普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第六版　上册

同济大学数学系　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学

第六版　上册

同济大学数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是同济大学数学系编《高等数学》的第六版，依据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，为高等院校工科类各专业学生修订而成。

本次修订时对教材的深广度进行了适度的调整，使学习本课程的学生都能达到合格的要求，并设置部分带 * 号的内容以适应分层次教学的需要；吸收国内外优秀教材的优点对习题的类型和数量进行了调整和充实，以帮助学生提高数学素养、培养创新意识、掌握运用数学工具去解决实际问题的能力；对书中内容进一步锤炼和调整，将微分方程作为一元函数微积分的应用移到上册，更有利于学生的学习与掌握。

本书分上、下两册出版，上册包括函数与极限、导数与偏分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容，书末还附有二、三阶行列式简介、几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册／同济大学数学系编．—6版．—北京：高等教育出版社，2007.4

ISBN 978-7-04-020549-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.同…　Ⅲ.高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 013869 号

策划编辑　王　强　**责任编辑**　蒋　青　**封面设计**　王凌波　**责任绘图**　郝　林
版式设计　余　杨　**责任校对**　刘　莉　**责任印制**　宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
		版　　次	1978 年 3 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2007 年 4 月第 6 版
印　　张	26.5	**印　　次**	2007 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	490 000	**定　　价**	27.60 元

物料号　20549-00

第六版前言

本书第六版是在第五版的基础上，遵循以下几条原则进行修订的。

1. 按照精品课程教材的要求，在保持本书第五版优点、特色的前提下，继续坚持改革，反复锤炼，努力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果和最高水平，体现创新教学理念，有利于激发学生自主学习，有利于提高学生的综合素质和创新能力。

2. 教材的定位进行适当调整，使得修订后教材深广度的高限与第五版的要求基本保持不变，而低限完全符合非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的新的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，以适合当前我国各类高校工科类专业本科教学根据不同的教学要求实施分层次教学的需要。为此，在修订版中，对于超过新的教学基本要求的内容，涉及一节、一目或有标题的内容均采用 * 号标出，其余的情形则采用异体字排印，有关习题也采用以 * 号标出；对于新的教学基本要求中的个别内容，如涉及向量分析的内容，本书第五版中体现不够，在修订时给予适当的补充；对于新的教学基本要求中指明的为某些相关专业选用的基本内容，也以 * 号标出。

3. 教材的习题配置是教材的重要组成部分，是高等数学课程教学中实现教学要求，提高教学质量的重要环节。修订时努力吸收国内外一些优秀微积分教材在习题配置方面的优点，对本书第五版中的习题做较多的调整，包括增加概念复习题、图形题、应用题、综合题等，习题的总量也适当增加。

4. 根据本书第五版出版以来广大同行和读者在教学实践中的意见和建议，进行局部修订，包括本书上、下册内容的适当调整。修订时，将"微分方程"一章内容移至上册作为第七章，"空间解析几何与向量代数"一章内容移至下册作为第八章。

本版修订工作仍由邱伯驺、骆承钦完成。新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者继续给予批评指正。

编　者

二〇〇六年七月

目　　录

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法.本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

第一节　映射与函数

一、集合

1. 集合概念

集合是数学中的一个基本概念，我们先通过例子来说明这个概念.例如，一个书柜中的书构成一个集合，一间教室里的学生构成一个集合，全体实数构成一个集合等等.一般的，所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$.一个集合，若它只含有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有以下两种：一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示.例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

另一种是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，集合 B 是方程 $x^2-1=0$ 的解集，就可表示成

$$B=\{x\mid x^2-1=0\}.$$

对于数集，有时我们在表示数集的字母的右上角标上“ * ”来表示该数集内排除 0 的集，标上“ + ”来表示该数集内排除 0 与负数的集.

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 **N**，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^*$ 为排除数 0 的实数集,$\mathbf{R}^+$ 为全体正实数的集.

设 A、B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$ (读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$ (读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$. 例如,设

$$A=\{1,2\},\qquad B=\{x\mid x^2-3x+2=0\},$$

则 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$. 例如,$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x^2+1=0\}$$

是空集,因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\varnothing$,且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subset A$.

2. 集合的运算

集合的基本运算有以下几种:并、交、差.

设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记作 $A\setminus B$,即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

有时,我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时,我们称集合 I 为全集或基本集,称 $I\setminus A$ 为 A 的余集或补集,记作 A^C. 例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$的余集就是

$$A^C=\{x\mid x\leqslant 0 \text{ 或 } x>1\}.$$

集合的并、交、余运算满足下列法则.

设 A、B、C 为任意三个集合,则有下列法则成立:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

以上这些法则都可根据集合相等的定义验证.现就对偶律的第一个等式:"两个集合的并集的余集等于它们的余集的交集"证明如下:因为

$x\in(A\cup B)^C\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Rightarrow x\in A^C$ 且 $x\in B^C$ $\Rightarrow x\in A^C\cap B^C$,

所以　$(A\cup B)^C\subset A^C\cap B^C$;

反之,因为

$x\in A^C\cap B^C\Rightarrow x\in A^C$ 且 $x\in B^C\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B$ $\Rightarrow x\in(A\cup B)^C$,

所以　$A^C\cap B^C\subset(A\cup B)^C$.

于是　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

注　以上证明中,符号"$\Rightarrow$"表示"推出"(或"蕴含").如果在证明的第一段中,将符号"$\Rightarrow$"改用符号"$\Leftrightarrow$"(表示"等价"),则证明的第二段可省略.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿(Descartes)乘积.设 A、B 是任意两个集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,组成一个有序对 (x,y),把这样的有序对作为新的元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

3. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$.数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点,这里 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$
称为闭区间,记作$[a,b]$,即
$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$
a 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点,这里 $a \in [a,b]$,$b \in [a,b]$.

类似地可说明:
$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\},$$
$$(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}.$$
$[a,b)$和$(a,b]$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间.数 $b-a$ 称为这些区间的长度.从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段.闭区间$[a,b]$与开区间(a,b)在数轴上表示出来,分别如图 1-1(a)与(b)所示.此外还有所谓无限区间.引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间,例如
$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x < b\}.$$
这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c),(d)所示.

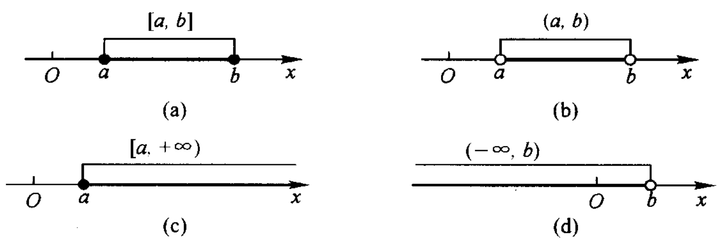

图 1-1

全体实数的集合 **R** 也可记作$(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为“区间”,且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念.以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数,则开区间$(a-\delta,a+\delta)$就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即
$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$
点 a 称为这邻域的中心,δ 称为这邻域的半径(图 1-2).

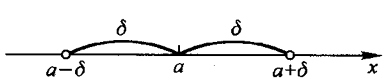

图 1-2

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示：与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域.例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b],y\in[c,d]\},$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$.

二、映射

1. 映射概念

定义　设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f:X\to Y,$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x\in X\}.$$

从上述映射的定义中，需要注意的是：

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

(2) 对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像

不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f = Y$.

例 1 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，$f(x) = x^2$. 显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$，值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 $y = 0$ 外，它的原像不是唯一的. 如 $y = 4$ 的原像就有 $x = 2$ 和 $x = -2$ 两个.

例 2 设 $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$，$Y = \{(x, 0) \mid |x| \leqslant 1\}$，$f: X \to Y$，对每个 $(x, y) \in X$，有唯一确定的 $(x, 0) \in Y$ 与之对应. 显然 f 是一个映射，f 的定义域 $D_f = X$，值域 $R_f = Y$. 在几何上，这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间 $[-1, 1]$ 上.

例 3 设 $f: \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$，对每个 $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，$f(x) = \sin x$. 这 f 是一个映射，其定义域 $D_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，值域 $R_f = [-1, 1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f = Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（或双射）.

上面例 1 中的映射，既非单射，又非满射；例 2 中的映射不是单射，是满射；例 3 中的映射，既是单射，又是满射，因此是一一映射.

映射又称为算子. 根据集合 X、Y 的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称. 例如，从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函，从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换，从实数集（或其子集）X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$，适合 $f(x) = y$. 于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g: R_f \to X,$$

对每个 $y \in R_f$，规定 $g(y) = x$，这 x 满足 $f(x) = y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$，值域 $R_{f^{-1}} = X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射. 所以，在例 1,2,3 中，只有例 3 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1],$$

其定义域 $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$，值域 $R_{f^{-1}} = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

设有两个映射

$$g: X \to Y_1, \qquad f: Y_2 \to Z,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则,它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$. 显然,这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射,这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射,记作 $f \circ g$,即

$$f \circ g: X \to Z,$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in X.$$

由复合映射的定义可知,映射 g 和 f 构成复合映射的条件是:g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内,即 $R_g \subset D_f$. 否则,不能构成复合映射. 由此可以知道,映射 g 和 f 的复合是有顺序的,$f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义,复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

例 4 设有映射 $g: \mathbf{R} \to [-1,1]$,对每个 $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \sin x$,映射 $f: [-1,1] \to [0,1]$,对每个 $u \in [-1,1]$, $f(u) = \sqrt{1-u^2}$. 则映射 g 和 f 构成的复合映射 $f \circ g: \mathbf{R} \to [0,1]$,对每个 $x \in \mathbf{R}$,有

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|.$$

三、函数

1. 函数概念

定义 **设数集 $D \subset \mathbf{R}$,则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为**

$$y = f(x), \ x \in D,$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f = D$.

函数定义中,对每个 $x \in D$,按对应法则 f,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系,通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

需要指出,按照上述定义,记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的:前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便,习惯上常用记号"$f(x), x \in D$"或"$y = f(x), x \in D$"来表示定义在 D 上的函数,这时应理解为由它所确定的函数 f.

表示函数的记号是可以任意选取的,除了常用的 f 外,还可用其他的英文字母或希腊字母,如"g"、"F"、"φ"等. 相应的,函数可记作 $y = g(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数,即把函数记作 $y =$

$y(x)$. 但在同一个问题中，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，需用不同的记号来表示它们.

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 **R** 内，因此构成函数的要素是：定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 $t=0$，落地的时刻 $t=T$，则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ t\in[0,T].$$

这个函数的定义域就是区间 $[0,T]$；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用“$y=f(x)$”表达，而不必再表出 D_f. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，那么对于这样的对应法则并不符合函数的定义，习惯上我们称这种法则确定了一个多值函数. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-r,r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$ 可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值. 所以这方程确定了一个多值函数. 对于多值函数，如果我们附加一些条件，使得在附加条件之下，按照这个法则，对每个 $x\in D$，总有唯一确定的实数值 y 与之对应，那么这就确定了一个函数. 我们称这样得到的函数为多值函数的单值分支. 例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加“$y\geqslant0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\geqslant0$”作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加“$y\leqslant0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\leqslant0$”作为对应法则，就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法（公式法），这在中学里大家已经熟悉. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形（图 1-3）. 图中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

下面举几个函数的例子.

例 5 函数

$$y=2$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{2\}$,它的图形是一条平行于 x 轴的直线,如图 1-4 所示.

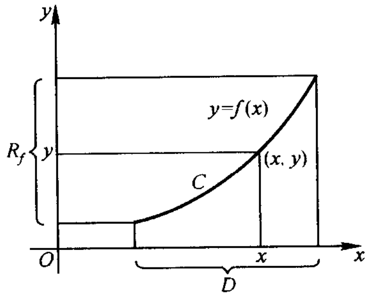

图 1-3

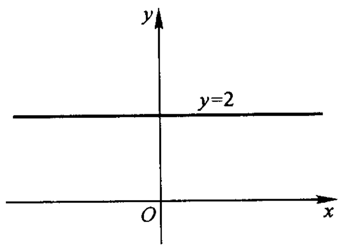

图 1-4

例 6 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,它的图形如图1-5 所示.这函数称为绝对值函数.

例 7 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1-6 所示.对于任何实数 x,下列关系成立:

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|.$$

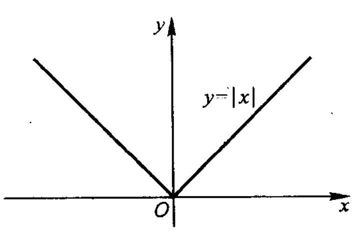

图 1-5

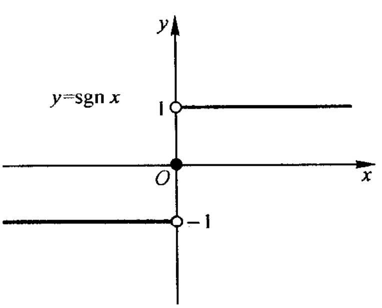

图 1-6