_1 与 C' 重合，从而 AA'、BB'、CC' 三线共点.

若 $AA'/\!/BB'$，则$\frac{CB'}{B'A}=\frac{CB}{BA}$，代入已知条件$\frac{AC'}{C'B}=\frac{A'C}{CB}$. 由此知 $CC'/\!/AA'$，故 $AA'/\!/BB'/\!/CC'$.

注 (1)上述定理中，若采用有向线段，则式②右边仍为 1.

(2)定理中的必要性即为塞瓦定理，充分性即为塞瓦定理的逆定理，其中的交点 P 有时也称为塞瓦点.

定理 2 的角元形式 设 A'、B'、C' 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 所在直线上的点，则 AA'、BB'、CC' 共点或平行的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1 \qquad ②'$$

其证明与式①′完全相同.

推论 设 A_1、B_1、C_1 分别是$\triangle ABC$ 的外接圆三段弧$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$上的点，AA_1、BB_1、CC_1 共点的充要条件是

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1 \qquad ②''$$

事实上，可设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，AA_1 交 BC 于 A'，则

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{2R\cdot\sin\angle BAA_1}{2R\cdot\sin\angle A_1AC}=\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}$$

同理还有两式，再应用式②′，即证得式②″.

2. 与三角形一顶点引出的射线上的点有关的两个定理

定理 3　设点 P 为从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引出的一条射线 AP 上的点，线段 BP、PC 对点 A 的张角分别为 α、β，且 $\alpha+\beta<180°$，则 B、P、C 共线的充要条件是

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB} \qquad ③$$

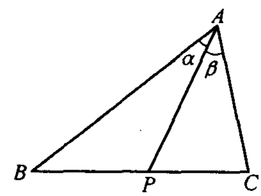


图 1.7

证明　如图 1.7，有

B、P、C 三点共线 $\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APC}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin(\alpha+\beta)=$$

$$\frac{1}{2}AB\cdot AP\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\beta\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}$$

注　定理 3 的必要性即为张角定理，充分性即为张角定理的逆定理，点 A 常称为视点.

定理 4　设点 P 为从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引出的一条射线 AP 上的点，则 B、P、C 共线的充要条件是

$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BP\cdot PC \qquad ④$$

证明　如图 1.8，设 $\angle APB=\theta_1$，$\angle APC=\theta_2$，不失一般性，设 $\theta_2<90°$.

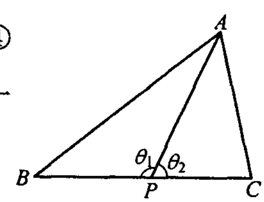


图 1.8

对于 $\triangle ABP$ 和 $\triangle APC$ 分别应用余弦定理，有

$$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cdot\cos\theta_1$$

$$AC^2=AP^2+CP^2-2AP\cdot CP\cdot\cos\theta_2$$

将上述两式分别乘以 PC、PB 后相加，得

$$AB^2\cdot CP+AC^2\cdot BP=AP^2(BP+CP)+BP\cdot CP(BP+CP)-2AP\cdot BP\cdot CP(\cos\theta_1+\cos\theta_2) \qquad (*)$$

于是　　B、P、C 共线 $\Leftrightarrow$ 式 $(*)$ 右边 $=AP^2\cdot BC+BP\cdot CP\cdot BC\Leftrightarrow$

$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BP\cdot PC$$

注 (1)定理4的必要性即为斯特瓦尔特定理,充分性即为斯特瓦尔特定理的逆定理.

(2)若点 P 在 BC 的延长线上,则

$$AP^2=-AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}+BP\cdot PC$$

若点 P 在 BC 的反向延长线上时,则

$$AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}-AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BP\cdot PC$$

推论 (1)若 $AB=AC$,则 $AP^2=AB^2-BP\cdot PC$.

(2)若 P 为 BC 中点,则 $AP^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2$.

(3)若 AP 平分$\angle BAC$,则 $AP^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC$.

(4)若 AP 平分$\angle BAC$ 的外角,则 $AP^2=BP\cdot PC-AB\cdot AC$.

3.与三角形形外一点有关的两个定理

定理5 从$\triangle ABC$ 形外一点 D 与三顶点连线,则点 D 在$\triangle ABC$ 外接圆上的充要条件是

$$AB\cdot DC+AC\cdot BD=BC\cdot AD \qquad ⑤$$

证明 必要性:如图1.9,D 在$\triangle ABC$ 的外接圆上,在 BC 上取点 P,使

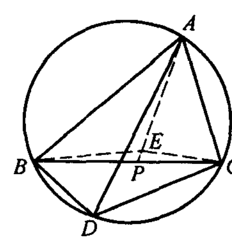


图1.9

$$\angle PAB=\angle CAD$$

则 $$\triangle ABP\backsim\triangle ADC$$

于是 $$AB\cdot CD=AD\cdot BP$$

又 $$\triangle ABD\backsim\triangle APC$$

有 $$BD\cdot AC=AD\cdot PC$$

故 $$AB\cdot DC+AC\cdot BD=AD(BP+PC)=AD\cdot BC$$

充分性:在凸四边形 $ABCD$ 内取点 E,使

$$\angle BAE=\angle CAD,\angle ABE=\angle ADC$$

则 $$\triangle ABE\backsim\triangle ADC$$

即 $$AB\cdot DC=AD\cdot BE$$

又注意到$\angle CAE=\angle DAB$ 及上述比例式,有$\triangle ACE\backsim\triangle ADB$,亦有

$$AC\cdot BD=AD\cdot EC$$

从而 $$AB\cdot DC+AC\cdot BD=AD(BE+EC)\geqslant AD\cdot BC$$