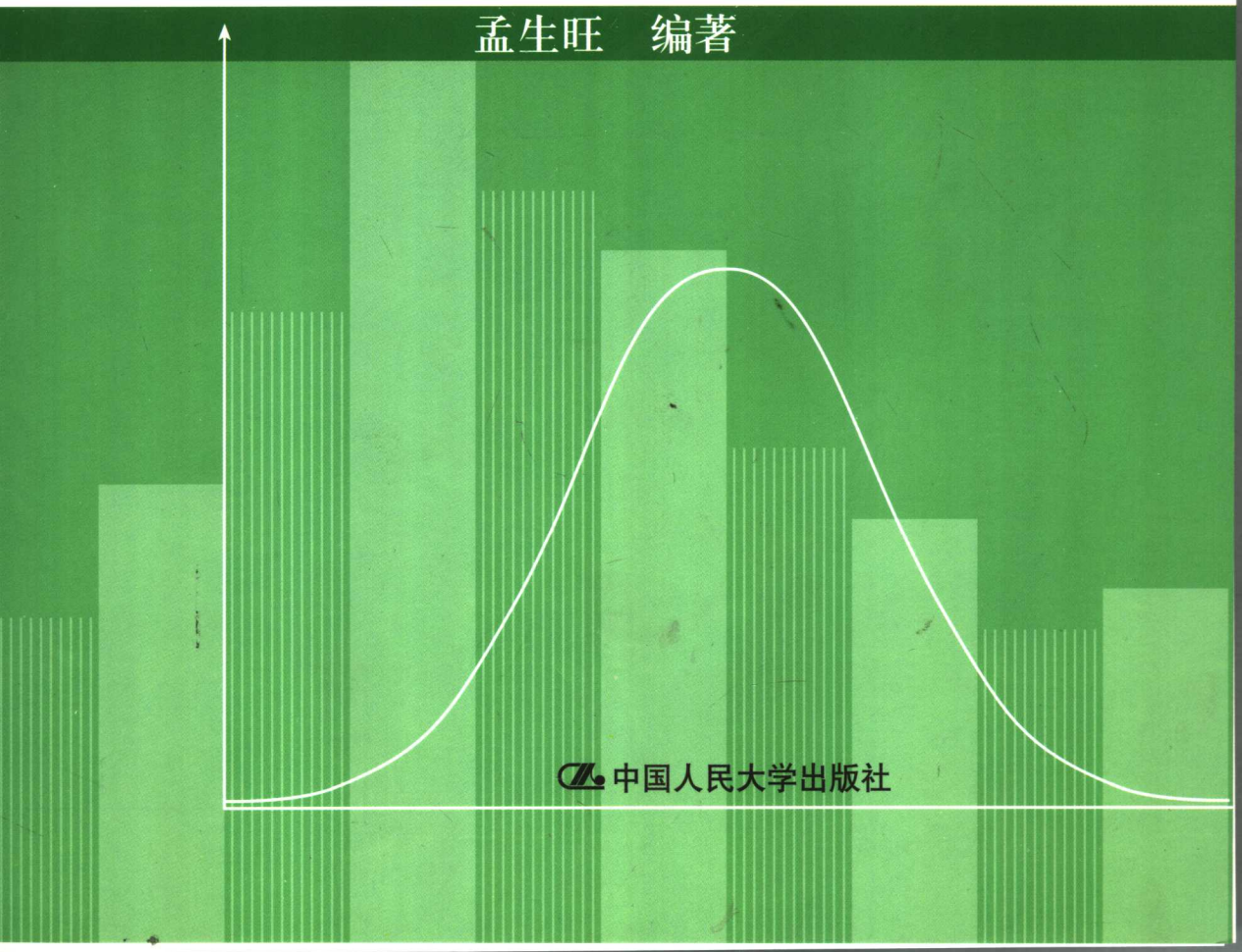
21世纪保险精算系列教材

精算师考试用书

中国人民大学风险管理与精算中心主编

金融数学

孟生旺 编著



中国人民大学出版社

21 世纪保险精算系列教材
精算师考试用书
中国人民大学风险管理与精算中心主编

金融数学

孟生旺　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

金融数学/孟生旺编著．
北京：中国人民大学出版社，2007
（21世纪保险精算系列教材）
精算师考试用书
ISBN 978-7-300-08584-5

Ⅰ．金…
Ⅱ．孟…
Ⅲ．金融-经济数学-教材
Ⅳ．F830

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第153385号

21世纪保险精算系列教材
精算师考试用书
中国人民大学风险管理与精算中心主编
金融数学
孟生旺　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京雅艺彩印有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16开本	**版　　次**	2007年10月第1版
印　　张	22.25	**印　　次**	2007年10月第1次印刷
字　　数	401 000	**定　　价**	29.00元

版权所有　侵权必究　印装差错　负责调换

总 序

从1775年英国公平人寿最早将运用数学工具为产品定价的专门人员命名为精算师以来，精算师职业在国际上已有200多年的发展历史。这一职业最早在人寿和养老金业务中发挥作用，之后逐步向非寿险、健康保险、社会保障等领域扩展。20世纪以后，精算师的职业进一步延伸到银行、投资、公司财务、金融工程等领域。精算师职业领域的扩展与精算职业组织的发展和精算教育水平的提高密切相关。1848年后欧美一些国家陆续成立的精算师协会以及国际精算师协会，为提高全球精算教育标准做出了贡献。例如，国际精算师协会早在1998年就公布了初级精算教育标准，要求2005年后加入国际精算师协会的成员在精算教育标准上符合国际教育标准。2007年，国际精算师协会再次公布了重新修订的初级精算教育标准及教育大纲。国际上著名的精算师职业组织，包括北美寿险精算师协会、北美非寿险精算师协会、英国精算师协会等，也从2000年后陆续对其精算教育标准和精算师考试体系进行改革，强调精算学与统计学、金融学、投资学、会计学、经济学等学科的融合，强调精算学科培养复合型风险管理人才的目标。

我国精算教育和精算师职业发展起步较晚，1992年后才陆续引入北美寿险精算师考试、英国精算师考试、日本精算师考试、北美非寿险精算师考试等，2000年后，中国精算师考试体系逐步建立起来。目前，中国精算师考试的考点已增加到15个。2006年12月，民政部批准中国精算师协会正式筹备成立。中国精算师协会的成立，必将进一步推动中国精算教育和精算师职业的发展，也迫切要求对当前的精算教育体系和精算师考试体系进行必要的改革，以尽快向国际精算师协会发布的精算教育标准看齐。

中国人民大学统计学院是国内较早开展风险管理与精算教育的大学之一。1992年统计学院就开始招收风险管理与精算专业方向的硕士研究生，1993年开始招收该方向的本科生，1996年招收了该专业方向的第一批博士研究生。2004年，经教育部批准备案，统计学院设立了独立的风险管理与精算学硕士学位点和博士学位点，标志着在风险管理与精算人才培养上，形成了学士、硕士、博士多层次、专业化的人才培养教育体系。其专业课程设置完全与国际接轨，涵盖了北美、英国和中国精算师初级课程考试的基本内容，教学大纲紧跟国际精算师协会公布的精算教育指南，同时根据学科发展的国际趋势，每年重新修订课程和教学大纲。在研究方面，设立了中国人民大学风险管理与精算中心。多年来，在寿险风险管理与精算、非寿险特别是汽车保险风险管理与精算、养老金、社会保障等领域取得了很多有影响的成果，进一步促进了风险管理与精算教育的发展。为适应我国精算教育改革与发展的需要，并体现与国际精算师协会的精算教育标准接轨，中国人民大学风险管理与精算中心精心组织编写了一套精算学系列教材，分两个阶段完成。第一阶段涵盖精算师考试初级课程的全部专业课内容，包括《金融数学》、《风险理论》、《寿险精算学》、《非寿险精算学》、《精算中常用的统计模型》5本教材和配套的学习辅导书，共10本。第二阶段涵盖精算师考试高级课程的全部内容，分寿险、非寿险、养老金、健康保险、社会保障、投资等不同系列。这套教材一方面可以满足各高校精算专业的教学需求，另一方面也可以作为参加各类精算师资格考试学员的学习参考资料，同时，也可以作为对精算学科有兴趣的同仁了解和学习精算的参考书。

这套教材的特点，一是在内容上涵盖了北美寿险、北美非寿险、英国、中国精算师考试最新的内容，同时紧跟国际精算师协会提出的精算教育标准，涵盖了国际精算教育大纲的基本内容；二是为了便于读者自学和教师讲授，我们为第一部每本教材编写了学习辅导用书，辅导书中包括学习要点、教材习题解答和一部分补充练习题及其解答等；三是在写法上，力求把精算学的数理理论与实务结合起来，注意精算数学背后的实践意义，努力从实际意义上解释各种数学关系。

本套教材凝结了中国人民大学风险管理与精算中心全体教师的心血，特别是王晓军、孟生旺、黄向阳、王燕、肖争艳、肖雨谷等老师，他们为本套教材的编写付出了极大的艰辛，统计学院部分硕士研究生和本科生对辅导用书中的习题解答和答案进行了验证，感谢他们为本套教材做出的贡献，同时也感谢中国人民大学出版社的编辑们为本书的出版付出的辛勤劳动。

袁卫

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　言

精算师是一个令人羡慕的职业，也是一个充满挑战的职业，还是一个专业化程度很高的职业。不同国家对精算师的培养方法不尽相同，但要求都非常严格。其中许多国家采取了资格考试的方式，我国也不例外。

保险有寿险和非寿险之分，相应地，精算也包括寿险精算和非寿险精算。SOA（北美寿险精算师协会）和 CAS（北美非寿险精算师协会）是国际上两个著名的精算师协会。尽管寿险精算与非寿险精算存在很大差别，但它们具有共同的基础。以 SOA 和 CAS 的资格考试为例，它们的基础课程非常接近，其中有三门基础课程完全相同，这三门基础课程是：

概率论（Probability）

金融数学（Financial Mathematics）

精算建模（Construction and Evaluation of Actuarial Models）

在不同的精算师资格考试中，课程设置虽然存在差异，但在基础课程上的要求大体相同。因此，上述三门课程所包含的内容，在各类精算师资格考试中都应属于必考范围，也是一个合格的精算师必须掌握的基本知识。

随着保险业的发展，市场竞争日趋激烈，对精算师的要求越来越高，因此精算师资格考试的内容也在不断更新。2007 年，SOA 和 CAS 对部分课程的考核内容进行了较大调整，其中在金融数学中增加了对衍生产品的考核。这就使得过去出版的《利息理论》教材难以满足该门课程的要求，为此，编写一本内容更为全面的教材就显得很有必要。

为了尽可能满足精算师资格考试的需要，我们在本书的编写过程中，主要参考了 SOA 和 CAS 关于金融数学的考试大纲，在内容取舍上基本与金融数学的考试范围相符。但是，为了本书内容的完整性和系统性，我们也增加了一些金融数学考试大纲之外的材料，如期权定价的 Black-Scholes 模型、二叉树模型、随机利率模型等。虽然在金融数学的考试中不会涉及这些内容，但它们有助于读者对其他后续课程的学习。

本书设计了较多的例题和习题，涉及大量计算和绘图。建议读者在使用本书时应用 EXCEL 完成有关的计算和绘图，尤其在衍生产品的学习过程中，EXCEL 是非常恰当的学习工具。本书配有学习辅导书，将给出所有习题的解答过程。

本书在编写过程中得到了许多人的大力支持和帮助，凝结了许多人的劳动成果。中国人民大学统计学院风险管理与精算专业的硕士研究生王维参与了本书第 1、2、3 章初稿的编写，叶芳参与了第 4、5、10 章初稿的编写，钟桢参与了第 6、9、11 章初稿的编写，王晓静和王维参与了第 7、8 章习题的编写。秦强绘制了本书的许多图表，林俊对本书的初稿进行了认真校对。

在本书的编写过程中，我们虽然尽了最大努力，占用了节假日的大部分时间，但仍觉时间紧张，编写过程略显仓促，再加上作者水平有限，本书难免存在疏漏，还请读者不吝赐教，我们将不胜感激。

作者联系方式：mengshw@sina. com

孟生旺

目　录

第 1 章　利息的度量 …… 1
1.1　累积函数与实际利率 …… 1
1.1.1　累积函数 …… 1
1.1.2　实际利率 …… 2
1.2　单利 …… 3
1.2.1　单利的定义 …… 3
1.2.2　单利与实际利率的关系 …… 6
1.3　复利 …… 6
1.3.1　复利的定义 …… 6
1.3.2　复利与实际利率的关系 …… 7
1.3.3　复利与单利的区别 …… 8
1.4　累积函数的证明 …… 9
1.4.1　单利的累积函数 …… 9
1.4.2　复利的累积函数 …… 11
1.5　贴现函数 …… 13
1.6　贴现率 …… 14
1.6.1　实际贴现率 …… 14
1.6.2　实际贴现率与实际利率的一些重要关系 …… 15
1.6.3　单贴现率 …… 17

1.7 名义利率 …… 18
1.8 名义贴现率 …… 21
1.8.1 名义贴现率的定义 …… 21
1.8.2 名义利率与名义贴现率的关系 …… 22
1.9 利息力 …… 24
1.9.1 利息力的定义 …… 24
1.9.2 利息力与累积函数的关系 …… 25
1.9.3 常数利息力 …… 26
1.9.4 单利条件下的利息力 …… 28
1.10 贴现力 …… 29
1.11 利率概念辨析 …… 30
1.11.1 实际利率和名义利率 …… 30
1.11.2 利率和贴现率 …… 30
小结 …… 31
习题 …… 32
第2章 等额年金 …… 35
2.1 年金的含义 …… 35
2.2 年金的现值 …… 36
2.2.1 期末付定期年金的现值 …… 37
2.2.2 期初付定期年金的现值 …… 38
2.2.3 期末付永续年金的现值 …… 39
2.2.4 期初付永续年金的现值 …… 40
2.3 年金的终值 …… 40
2.3.1 期末付定期年金的终值 …… 41
2.3.2 期初付定期年金的终值 …… 42
2.4 年金现值与终值的关系 …… 43
2.4.1 年金现值与终值之间的换算关系 …… 43
2.4.2 年金现值与终值之间的倒数关系 …… 44
2.5 年金在任意时点上的值 …… 45
2.5.1 年金在支付期限开始前任意时点上的值 …… 45
2.5.2 年金在支付期限内任意时点上的值 …… 47
2.5.3 年金在支付期限结束后任意时点上的值 …… 48
2.6 可变利率年金的现值和终值 …… 48

2.6.1 每笔款项都以其支付时的利率计算 …… 48
2.6.2 每笔款项经历哪个时期，就以哪个时期的利率计算 …… 49
2.7 每年支付 m 次的年金 …… 50
2.7.1 每年支付 m 次的期末付年金 …… 51
2.7.2 每年支付 m 次的期初付年金 …… 52
2.7.3 每年支付 m 次的永续年金 …… 54
2.8 连续年金 …… 55
2.8.1 连续年金的现值 …… 56
2.8.2 连续年金的终值 …… 57
2.9 价值方程 …… 58
小结 …… 61
习题 …… 62
第3章 变额年金 …… 66
3.1 递增年金 …… 66
3.1.1 期末付递增年金 …… 66
3.1.2 期初付递增年金 …… 68
3.2 递减年金 …… 70
3.2.1 期末付递减年金 …… 70
3.2.2 期初付递减年金 …… 72
3.3 连续支付的变额年金 …… 73
3.3.1 连续支付的递增年金 …… 73
3.3.2 连续支付的递减年金 …… 75
3.4 复递增年金 …… 76
3.4.1 期末付复递增年金 …… 77
3.4.2 期初付复递增年金 …… 78
3.5 每年支付 m 次的变额年金 …… 79
3.6 连续递增年金 …… 81
3.7 连续递减年金 …… 84
3.8 一般连续变额现金流 …… 85
小结 …… 88
习题 …… 89
第4章 收益率 …… 93
4.1 现金流分析 …… 93

4.1.1 收益率法 …… 93
4.1.2 净现值法 …… 94
4.1.3 收益率与净现值的关系 …… 95
4.1.4 多重收益率 …… 96
4.1.5 收益率唯一性的条件 …… 97
4.1.6 多重收益率情况下的净现值 …… 99
4.1.7 收益率不存在的一个简例 …… 100
4.2 币值加权收益率 …… 100
4.3 时间加权收益率 …… 104
4.4 再投资收益率 …… 108
4.5 收益分配 …… 111
小结 …… 113
习题 …… 114
第5章 债务偿还 …… 118
5.1 等额分期偿还 …… 118
5.1.1 每次偿还的金额 …… 119
5.1.2 未偿还本金余额 …… 119
5.1.3 每期偿还的本金和利息 …… 121
5.2 等额偿债基金 …… 125
5.2.1 偿债基金的利率不等于贷款利率的情形 …… 126
5.2.2 偿债基金的利率等于贷款利率的情形 …… 127
5.3 变额分期偿还 …… 132
5.4 变额偿债基金 …… 135
5.5 抵押贷款 …… 139
5.5.1 未偿还本金余额的变化规律 …… 140
5.5.2 抵押物价值的变化规律 …… 141
5.5.3 抵押物价值与未偿还本金余额的关系 …… 143
小结 …… 144
习题 …… 145
第6章 债券和股票 …… 149
6.1 引言 …… 149
6.1.1 债券 …… 149
6.1.2 股票 …… 150

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

6.1.3 衍生产品 …… 150
6.2 债券定价原理 …… 151
6.2.1 基本公式 …… 152
6.2.2 溢价公式 …… 152
6.2.3 基价公式 …… 154
6.2.4 Makeham 公式 …… 155
6.3 债券在任意时点上的价格和账面值 …… 160
6.3.1 债券的价格 …… 160
6.3.2 债券的账面值 …… 161
6.4 分期偿还债券的价格 …… 164
6.5 债券属性对债券价格的影响 …… 167
6.5.1 债券的到期时间 …… 167
6.5.2 息票率 …… 168
6.5.3 可赎回条款 …… 169
6.5.4 通货膨胀调整 …… 171
6.5.5 税收待遇 …… 171
6.5.6 流动性 …… 172
6.5.7 违约风险 …… 172
6.5.8 收益率 …… 175
6.6 股票价值分析 …… 177
6.6.1 优先股价值分析 …… 177
6.6.2 普通股价值分析 …… 178
6.6.3 零增长模型 …… 178
6.6.4 常数增长模型 …… 178
6.6.5 三阶段增长模型 …… 179
6.6.6 H 模型 …… 180
6.7 卖空 …… 182
6.8 资本资产定价模型 …… 183
6.8.1 系统性风险的度量 …… 184
6.8.2 证券的期望收益率 …… 186
小结 …… 186
习题 …… 188
第 7 章 远期、期货和互换 …… 191

7.1 远期 …… 191
7.1.1 远期的定义 …… 191
7.1.2 远期的回收和盈亏 …… 192
7.1.3 远期利率协议 …… 195
7.2 期货 …… 196
7.3 远期和期货的定价 …… 198
7.3.1 远期价格 …… 198
7.3.2 假设和符号 …… 199
7.3.3 到期前不产生收益的资产 …… 200
7.3.4 到期前产生已知收益的资产 …… 201
7.3.5 到期前产生已知收益率的资产 …… 202
7.3.6 远期定价的另一种方法 …… 203
7.3.7 远期定价公式中的持有成本 …… 205
7.3.8 远期定价公式中隐含的无风险利率 …… 205
7.4 合成远期 …… 206
7.4.1 远期的合成 …… 206
7.4.2 套保和套利 …… 207
7.5 互换 …… 210
7.5.1 互换的含义 …… 210
7.5.2 利率互换 …… 212
7.5.3 利率互换的定价 …… 214
小结 …… 219
习题 …… 219
第8章 期权 …… 221
8.1 期权的基本概念 …… 221
8.2 期权的盈亏 …… 224
8.2.1 看涨期权的盈亏 …… 225
8.2.2 看跌期权的盈亏 …… 226
8.2.3 看涨期权与看跌期权的平价关系 …… 228
8.3 期权交易策略 …… 229
8.3.1 保险策略 …… 229
8.3.2 差价期权 …… 233
8.3.3 混合期权 …… 239

8.3.4 期权策略的符号表示 …… 243
8.4 Black-Scholes 模型 …… 244
8.4.1 证券价格的变化过程 …… 244
8.4.2 Black-Scholes 定价公式 …… 247
8.5 二叉树模型 …… 251
8.5.1 单步二叉树模型 …… 251
8.5.2 多步二叉树模型 …… 253
8.5.3 构造树图的其他方法 …… 255
小结 …… 256
习题 …… 257
第 9 章 利率风险 …… 261
9.1 马考勒久期 …… 261
9.2 修正久期 …… 266
9.3 有效久期 …… 269
9.4 凸度 …… 272
9.4.1 基于名义收益率的凸度 …… 272
9.4.2 马考勒凸度 …… 273
9.4.3 有效凸度 …… 274
9.5 久期和凸度的综合应用 …… 275
9.6 免疫 …… 281
9.7 完全免疫 …… 286
9.8 现金流配比 …… 289
小结 …… 291
习题 …… 292
第 10 章 利率的期限结构 …… 295
10.1 到期收益率 …… 295
10.2 即期利率 …… 297
10.3 远期利率 …… 300
10.4 套利 …… 305
10.4.1 套利机会 …… 305
10.4.2 套利收益 …… 306
小结 …… 309
习题 …… 310

第 11 章　随机利率 …… 314
11.1　随机利率 …… 314
11.1.1　累积值 …… 314
11.1.2　现值 …… 316
11.1.3　独立同分布假设下的累积值和现值 …… 317
11.2　对数正态模型 …… 319
11.3　二叉树模型 …… 323
小结 …… 331
习题 …… 332
参考文献 …… 335

第1章 利息的度量

利息（interest）可以被定义为在一定时期内借款者为了使用一笔资金而向出借者所给付的报酬。这可以从两个方面考虑：一方面从资金的拥有者角度出发，他希望从资金的出借中得到补偿；另一方面从资金的使用者角度出发，他必须付给出借者一定的报酬以获得使用资金的权利。在这种意义上，利息可被视为借款者所缴纳的租金，用以补偿出借者因为不能使用这笔资金而蒙受的损失。

本章将介绍有关利息的各种度量工具，包括复利和单利、实际利率、名义利率、实际贴现率、名义贴现率、利息力和贴现力等。单利和单贴现率这类度量工具，在庞大复杂的金融交易中应用较少，但是可能被用于小范围的简单交易中。复利的应用最为广泛，经常在实际的金融交易中出现。而利息力则通常被用于学术和理论方面的研究。

在本章我们还将讨论累积函数和贴现函数。累积函数被用来计算期初的本金在时刻 t 的累积值，而贴现函数正好相反，计算的是期末的资金在期初时的现值。这两种方法是现金流计算的基础。

1.1 累积函数与实际利率

1.1.1 累积函数

累积函数（accumulation function）是指期初的 1 元本金在时刻 t 的累积值，

它是度量利率和利息的最基本工具，其他度量工具（如单利、复利、贴现率、利息力等）都是以累积函数为基础推导出来的。累积函数通常被记为 $a(t)$，它具有以下性质：

(1) $a(0)=1$ (1—1)

(2) $a(t)$ 通常是递增函数，亦即利息是非负的。当然，负利息或利息为零的情况偶尔也会出现，如投资亏本或没有盈利时，累积函数即为递减函数或等于常数。

(3) 如果连续计息，则累积函数 $a(t)$ 为连续函数（这种情况较为常见）；反之，则累积函数 $a(t)$ 为非连续函数。

当期初的本金金额不是 $a(0)=1$，而是 $A(0)$ 时，在时刻 t 的累积值可以表示为：

$$A(t)=A(0)\times a(t)$$

于是

$$a(t)=\frac{A(t)}{A(0)} \tag{1—2}$$

由此可见，$A(t)$ 和 $a(t)$ 可以互相表示。

若以 $I(t)$ 表示 $0\sim t$ 时期的利息额，则有

$$I(t)=A(t)-A(0) \tag{1—3}$$

1.1.2 实际利率

所谓实际利率（effective rate of interest），是指 1 元本金在某个时期末赚取的利息。实际利率通常用百分数表示，如 $i=5\%$，这就意味着 1 元本金在期末赚取的利息是 0.05 元。

如果用累积函数表示实际利率，则有

$$i=a(1)-a(0)=a(1)-1 \tag{1—4}$$

$$a(1)=1+i \tag{1—5}$$

由式（1—1）和式（1—5）可知，累积函数 $a(t)$ 必然经过下述两点：(0，1) 和 (1，$1+i$)。图 1—1 表示了这一结果。

用实际利率表示的利息只在期末支付一次，这是它与名义利率的根本区别。在后面我们将会看到，根据名义利率计算的利息，在期内可以进行多次支付。

前面我们用累积函数给出了实际利率的定义，而累积函数可以表示为式（1—2）的形式，因此，实际利率也可表示如下：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com