Б. П. 吉米多维奇 Б.П.ДЕМИДОВИЧ

6

数学分析

习题全解［六］■ 原题译自俄文最新版

南京大学数学系
许宁 廖良文 编著
杨立信 毕秉钧 译

安徽人民出版社

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析
习题全解
(六)

南京大学数学系
博士生导师 许宁副教授 编著
廖良文教授

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解.6/(苏)吉米多维奇著.许宁,廖良文编著.一合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 978-7-212-02700-1

Ⅰ.吉… Ⅱ.①吉…②许…③廖… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113595 号

责任编辑 王玉法
装帧设计 刘晓莉
出版发行 安徽人民出版社
地　　址 合肥市金寨路 381 号九州大厦　邮编:230063
发 行 部 0551-2833066　0551-2833099(传真)
经　　销 新华书店
印　　刷 华东有色地质勘查局研究所印刷厂
开　　本 850×1168　1/32
印　　张 14.75
字　　数 350 千
版　　次 2007 年 9 月第 2 版
印　　次 2007 年 9 月第 1 次印刷
标准书号 ISBN978-7-212-02700-1
定　　价 18.00 元

前　言

数学分析是大学数学系的一门重要的必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。现安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》。新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，该习题集有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答，应安徽人民出版社的同志邀请我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。在本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

2007 年 7 月

目　录

第八章　多重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1. **二重积分的直接计算**　下数被称为由连续函数 $f(x,y)$ 展开成有界封闭平方域 Ω 的二重积分：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0 \\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

式中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$，$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$，而其和对于 $(x_i,y_j) \in \Omega$ 展开到 i 和 j 值.

若用不等式指定域 Ω：

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

式中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为 $[a,b]$ 区间的连续函数，则相应的二重积分可以按照下式计算：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_2(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. **二重积分中的变量代换**　若连续可微分函数

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v)$$

是 Oxy 平面上有界封闭域 Ω 在 Ouv 平面上域 Ω' 的一一映射，以及函数行列式：

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

可能除了零测度集之外，在域 Ω 内保持符号不变，则下式是正确的：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v)) \mid I \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

特别是对于按照公式 $x = r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$ 变换极坐标 r 和 φ 的情

况，得出：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

3901. 计算积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

把它看作是积分和的极限，用直线：

$$x=\frac{i}{n},\qquad y=\frac{j}{n}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

把积分域分成若干正方形，并在这些正方形的右顶点选取被积函数值.

解 用

$$x=\frac{i}{n}\qquad y=\frac{j}{n}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

将积分域分成若干正方形，则

$$\Delta x=\Delta y=\frac{1}{n}$$

其积分和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}$$

所以 $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{1}{4}.$$

3902. 用直线

$$x=1+\frac{i}{n},\qquad y=1+\frac{2j}{n}(i,j=0,1,\cdots,n)$$

把 $1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 3$，域分成若干矩形，写出此域内函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 的上 $\overline{S}$ 下 $\underline{S}$ 积分和.

当 $n\to\infty$ 时，这些和的极限等于什么？

解 上和为

$$\overline{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \frac{2n}{n^2}\Big[n + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + n$$

$$+ \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2\Big]$$

$$= \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$$

其中 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

下和为 $\displaystyle\underline{S} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\Big[\Big(1+\frac{i}{n}\Big)^2 + \Big(1+\frac{2j}{n}\Big)^2\Big]\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$

$$= \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S} = \lim_{n\to\infty}\underline{S} = \frac{40}{3}.$$

3903. 把积分域近似为系列内接正方形，且正方形的顶点 A_{ij} 位于整数点上，并且在离坐标起点最远的那些正方形顶点上选取被积函数值，近似的计算积分：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

将所得出的结果与积分精确值进行比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3). 故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{34}} + \frac{2}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{32}}$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{37}} + \frac{2}{\sqrt{44}} + \frac{1}{\sqrt{42}} + \frac{2}{\sqrt{49}} \approx 2.469$$

即 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\approx 9.876.$$

下面来计算积分的精确值,利用极坐标来计算.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13.194.$$

将精确值与近似值作比较,显然,误差很大,其原因在于有不少不是正方形的域被忽略,因而产生较大的绝对误 3.318 及较大的相对误差 $\frac{3.318}{13.194}\approx 25\%$.

3904. 近似地计算积分 $\iint\limits_S\sqrt{x+y}\mathrm{d}S$,式中 S 是受直线 $x=0$,$y=0$ 和 $x+y=1$ 限制的三角形,用直线 $x=$ 常数,$y=$ 常数,$x+y=$ 常数把 S 域分成四个相等的三角形,且在这些三角形的重心选取被积函数值.

解 以 $x=\frac{1}{2}$,$y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=\frac{1}{2}$ 分域 S 即得四个相等的三角形,它的面积均为

$$\Delta S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

重心为 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$,$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$,$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$ 及 $\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$,于是,此积分的近似值为 $\iint\limits_S\sqrt{x+y}\mathrm{d}S$

$$=\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)$$

$$\approx\frac{1}{8}(0.577+0.816+1.826)\approx 0.402.$$

3905. 把 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 域分成有穷个直径小于 δ 的可求积的子域 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$.

当 δ 为什么样的值时将保证以下不等式成立:

$$\left|\iint_S \sin (x+y)\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin (x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001$$

式中$(x_i,y_i)\in \Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为ω_i,则

$$\left|\iint_S \sin(x+y)\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i\Delta S_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]\mathrm{d}S\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|\mathrm{d}S$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}\omega_i\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta S_i$$

由于域$S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$的面积为π,故只要$\omega_i<\dfrac{0.001}{\pi}$即可,

而
$$\omega_i=\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|\sin(x'_i+y'_i)-\sin(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|(x'_i+y'_i)-(x_i+y_i)|$$

$$\leqslant\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}[|x'_i-x_i|+|y'_i-y_i|]$$

$$\leqslant 2\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}\sqrt{(x'_i-x_i)^2+(y'_i-y_i)^2}=2\delta_i$$

故只要取

$$\delta<\frac{1}{2\pi}\times 0.001\approx 1.6\times 10^{-4}$$

则有
$$\left|\iint_S(\sin(x+y))\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001.$$

计算积分:

3906. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y.$

解 $$\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy = \int_0^1 \left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 dx$$

$$= \int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(x^2+x)\Big|_0^1 = 1.$$

3907. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x xy^2 dy.$

解 $$\int_0^1 dx\int_{x^2}^x xy^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{3}xy^3\Big|_{x^2}^x dx$$

$$= \int_0^1\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx = \frac{1}{40}.$$

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr.$

解 $$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

3909. 若R—矩形:$a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B$,并且函数$X(x)$和$Y(y)$在相应区间是连续的,证明不等式:

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证 将二重积分化为二次积分即得

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy$$

$$= \int_0^A dx\int_0^B X(x)Y(y)dy = \int_0^A X(x)dx\int_0^B Y(y)dy.$$

3910. 若 $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$,计算:

$$I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy$$

解 $$I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy = \int_a^A F'_x(x,y)\Big|_b^B dx$$

$$= \int_a^A [F'_x(x,B)-F'_x(x,b)]dx$$

$$= F(x,B)\Big|_a^A - F(x,b)\Big|_b^A$$

$$= F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b).$$

3911. 令 $f(x)$ 为在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 的连续函数，证明不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

式中：当且仅当 $f(x) =$ 常数时等号才成立.

提示：研究积分：

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$$

证 因为

$$0 \leqslant \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$+ (b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y$$

所以 $$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

当 $f(x)$ 为常数时，显然上式中等号成立. 反之，设上式中等号成立，则 $$0 = \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_S [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$$

其中 $$S = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b\}$$

$$F(x,y) = [f(x)-f(y)]^2$$

为 S 中的非负连续函数，若存在 $(x_0,y_0) \in S$ 使得 $F(x_0,y_0) > 0$，则存在一个包含 (x_0,y_0) 的小区域 (ΔS)，使得当 $(x,y) \in (\Delta S)$ 时

$$F(x,y) > \frac{F(x_0,y_0)}{2}$$

从而 $$I \geqslant \iint\limits_{(\Delta S)} F(x,y) > \frac{F(x_0,y_0)}{2}\Delta S > 0$$

矛盾.因此,在 S 上,$F(x,y)\equiv 0$,即 $f(x)=$ 常数.

3912. 积分具有什么样符号:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)\,dxdy$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy$;

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)\,dxdy$?

解 (1) 因为

$$0\leqslant x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1$$

所以当 $|x|+|y|<1$ 时

$$\ln(x^2+y^2)<\ln 1=0$$

故
$$\iint\limits_{|x|+|y|}\ln(x^2+y^2)\,dx<0.$$

(2) 显然有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy=I_1-I_2-I_3$$

其中
$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{x^2+y^2-1}\,dxdy$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt{x^2-y^2-1}\,dxdy$$

当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时

$$0\leqslant\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\leqslant 1$$

故
$$0<I_1<\pi$$

同样
$$I_2>0$$

$$I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}dxdy=4\pi-2\pi=2\pi$$

因此 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy<0.$

(3) $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}}\arcsin(x+y)dxdy+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)dxdy$$

由对称性知，上式第一个积分为零，在第二积分中，被积函数在积分域中为非负且不恒为零的连续函数，因而积分值是正的. 因此，原积分是正的.

3913. 在正方形中

$$0\leqslant x\leqslant \pi,\qquad 0\leqslant y\leqslant \pi$$

求函数 $f(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y$ 的平均值.

解 平均值为

$$I=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant \pi\\ 0\leqslant y\leqslant \pi}}\sin^2 x\cdot\sin^2 y\,dxdy=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^\pi\sin^2 x\,dx\right]^2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

3914. 利用中值定理评价积分：

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$$

解 因为积分域的面积为 200，故由积分中值定理有

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}$$

其中 (ξ,η) 是域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 中的一个固定点，显然

$$0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 0$$

下面证明

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$$

事实上 $\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$ 为有界闭区域 $|x|+|y|\leqslant 0$ 上的连

续函数，且

$$\frac{1}{102} \leqslant \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \leqslant \frac{1}{100}$$

如果

$$\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$$

则 $$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\left(\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0$$

而 $$f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102}$$

是非负的连续函数，从而

$$f(x,y)\equiv 0 \qquad (|x|+|y|\leqslant 0)$$

即 $$\cos^2 x+\cos^2 y\equiv 2 \qquad (|x|+|y|\leqslant 10)$$

这显然是不可能的. 故

$$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$$

同样 $$\cos^2\xi+\cos^2\eta>0$$

从而有 $$\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100}$$

即 $$1.96<I<2.$$

3915. 求圆

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$$

上的点到坐标起点之间的距离的平方平均值.

解 平均值为

$$I=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}\int_{b-R}^{b+R}\mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{R^2-(y-b)^2}}^{a+\sqrt{R^2-(y-b)^2}}x^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3\pi R^2}\int_{b-R}^{b+R}\left[(a+\sqrt{R^2-(y-b)^2})^3\right.$$

$$-(a-\sqrt{R^2-(y-b)^2})^3\Big]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3\pi R^2}\Big[6a^2\int_{b-R}^{b+R}\sqrt{R^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$+2\int_{b-R}^{b+R}[R^2-(y-b)^2]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y\Big]$$

$$=\frac{2a^2}{\pi R^2}\Big[\frac{y-b}{2}\sqrt{R^2-(y-b)^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{y-b}{R}\Big]\Big|_{b-R}^{b+R}$$

$$+\frac{2}{3\pi R^2}\Big\{\frac{y-b}{8}[5R^2-2(y-b)^2]\sqrt{R^2-(y-b)^2}$$

$$+\frac{3R^4}{8}\arcsin\frac{y-b}{R}\Big\}\Big|_{b-R}^{b+R}$$

$$=\frac{2a^2}{\pi R^2}\cdot\frac{R^2}{2}\pi+\frac{2}{3\pi R^2}\cdot\frac{3R^4}{8}\pi$$

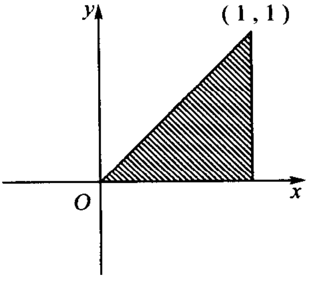
$$=a^2+\frac{R^2}{4}$$

同理有 $\displaystyle\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b^2+\frac{R^2}{4}$

于是 $\displaystyle I=a^2+b^2+\frac{R^2}{2}.$

在 3916—3922 题中，在二重积分 $\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中对于所指定的域 Ω，按照不同的顺序安置积分的上下限.

3916. Ω— 带有顶点 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$ 的三角形.



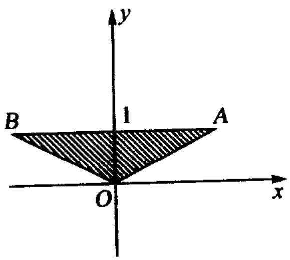
3916 题图

解　为方便起见，以 I 记二重积 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

3917. Ω 为带有顶点 $O(0,0)$，$A(2,1)$，$B(-2,1)$ 的三角形.

解　如 3917 题图所示



3917 题图

OA 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$

OB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x$

于是　$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-2y}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$$

3918. Ω 为带有顶点 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,2)$，$C(0,1)$ 的梯形.

解　如 3918 题图所示

BC 的方程为 $y=x+1$，所以

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{y-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$