21世纪高等院校教材

线性代数

田振际　黄灿云　编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

线 性 代 数

田振际　黄灿云　编

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了线性代数的基本知识，内容深入浅出，论述通俗易懂．包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值、特征向量、二次型、向量空间等在工程技术中常用的线性代数知识和理论．

本书可作为高等工科院校非数学专业本科生的线性代数教材，也可供相关专业的教学和科研人员作参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/田振际，黄灿云编．—北京：科学出版社，2008

(21世纪高等院校教材)

ISBN 978-7-03-020835-4

Ⅰ.线…　Ⅱ.①田…　②黄…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第002061号

责任编辑：赵　靖／责任校对：张小霞

责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008年1月第　一　版　开本：B5(720×1000)

2008年1月第一次印刷　印张：10 1/4

印数：1—6 000　字数：194 000

定价：16.00元

前　言

线性代数是工科高等院校的一门重要公共基础课程，该课程的理论性强，概念比较抽象，而且有独特的数学思维方式.

作为数学的一个重要分支，线性代数有着悠久的发展历史和极其丰富的内容.作为一种基本的数学工具，线性代数在数学学科与其他科学技术领域，诸如数值分析、优化理论、微分方程、概率统计、运筹学、控制论、系统工程等学科都有广泛的应用，甚至在经济管理、社会科学等方而，线性代数也起着十分重要的作用.

本书较简洁地分绍了线性代数与工程技术联系密切、应用广泛的基本理论. 在编写过程中力求做到深入浅出、简明易懂，深度与广度适中. 因而，本书较为实用，既值于教又便于学，可作为理工科院校本科生的教材，也可作为有关专业的教师及工程技术人员的参考书.

本书第 1 章分绍 n 阶行列式的概念及其基本性质. 第 2 章介绍矩阵的概念及运算. 第 3 章分绍 n 维向量及其运算、性质以及向量与矩阵的关系. 第 4 章分绍线性方程组有无解的判别法则以及线性方程组解的结构、通解的求法. 第 5 章介绍向量空间的基本概念以及向量的内积等内容. 第 6 章分绍矩阵的特征值、特征向量以及实二次型的基本概念及其正定性判别. 每章后而配有一定数量的习题，习题中还加入了历届研究生入学考试的部分题目.

本书第 3 章、第 4 章和第 5 章由田振际编写，第 1 章、第 2 章和第 6 章由黄灿云编写. 本书曾作为讲义在兰州理工大学 2006 级部分基地班中试用过，在广泛征求相关老师、学生和有关专家意见的基础上，经过作者多次修该编写而成.

书中尽量给出了定理的证明，值有些定理 (比如，定理 6.1.3，定理 6.6.1，定理 6.7.2 等) 的证明比较复杂，如果本门课程的学时较少，在讲授时可以略去其证明过程，只要求学生掌握结论就可以了.

本书的编写得到了兰州理工大学教务处的大力支持，在此作者表示衷心的感谢；同时也要感谢兰州理工大学应用数学系的全体老师，他们对本书的构架和内容布局等方面都提出了许多建设性意见，特别是夏亚峰教授、张民悦教授、黎锁平教授、杨胜良教授、霍海峰教授、欧志英教授、孙建平数授和王永铎博士，他们不但仔细地审阅了整个书稿，修改了其中的印刷错误，还提供了许多非常好的习题. 这里还要感谢我的几位研究生，他们也仔细地阅读了书稿，并修该了诸多印刷错误.

由于水平所限，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正.

编　者

2007 年 11 月 10 日

目　录

第1章　行　列　式

在解决许多实际问题时，常常会遇到解方程组，而在中学所学的代数中，我们主要学习过解一元、二元、三元以至四元一次方程组. 本章和第 4 章主要讨论一般的多元一次方程组，即线性方程组. 所谓线性方程组就是一组含有若干个变量的一次方程式. 有 n 个变量 m 个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里，n 和 m 都是正整数. 如果 $m = n$，则 (1.1) 叫做 n 元线性方程组.

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，其有唯一解，即

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

我们称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为**二阶行列式**，并表示为

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

于是，上述解用行列式可表述为：当二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，该方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

如果记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

并称其为**三阶行列式**, 那么当三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 上述三元方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

现在所面临的问题是, 方程组 (1.1) 是否有解; 如果有解, 如何求其解; 它有多少组解. 这些问题都和行列式有密切的关系. 本章的最后一节就是用行列式初步地解决 n 元线性方程组的上述问题, 我们要把二元、三元方程组解的上述结果推广到 n 元线性方程组的情形. 为此, 需要给出 n 阶行列式的定义, 并讨论它的性质, 这就是本章的主要内容.

1.1 排列及其逆序数

作为 n 阶行列式定义的准备, 首先给出排列及其逆序数的概念和性质.

定义 1.1.1 由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n **级排列**.

例如, 3421 是一个四级排列, 45123 是一个五级排列. 容易看出, n 级排列的总数是 $n!$. 显然, $12\cdots n$ 也是一个 n 级排列, 这个排列具有自然顺序, 通常称其为**自然排列**或者**标准排列**.

定义 1.1.2 在一个排列中, 如果一对数的先后位置和大小顺序相反, 即前面的数大于后面的数, 那么就称它们为一个**逆序**; 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**; 进一步, 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**, 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如, 42, 43, 41, 21, 31 是排列 4231 的所有逆序, 因此它的逆序数就是 5, 所以是奇排列; 而排列 31524 的逆序数是 4, 因而是偶排列.

n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数通常表示为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n).$$

应该指出, 我们同样可以考虑由任意 n 个不同的自然数所组成的排列以及它们的逆序、逆序数等概念.

把一个排列中两个数的位置互换, 而其余的不动, 这样就得到一个新的排列. 这种作出一个新排列的过程称为一个**对换**. 将相邻两个数对换叫做**相邻对换**. 显然, 如果将一个排列连续实施两次相同的对换, 那么排列就被还原了. 由此可知, 一个对换把全部 n 级排列两两配对, 使每两个配对的排列在这个对换下互变.

定理 1.1.1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说, 经过一次对换, 奇排列变成偶排列, 偶排列变成奇排列.

证明 先证相邻对换的情形. 设排列 $\cdots jk\cdots$ 经过对换 j 和 k 变成 $\cdots kj\cdots$, 这里 "$\cdots$" 表示那些不动的数. 显然, 若 j, k 在排列 $\cdots jk\cdots$ 中与其他数构成逆序, 则在排列 $\cdots kj\cdots$ 中仍然与其他数构成逆序. 若不构成逆序, 则在排列 $\cdots kj\cdots$ 中也不构成逆序. 而对 j, k 来说, 如果原来构成逆序, 那么经过对换后逆序就减少 1; 如果原来不构成逆序, 那么经过对换后逆序就增加 1. 这样, 无论减少 1 还是增加 1, 对换后的排列的逆序数总是改变了奇偶性.

再证一般对换的情形.

设 $\cdots ji_1i_2\cdots i_mk\cdots$ 是 n 级排列, 把它作 m 次相邻对换, 也就是将 k 和它前面的数 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 依次作相邻对换, 这时排列变为 $\cdots jki_1i_2\cdots i_m\cdots$. 然后再作 $m+1$ 次相邻对换使排列变成 $\cdots ki_1i_2\cdots i_mj\cdots$. 这样, 原排列总共经过了 $2m+1$ 次相邻对换变成 $\cdots ki_1i_2\cdots i_mj\cdots$, 所以排列的奇偶性也改变了. ∎

由定理 1.1.1 可知, 对换的次数就是排列的奇偶性改变的次数, 而标准排列 $12\cdots n$ 是偶排列 (逆序数为 0), 所以, 将一个奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数, 而偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数, 这就是下面的推论.

推论 1.1.1　任意一个 n 级排列与标准排列 $12\cdots n$ 都可经过一系列对换互变, 并且所作的对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

此外, 利用定理 1.1.1 还可证明下面的推论.

推论 1.1.2　在全部 n 级排列中, 奇排列和偶排列的个数相等, 各有 $n!/2$ 个.

证明　假设全部 n 级排列中共有 s 个奇排列, t 个偶排列. 若将 s 个奇排列的前两个数字对换, 则得到 s 个偶排列, 因此 $s \leqslant t$. 同样可证 $t \leqslant s$, 于是 $s = t$, 即奇、偶排列的个数相等, 各有 $n!/2$ 个. ∎

1.2　行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义, 首先来看二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

和三阶行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{1.2}$$

的结构.

容易看出, 无论二阶行列式还是三阶行列式, 它们都是一些乘积的代数和, 而每一项都是由行列式中位于不同行不同列的元素的乘积构成的, 且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成. 当 $n = 2$ 时, 由不同行不同列元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$ 两项; 当 $n = 3$ 时, 不难看出, 由不同行不同列的元素构成的乘积恰好就是 (1.2) 式右边部分中的 6 项.

此外, 我们还注意到, 三阶行列式的一般项可写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是 1, 2, 3 的一个排列. 可以看出, 当 $p_1p_2p_3$ 是奇排列时, 对应的乘积项在 (1.2) 式中带有负号, 当 $p_1p_2p_2$ 是偶排列时带有正号. 显然, 这种确定乘积项符号的原则对二阶行列式也是对的. 这样, 二阶行列式和三阶行列式可分别写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2}(-1)^{\tau(p_1p_2)}a_{1p_1}a_{2p_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

这里, $\sum\limits_{p_1p_2}$ 和 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 分别表示对所有 2 级排列和 3 级排列求和.

仿此, 我们给出 n 阶行列式的定义.

定义1.2.1 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

并冠以符号 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$ 的代数和

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

也即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

这里, $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

由定义立即看出, n 阶行列式是由 $n!$ 项级成的. 当 $n = 1$ 时, 一阶行列式 $|a| = a$, 要注意的是不要和绝对值符号相混淆.

例1.2.1 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由定义, 行列式展开式中一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

显然, 如果 $p_n \neq n$, 那么 $a_{np_n}=0$, 从而这个项也为零. 因此只考虑 $p_n=n$ 的那些项. 在第 $n-1$ 行中, 除了 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 外, 其余的都为零, 因此只有在 $p_{n-1}=n-1$ 或者 n 时这个项才有可能不为零. 但 $p_n=n$, 所以 p_{n-1} 不能等于 n, 从而 $p_{n-1}=n-1$. 这样逐步推下去, 在展开式中除了

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

其余的都一定为零. 注意到 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}=1$, 所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

换句话说, 上三角行列式等于其**主对角线**(从左上角到右下角的对角线) 上元素的乘积.

作为特例, 我们有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1d_2\cdots d_n.$$

主对角线以外元素全为零的行列式称为**对角行列式**. 上式表明, 对角行列式等于主对角线上元素的乘积.

类似可以计算, 下三角行列式 (主对角线以上元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.2.2 证明: 反对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 d_2 \cdots d_n.$$

证明 依行列式定义不难得到

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} d_1 d_2 \cdots d_n.$$

而 $\tau(n(n-1)\cdots 21) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, 由此即可证明等式. ∎

现在用定理 1.1.1 来讨论行列式的另外一种表示.

对于行列式的一般项

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n},$$

其中 $t = \tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)$, 如果交换 a_{ip_i} 和 a_{jp_j} 的次序, 则其变为

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}.$$

此时, 这一项的值并没有变, 但行标排列和列标排列同时作了一次相应的对换. 显然, 新的行排列 $1 \cdots j \cdots i \cdots n$ 的逆序数 $r = \tau(1 \cdots j \cdots i \cdots n)$ 是奇数, 而新的列排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数 $t' = \tau(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)$ 与 t 的奇偶性相反. 因此

$$(-1)^t = -(-1)^{t'} = (-1)^{t'}(-1)^r = (-1)^{t'+r},$$

进而有

$$(-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = (-1)^{t'+r} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}.$$

这说明, 若调换乘积项中两个元素的次序, 则行标排列和列标排列同时作了一次相应的对换, 但行标排列和列标排列的逆序数之和的奇偶性并没有变化. 经过一次元素的对换是这样, 经过多次对换还是这样. 于是, 将 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 的元素经过若干次对换, 使其列排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 变为标准排列 $12 \cdots n$, 而行标排列 $12 \cdots n$ 变为某个新的排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$, 则有

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

我们还注意到, 若 $p_i = j$, 则 $q_j = i$(即 $a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$). 所以, 排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 唯一确定. 这样, 行列式的定义又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1q_2\cdots q_n} (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

1.3 行列式的性质

用行列式的定义计算行列式是非常复杂的. 为了能够计算行列式, 下面来研究行列式的一些性质.

性质 1.3.1 互换行列式的行和列, 则行列式不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并记

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij} = a_{ji}\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 那么由定义知,

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = D. \end{aligned}$$ ∎

行列式 D' 通常称为行列式 D 的**转置行列式**. 性质 1.3.1 表明, 行列式和它的转置行列式相同; 同时, 在行列式中行和列的地位是平等的, 因此, 凡是有关行的性质对列也同样成立, 反之亦然.

性质1.3.2 互换行列式两行 (列), 行列式仅改变符号.

证明 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 D 对换第 i,j (不妨设 $i<j$) 两行得到, 即当 $k\neq i,j$ 时, $b_{kp}=a_{kp}$, 当 $k=i$ 时, $b_{ip}=a_{jp}$; 当 $k=j$ 时, $b_{jp}=a_{ip}$. 于是,

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

注意到 $(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}$, 因此

$$D_1=-\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D. \qquad \blacksquare$$

性质1.3.3 若行列式有两行 (列) 完全相同, 则行列式为零.

证明 设行列式 D 有两行相同, 若将相同的两行互换, 则有 $D=-D$, 因此 $D=0$. ■

性质1.3.4 用常数 k 乘以行列式的某行 (列) 所有元素, 相当于用 k 去乘以行列式.

证明 由行列式定义即可证明. ■

显然, 性质 1.3.4 可以叙述为: 行列式一行 (列) 元素的公因子可提到行列式符号的外面. 于是又有下面的性质.

性质 1.3.5　若行列式有两行 (列) 元素成比例, 则行列式为零.

性质 1.3.6　若行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r}+a'_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r}+a'_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr}+a'_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D_1+D_2$.

证明　直接用行列式定义即可证明. ∎

性质 1.3.6 实际上对行也是成立的, 也即若行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D = D_1 + D_2$.

性质1.3.7 行列式某行 (列) 元素同乘以数 k 然后加到另外一行 (列), 则行列式不变.

证明 利用性质 1.3.5 和性质 1.3.6 即可证明. ∎

下面利用行列式的性质来计算几个行列式.

例1.3.1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 利用性质 1.3.7, 把第一行依次乘 $-2, -3, -4$ 分别加到第二行、第三行、第四行即得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}.$$

把第二行依次乘 $-2, -7$ 分别加到第三行、第四行即得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}.$$

最后, 把第三行加到第四行即得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 160.$$