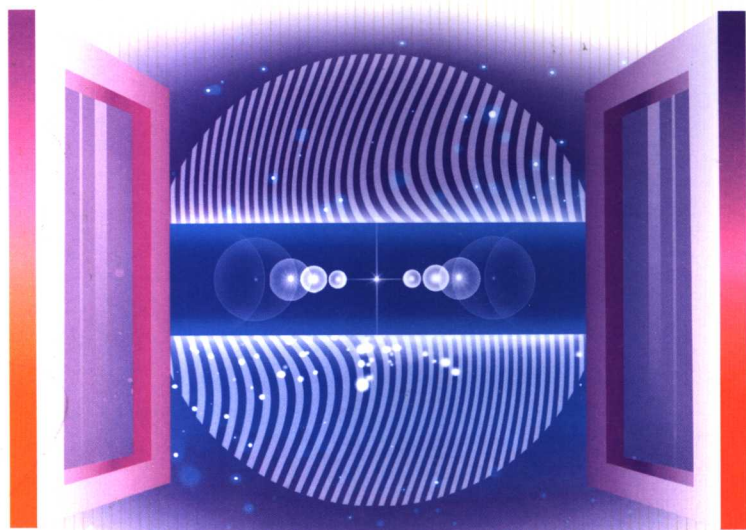


傅里叶光学与现代光学基础

Fundamentals of Fourier Optics and Contemporary Optics

© 谢敬辉 廖宁放 曹良才 编著

光
学
工
程



043/47

2007



北京理工大学 211工程
研究生规划教材

傅里叶光学与现代光学基础

光
学
工
程

Fundamentals of Fourier Optics and Contemporary Optics

◎ 谢敬辉 廖宁放 曹良才 编著



内 容 简 介

本书系统而深入地介绍了傅里叶光学和现代光学的基本概念、基础理论,以及在几个重要研究领域的应用。全书内容共分七章,其中第一章和第二章内容包括了从波动光学过渡到现代变换光学的主要基础理论,第三章到第七章则分别介绍了光学传递函数、全息术、光学信息处理、光学信息存储、傅里叶光谱技术的系统知识和最新进展。为便于读者深入理解并掌握主要的知识点,各章都编配了数量适当的习题。

本书是北京理工大学“211工程”研究生规划教材,可作为高等院校光学、光学工程、光信息科学与技术、电子科学与技术、测控技术与仪器等学科的研究生教材,同时也可供大学物理类光学专业、光学信息专业、仪器仪表专业的本科高年级学生选学,以及相关领域的科技人员学习参考。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

傅里叶光学与现代光学基础 / 谢敬辉, 廖宁放, 曹良才编著. —北京: 北京理工大学出版社, 2007. 9

北京理工大学“211工程”研究生规划教材. 电子信息科学类

ISBN 978-7-5640-1229-8

I. 傅… II. ①谢… ②廖… ③曹… III. ①傅里叶光学-研究生-教材 ②光学-研究生-教材 IV. 043

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第109527号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京圣瑞伦印刷厂

开 本 / 787毫米×960毫米 1/16

印 张 / 22

字 数 / 460千字

版 次 / 2007年9月第1版 2007年9月第1次印刷

印 数 / 1~3000册

定 价 / 38.00元

责任校对 / 张 宏

责任印制 / 李绍英

图书出现印装质量问题, 本社负责调换

序 言

傅里叶分析在物理学与电气工程中是早已得到广泛应用的一种工具,但自 1968 年美国斯坦福大学 Joseph W. Goodman 教授写出《傅里叶光学导论》一书,才将这种分析方法和线性理论介绍至光学领域。由此可以说在光学领域开辟了一个崭新的篇章,人们才知道可以用傅里叶分析和线性理论来分析研究光学问题,包括光的传播、衍射、成像、变换等,因此,它是信息光的理论基础。《傅里叶光学导论》一书,被人们认为是光学领域中的一本经典之著,此书已成为全世界各大学有关领域的教科书或主要参考书。

在中国的大学研究生培养计划中一般都设有“傅里叶光学和现代光学”课程。对研究生的培养,我总觉得就是“师傅领进门,修行在个人”,但进入研究生学习阶段,有的来自本专业,有的来自非本专业,因此要学一些专业基础课,傅里叶光学和现代光学就是光学专业研究生的必修课程。给研究生上课应体现出概念清楚,内容新颖,有启发性,并介绍有关参考书籍。

看了谢敬辉教授等人编著的这本《傅里叶光学与现代光学基础》,感到此书很符合概念清楚,内容新颖,有启发性,同时介绍了有关参考书籍这几个原则,而且在语言上体现了深入浅出,循序渐进,使读者易学易懂,故无疑将是一本适合研究生学习的教材。

谢敬辉教授等长期从事全息摄影、光学信息处理方面的教学、科研工作,因此,在理论联系实际和介绍最新研究成果方面,也是本书的特点之一。本人祝贺这本书的出版,并愿推荐各院校有关系和专业试用。

中国工程院院士
世界光学委员会副主席
金国藩

前 言

从 20 世纪 40 年代起,一批物理学家开始应用电子学中的通信理论和信息理论,特别是其中的傅里叶分析(频谱分析)方法来研究光学问题,包括光波的传播、光的衍射、波前的记录与再现、光学系统成像等问题,逐渐形成了现代光学的一个新的分支——傅里叶光学。激光器的发明,促进了傅里叶光学的发展,使其成为一门具有广泛用途的新学科。

光学和电子学之间,存在着一系列本质上的联系。首先,无论是通信系统还是电子系统,都是用来获取或传递信息的,只不过,前者处理的信息是时间性的(例如被调制的电压或电流波形),而后者处理的信息既包含时间性的(例如颜色),更多的则是空间性的(例如光波的复振幅或光强的分布)。但从波动的本质来看,电信号和光信号都是电磁波,只不过分属于电磁波谱中的不同波段而已。这两门学科之间的紧密联系还在于:许多电子学和光学系统都具有线性和平移不变性。对于电子系统,称为线性时间平移不变性;对于光学系统,则称为线性空间平移不变性。因此这两种系统都可以应用同样的理论和数学方法——傅里叶分析和线性系统理论来描述和处理。在电子学中,傅里叶分析方法不过是一种传统的方法,而在光学领域,则是一种崭新的方法。应用傅里叶分析的方法来处理光波的传播、波的叠加(干涉和衍射)和成像等光学现象,不仅使我们加深了对这些现象内在规律的理解,丰富了波动光学理论,而且产生了一系列具有深远意义的应用。

傅里叶光学是光学与电子学和通信理论相结合的新学科,是现代光学的核心。近年来,傅里叶光学与计算机技术、数字多媒体技术、光电技术和精密微细加工技术相结合,研究呈蓬勃发展态势,出现了许多新的研究热点,如数字全息术、数字化光信息处理、光学 CT、光学信息存储、傅里叶成像光谱技术等。为适应现代化建设和教学改革的需要,为实现创办国际知名、国内一流、高水平研究型大学的目标,我们编写了这本书。

本书是作者 20 余年来在傅里叶光学领域从事研究和教学工作的基础上编写的,其中的主要章节和习题一直作为北京理工大学光学工程、物理电子学、测控技术与仪器仪表专业的研究生教材使用,不仅包含了作者对傅里叶光学的理解和研究成果,更从金国藩、于美文、赵达尊、刘培森、邬敏贤等众多名师的研究著述和传道授业中吸取了丰富的知识和养料。本书是北京理工大学“211 工程”研究生规划教材丛书之一,是信息科学技术学院研究生学位课的选定教材,同时也可供大学仪器仪表类、电子信息科学类和理科光学类的本科高年级学生选学,以及相关领域的科技人员学习参考。全书共分七章,其中第一、二章介绍傅里叶光学的基础理论,第三至第七章则分别介绍了傅里叶光学几个相对独立的研究分支,特别是包含了目前信息科学领域最活跃的一些研究方向。第一章至第五章由北京理工大学信息科学技术学院谢敬辉撰写,第七章由北京理工大学信息科学技术学院廖宁放撰写,第六章由清华大学精密仪器与机械学系曹良才撰写。作为三位作者的

老师、中国工程院院士、世界光学委员会副主席、清华大学金国藩教授为本书作序并审阅全书。北京信息科技大学吕乃光教授和中央民族大学朱伟利教授对本书初稿进行了严格审查并提出宝贵的修改意见。金国藩教授、于美文教授、赵达尊教授、刘培森教授、袁旭昌教授、何庆声教授、宋菲君教授、孙萍副教授等为本书的撰写提供了珍贵的资料。此外，彭炯副教授和康果果博士还在绘图和文字录入方面贡献了辛勤的劳动，作者在此一并表示衷心的感谢。

由于作者学识有限，加之出书时间仓促，错误和缺陷在所难免，敬请专家指正。

编者

目 录

第一章	傅里叶光学的数理基础	1
§ 1.1	常用非初等函数与特殊函数.....	1
§ 1.2	傅里叶变换的基本概念及运算.....	22
§ 1.3	卷积和相关.....	32
§ 1.4	傅里叶变换的性质和有关定理.....	42
§ 1.5	光波的傅里叶分析.....	56
第二章	光的衍射及光学傅里叶变换	63
§ 2.1	衍射问题概述.....	63
§ 2.2	球面波衍射理论.....	65
§ 2.3	平面波角谱理论.....	79
§ 2.4	透镜的傅里叶变换性质.....	84
§ 2.5	傅里叶变换运算的光学模拟.....	91
第三章	光学成像系统的频谱分析	99
§ 3.1	二维线性系统分析.....	99
§ 3.2	光学系统的频域描述: 传递函数.....	102
§ 3.3	光学成像系统的相干传递函数.....	105
§ 3.4	光学传递函数.....	111
§ 3.5	相干与非相干成像系统的比较.....	121
§ 3.6	OTF 的计算.....	126
§ 3.7	OTF 的测量.....	130
第四章	全息术	140
§ 4.1	全息术的基本原理.....	140
§ 4.2	平面全息图理论.....	143
§ 4.3	体积全息图.....	160
§ 4.4	真彩色全息图.....	176
§ 4.5	计算机全息图.....	177
§ 4.6	全息术的应用.....	184
第五章	现代光学信息处理	201
§ 5.1	早期研究成果.....	201

§ 5.2	复数空间滤波器的综合	205
§ 5.3	光学图像识别	207
§ 5.4	改善图像质量的相干光处理技术	221
§ 5.5	非相干和部分相干光学信息处理	225
第六章	光学信息存储	245
§ 6.1	光信息存储技术概述	245
§ 6.2	光全息存储基本原理	253
§ 6.3	体全息存储系统	272
§ 6.4	体全息相关识别技术	284
第七章	傅里叶光谱技术	293
§ 7.1	傅里叶光谱技术基本理论	293
§ 7.2	成像型傅里叶光谱技术	320
参考文献		340

第一章 傅里叶光学的数理基础

傅里叶变换是现代科学技术研究中的十分重要的数学工具，在信息科学技术领域（例如电子，通信，自动控制，射电天文，遥感地理，生物医学）中有着广泛的用途。特别是在现代光学研究中，由于傅里叶分析（频谱分析）方法的引入，逐渐形成了现代光学的一个重要分支——傅里叶光学。

尽管傅里叶光学采用了和经典光学完全不同的思想方法和解析方法，即空间频谱的分析方法，但是其物理内容和所研究的对象仍然是有关光波的传播、分解与叠加（干涉，衍射，偏振）和光学系统成像的规律，只不过，由于傅里叶分析方法的引入，使得对上述现象的本质和内在规律有了更为深入的了解。并且，在激光和光电子技术的推动下，开辟了许多新的应用领域。

为了能够较深入地理解和掌握傅里叶光学的解析方法和思想方法，以便熟练地应用这种新的分析方法来研究各种具体的光学过程及现象，本章将集中介绍与傅里叶光学有关的数学基础知识和物理概念。

§ 1.1 常用非初等函数与特殊函数

在现代光学中，常用各种非初等函数和特殊函数来描述光场的分布，因此，熟悉这些函数的定义和性质，对于分析问题和解决问题具有十分重要的意义。

1.1.1 常用非初等函数

在函数论中，将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数。而初等函数则是指在自变量的定义域内，能用单一解析式对五种基本初等函数进行有限次数的四则运算和复合所构成的函数。

非初等函数是指在自变量的定义域中，不能用单一解析式表示的函数，下面介绍几种在光学变换中常用的非初等函数的定义和性质。顺便指出，下面介绍的高斯函数和 sinc 函数，严格说来并不属于非初等函数，但考虑到它们在描述光波场及其变换的作用与其他常用非初等函数类似，所以也放在本节中介绍。

1. 标准形式的一维非初等函数

(1) 矩形函数

又称为门函数，表示为 $\text{rect}(x)$ 或 $\Pi(x)$ 。

定义
$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (1-1)$$

其图形如图 1-1 所示。

由图形看出，矩形函数曲线下面积为 1，即满足 $\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x) dx = 1$ 。

在光学上，常用一维矩形函数表示狭缝衍射孔径和矩形光源等。

(2) 三角函数

表示为 $\text{tri}(x)$ 或 $\Lambda(x)$ 。

定义
$$\text{tri}(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (1-2)$$

或者
$$\text{tri}(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-3)$$

其图形如图 1-2 所示。由图看出：三角函数也具有曲线下面积等于 1 的性质，即满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{tri}(x) dx = 1$$

(3) 符号函数

又称为正负号函数，记为 $\text{sgn}(x)$ 。

定义
$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

其图形如图 1-3 所示。

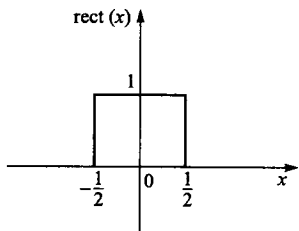


图 1-1 矩形函数

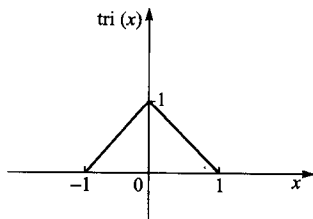


图 1-2 三角函数

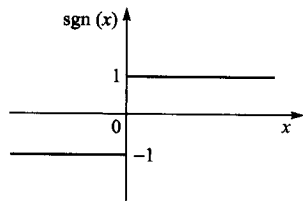


图 1-3 符号函数

(4) 阶跃函数

又称海维赛德 (Heaviside) 函数，表示为 $\text{step}(x)$ 或 $H(x)$ 。

定义
$$\text{step}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

其图形如图 1-4 所示。在光学上，常用阶跃函数表示刀口或直边衍射物体，在电子学中，则经常用来表示一个开关信号。

(5) sinc 函数
记为 $\text{sinc}(x)$ 。

定义
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (1-6)$$

其图形如图 1-5 所示，它由宽度为 2 的中央主瓣和一系列宽度为 1 的旁瓣组成。在光学上，可用它表示单缝夫琅和费衍射的复振幅分布。后面将证明，sinc 函数也具有曲线下面积为 1 的性质，即满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x) dx = 1 \quad (1-7)$$

值得注意的是，在有的文献中，给出了 sinc 函数的另一个定义：

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (1-8)$$

和式 (1-6) 比较，唯一的差别是，式 (1-8) 的定义式中自变量换成了角度。

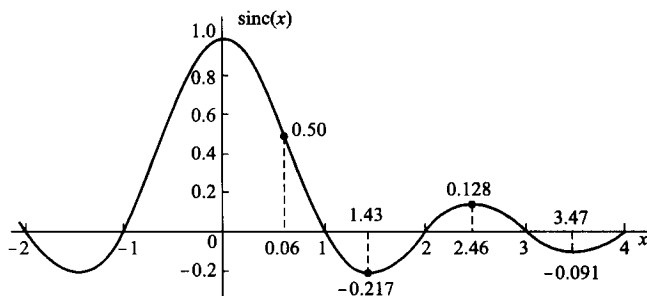


图 1-5 sinc 函数

(6) sinc^2 函数

它的定义直接由 sinc 函数的定义得出

$$\text{sinc}^2(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} \quad (1-9)$$

其图形如图 1-6 所示。在光学上它表示单缝夫琅和费衍射的辐照度分布。

(7) 高斯函数

记为 $\text{Gaus}(x)$ 。

定义

$$\text{Gaus}(x) = \exp(-\pi x^2) \quad (1-10)$$

高斯函数的图形如图 1-7 所示。

高斯函数在概率论和数理统计中表示正态分布事件的分布函数。在线性系统分析中，高斯函数是一个很有用的数学工具，它具有一些特殊的性质。首先，它的各阶导数都是连续的，因此是一个良好的平滑化函数。其次，高斯函数是一个自傅里叶变换函数，即它的傅里叶变换仍然是高斯函数。

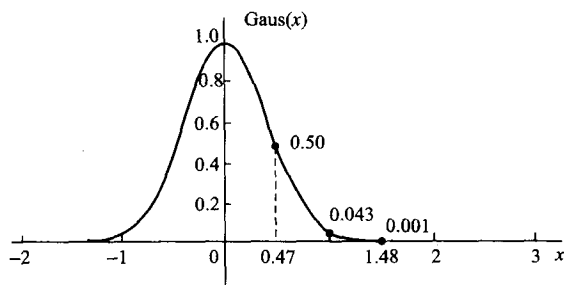


图 1-7 高斯函数

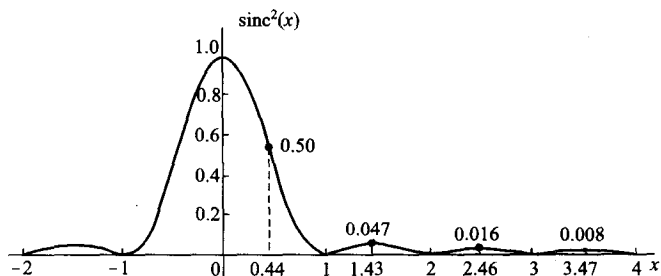


图 1-6 sinc^2 函数

上面给出了几种常用非初等函数的定义，这些定义式和某些文献的叙述略有差别，但这并不影响对问题的描述。例如，本书在非初等函数的定义式中，给出了间断点处的函数值，规定它等于该间断点处左、右极限的平均值，这样处理只不过是为了和后面介绍的傅里叶变换积分定理相呼应。但在实际运算中，可以不必考虑间断点处的函数值，也就是说可把这些点看做连续点来处理。例

如，对 $\text{rect}(x)$ 的积分，积分域可取为 $(-1/2, 1/2)$ 。

2. 一维非初等函数的一般形式

在描述复杂的物理过程时，常常需要将标准形式的非初等函数进行比例缩放、平移、反射或四则运算，构成更复杂的函数形式。

(1) 比例缩放、平移和反射

以矩形函数为例，经过比例缩放、平移和反射，一般形式的矩形函数表示为

$$f(x) = a \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{L}\right) + b = \begin{cases} a+b & \left| \frac{x-x_0}{L} \right| < \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} + b & \left| \frac{x-x_0}{L} \right| = \frac{1}{2} \\ b & \left| \frac{x-x_0}{L} \right| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1-11)$$

其图形如图 1-8 所示。定义式中各个参数的意义归纳如下：

- a ——纵向缩放因子。确定函数的纵向缩放比例；当 $a < 0$ 时，表示以 $f(x) = b$ 为轴反射；
- b ——纵向平移因子；
- x_0 ——横向平移因子；
- L ——横向缩放因子。确定函数的横向缩放比例；当 $L < 0$ 时，表示以 $x = x_0$ 为轴反射。

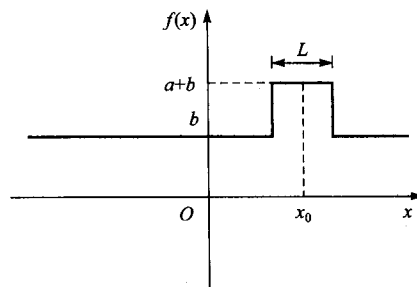


图 1-8 一般形式的矩形函数

例 1 画出函数

$$f(x) = -2\text{step}\left(\frac{x-3}{-1}\right) + 1 \text{ 的图形。}$$

为了说明各个参数的作用，作图可分为三个步骤来完成，如图 1-9 所示。

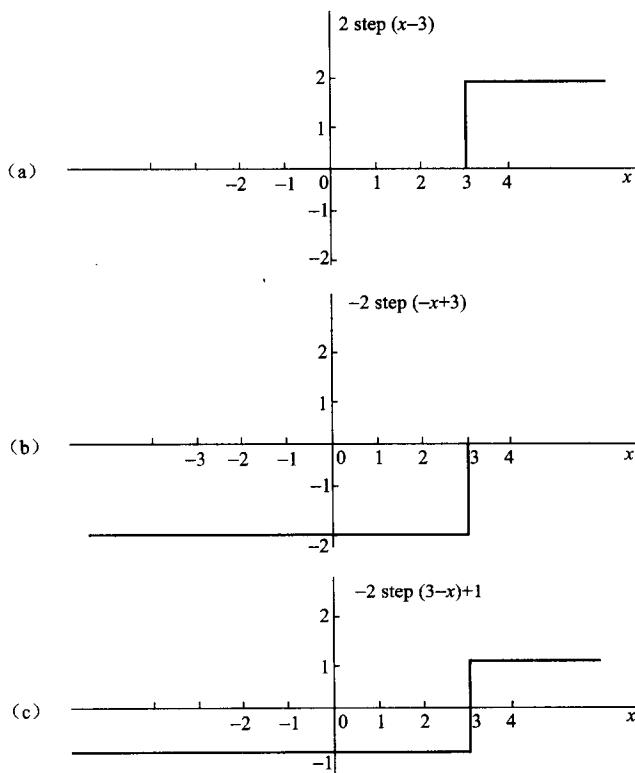


图 1-9 阶跃函数作图

有几点值得注意:

① 对于 $\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{L}\right)$, $\text{tri}\left(\frac{x-x_0}{L}\right)$, $\text{sinc}\left(\frac{x-x_0}{L}\right)$, $\text{Gaus}\left(\frac{x-x_0}{L}\right)$ 这一类以 $x=x_0$ 为轴对称的函数, 参数 L 只表示横向缩放的比例, 因而可取绝对值。

② 对阶跃函数 $\text{step}\left(\frac{x}{L}\right)$ 和符号函数 $\text{sgn}\left(\frac{x}{L}\right)$, 因为定义域为无穷大, 因此参数 L 不表示横向放大, 只表示在 $L < 0$ 时函数图形以 $x=x_0$ 为轴的反射。

(2) 非初等函数的四则运算和复合

某些复杂的光场分布可以通过非初等函数之间的四则运算或复合来描述。

例 2 用非初等函数表示图 1-10 所示的矩形调制波。

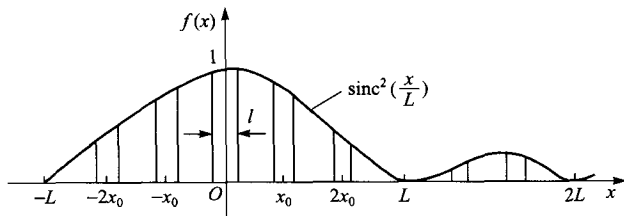


图 1-10 矩形调制波

该矩形调制波可表示为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x-nx_0}{l}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{x}{L}\right)$$

3. 常用二维非初等函数

二维物理量可在不同坐标系中描述, 选择坐标系的原则是有利于简化运算。非圆对称性物理量通常在直角坐标系中描述, 而具有圆对称分布的物理量则最好在极坐标系中描述。

如果二维函数 $f(x,y)$ 可表示为

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) \quad (1-12)$$

则称 $f(x,y)$ 为可分离变量函数。将二维可分离变量函数作为一维函数来处理, 可使运算过程简化。值得注意的是, 二维函数的可分离变量性质常与坐标系的选择有关, 例如二维矩形函数 $\text{rect}(x,y)$ 在直角坐标系 (x,y) 中是变量可分离的, 但在极坐标系 (r,θ) 中, 或当 (x,y) 坐标系旋转一个角度 α 后, 就不再具有可分离变量的性质了。

(1) 直角坐标系中的二维非初等函数

① 二维矩形函数: 二维矩形函数是直角坐标系中可分离变量函数, 其定义式为

$$\text{rect}(x, y) = \text{rect}(x)\text{rect}(y) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \text{ 和 } |y| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = |y| = 1/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-13)$$

二维矩形函数的图形如图 1-11 所示, 在光学问题中, 常用来描述一个均匀照明矩形小孔的振幅透射系数。二维矩形函数的一般表达式为

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}, \frac{y-y_0}{b}\right) = \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right) \quad (1-14)$$

它表示中心位于 (x_0, y_0) , 边长为 $a \times b$ 的均匀照明矩形孔的振幅透射系数。

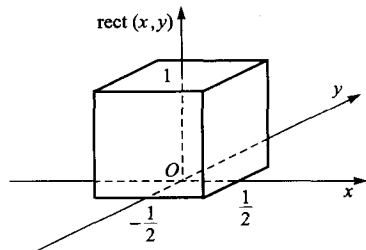


图 1-11 二维矩形函数

② 二维三角函数: 标准形式的二维三角函数定义为

$$\text{tri}(x, y) = \text{tri}(x)\text{tri}(y) = \begin{cases} (1-|x|)(1-|y|) & |x| \leq 1 \text{ 和 } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-15)$$

它的图形在 $x=0$ 或 $y=0$ 的截面是一维的三角函数, 在 $x=y$ 的截面则是一对抛物线, 构成一个曲线四棱锥图形 (如图 1-12)。

③ 二维阶跃函数: 又称为直边函数, 定义式为

$$f(x, y) = \text{step}(x) \quad (1-16)$$

它的图形如图 1-13 所示。在光学问题中, 常用它表示无穷大半平面的振幅透射系数或刀口滤波器函数。

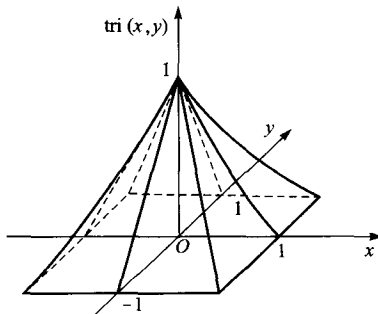


图 1-12 二维三角函数

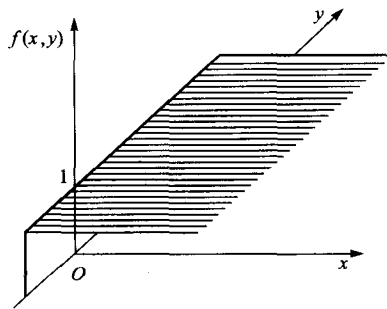


图 1-13 直边函数

(2) 极坐标系中的二维非初等函数

① 二维高斯函数: 直角坐标系中的二维高斯函数可表示为

$$\text{Gaus}(x, y) = \exp[-\pi(x^2 + y^2)]$$

由于是圆对称函数，因此也可以用极坐标表示

$$\text{Gaus}(r, \theta) = \exp(-\pi r^2) \quad (1-17)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。其分布与 θ 无关。

② 圆域函数：又称为圆柱函数，记为 $\text{circ}(r)$ 或 $\text{cycl}(r)$ ，在极坐标系中定义为

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1 & r < 1 \\ 1/2 & r = 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (1-18)$$

作为比较，同时给出在直角坐标系中的定义

$$\text{circ}(x, y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ 1/2 & \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \end{cases} \quad (1-19)$$

圆域函数的图形如图 1-14 所示。在光学问题中，圆域函数常用来描述均匀照明圆形孔径的透射系数。

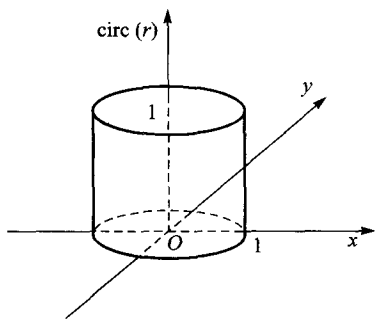


图 1-14 圆域函数

(3) 二维非初等函数的一般形式

上面介绍了几种二维非初等函数的标准形式，和一维非初等函数类似，通过函数的平移和比例缩放，可以衍生出复杂的二维非初等函数，其规则和一维情形相同。唯一的差别是，二维非初等函数可以通过自变量的坐标线性变换，产生更复杂的二维非初等函数，这在研究某些复杂的光学变换中是十分有用的（例如第五章研究的畸变不变图像识别问题）。下面介绍二维狭缝函数和二维矩形函数坐标线性变换的例子。

① 二维狭缝函数的坐标变换：设 $g(x', y') = \text{rect}(x')$ 是直角坐标系 (x', y') 中的二维狭缝函数。此函数在 x' 方向是宽度为 1 的一维矩形函数，在 y' 方向为均匀分布。对其作坐标线性变换，即令： $x' = ax + by + c$ 。则在 (x, y) 坐标系中，原来的狭缝函数表示为

$$g(x, y) = \text{rect}(ax + by + c) \quad (1-20)$$

根据矩形函数的定义

$$g(x, y) = \text{rect}(ax + by + c) = \begin{cases} 1 & |ax + by + c| < 1/2 \\ 1/2 & |ax + by + c| = 1/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-21)$$

$$\text{方程} \quad ax+by+c=\pm 1/2 \quad (1-22)$$

确定了 (x, y) 坐标系中, 该二维狭缝函数取值为 1 的区域。不难看出, 式 (1-22) 是两条平行直线方程, 它们的斜率为 $(-a/b)$, 与 x 轴的截距分别为 $(\pm 1/2 - c)/a$, 与 y 轴的截距为 $(\pm 1/2 - c)/b$ 。图 1-15 画出了当 $a > 0, b < 0, c < 0$ 时, (x, y) 坐标系中二维狭缝函数的分布, 它是一个倾斜的条带。

② 二维矩形函数的坐标线性变换: 设 $g(x', y') = \text{rect}(x')\text{rect}(y')$ 是 (x', y') 坐标系中的二维矩形函数。对其作坐标线性变换

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

于是在 (x, y) 坐标系中

$$g(x, y) = \text{rect}(a_1x + b_1y + c_1)\text{rect}(a_2x + b_2y + c_2) = \begin{cases} 1 & |a_1x + b_1y + c_1| < 1/2 \text{ 和 } |a_2x + b_2y + c_2| < 1/2 \\ 1/2 & |a_1x + b_1y + c_1| = 1/2 \text{ 和 } |a_2x + b_2y + c_2| = 1/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-23)$$

不难看出, 方程 $|a_1x + b_1y + c_1| = 1/2$ 和 $|a_2x + b_2y + c_2| = 1/2$ 是两组相交的平行线, 只要 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 两组平行线将部分重叠, 而重叠区域正是函数 $g(x, y)$ 取值为 1 的区域。图 1-16 画出了当 $a_1 > 0, a_2 > 0; b_1 < 0, b_2 > 0; c_1 < 0, c_2 > 0$ 时 $g(x, y)$ 的分布图形。通常, 二维矩形函数经过上述线性坐标变换, 将变为横截面为平行四边形的斜方柱。

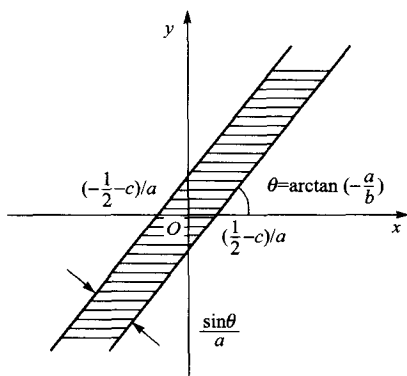


图 1-15 狭缝函数的坐标变换

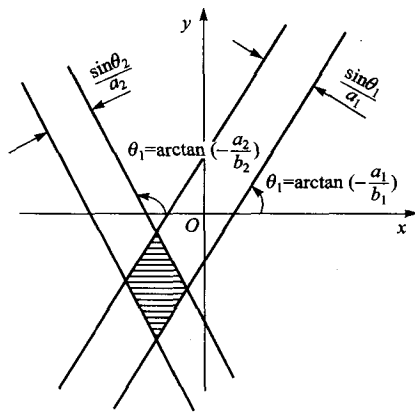


图 1-16 斜方柱函数