王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊 辉

修订版

高一数学（上）

丛书主编：王后雄
本册主编：田祥高

导航 丛书系列

中国青年出版社

教材完全解读

修订版

高一数学（上）

王后雄学案

教材完全解读

高一数学（上）

主编：田祥高

编委：孙惠君　刘杰峰
胡汉明　夏海军
姜　可　邵海建
吴小明　黄浩胜
田　军　陈　芳
占　华　余方圆
周金涛　王长发
郭倩芳　吴支明
王国华　胡清华
陈小雷

导航丛书系列

中国青年出版社

(京)新登字 083 号

图书在版编目(CIP)数据

教材完全解读：2008 年修订版. 高一数学. 上/田祥高主编. —5 版. —北京：
中国青年出版社，2007
ISBN 978－7－5006－5304－2

Ⅰ.教... Ⅱ.田... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 036740 号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　杨
封面设计：小　河

教材完全解读
高一数学

中国青年出版社 出版 发行
社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：(010)64034328
北京中青人出版物发行有限公司电话：(010)64017809
聚鑫印刷有限责任公司印制　新华书店经销
889×1194　1/16　13.5 印张　365 千字
2003 年 7 月北京第 1 版　2007 年 5 月北京第 5 版　2007 年 5 月第 11 次印刷
印数：177001—189000 册
定价：19.70 元

学考新捷径：《教材完全解读》

——中学教材诠解学生版

在现行的教育体制下，掌握教材是学习的根本。优秀的成绩源于对课堂知识的深入体会；源于对课本内容的理性认识；源于对平常知识的点滴累积。基于这种思想，X导航课研组于2003年7月隆重推出《教材完全解读》。至今已历经数次修订再版，该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

为了让您更充分地理解本书的特点，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

1 重难点聚焦

2 方法·技巧平台

3 综合·创新拓展

4 能力·题型设计

考点解读—“考试解题思维”、“答题要点”，考试解题、答题技巧尽在其中！

掌握考试题型变化趋势，体现实践、综合、创新能力。对考试能力题型设计进行了科学的探索和最新的预测。

名师诠释

讲例对照、双栏排版、双色凸现“解题思维”、“解题依据”和“答题要点”，有效地理清解题思路，提高解题效率。

点击考点

双色凸现测试要点，方便您查阅解题依据，与讲例相互印证。

当解题无措时，建议您参照提示，在“考点解读”栏中寻找解题依据和思路。

教材课后习题解答

详细解答课本课后习题——课后习题完全解密！

最新5年高考名题诠解

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

答案与提示

以高考“标准答案”为准，解题科学、精炼，帮您养成规范答题的良好习惯，使您在考试答题中避免不必要的失分。

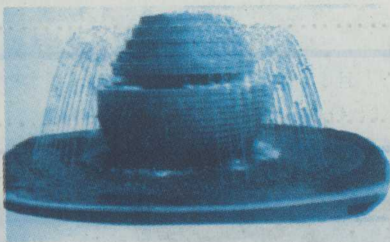
谨此，预祝您在学习和考试中取得好成绩！

《X导航·教材完全解读》丛书主编 王后雄

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

目录

目录



知识与方法

阅读索引

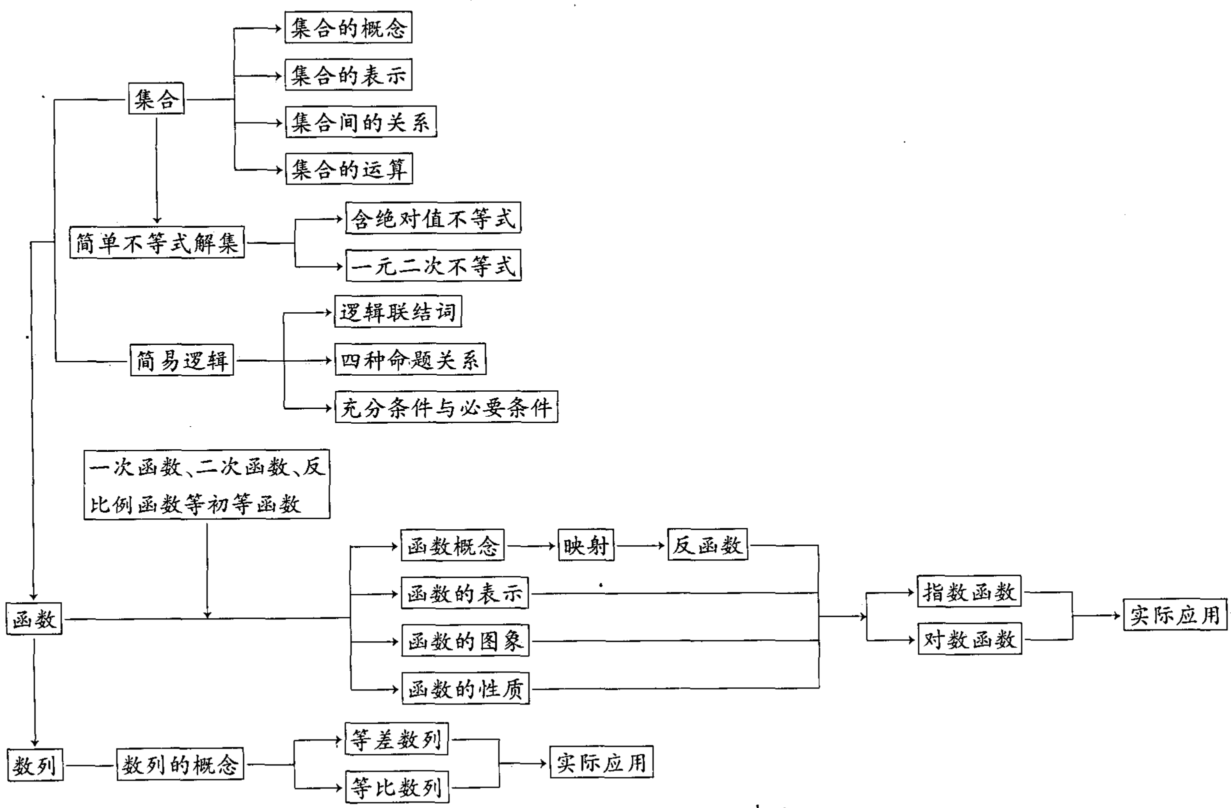
第一章　集合与简易逻辑

第二章　函数

第三章 数列

知识结构图解·名师学法指津

全书知识结构图解



学法指津

(一)地位和作用

1. 集合是近、现代数学的一个重要基础,许多重要的数学分支(如数理逻辑、实变函数等)都是建立在集合理论的基础上的,同时集合论及其所反映的数学思想在越来越广泛的领域中得到应用.逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科,学习数学需要正确地理解表述、判断和推理,这就离不开对逻辑的知识的掌握和运用.

2. 函数是中学数学最重要的知识,特别是在高中数学中,它是贯穿于高中数学的一条红线,同时也是高等数学的重要内容之一.在中学数学中,函数分三个阶段来学习:第一阶段是在初中我们所学习的函数;第二阶段是我们高一所学习的函数,它是对函数的概念的再认识,即用集合与对应的思想理解函数的一般定义,在此基础上系统地研究了函数的性质和图象,并研究了指数函数、对数函数和三角函数等基本初等函数;第三阶段安排在选修课程中,学习极限和导数.

3. 数列也是高中数学的重要内容,一方面,数列有着广泛的实际应用,如储蓄、分期付款的有关计算都要用到数列知识;另一方面,数列起着承前启后的作用,数列与前面学习的函数知识有密切地联系,同时又是学习高等数学的基础;最后,数列还是培养能力的良好的题材,学习数列,要经常观察、分析、归纳、猜想,还要综合运用前面的知识,因而它有助于能力的提高.

4. 本册书的三块知识之间内在联系:集合与简易逻辑的学习是为函数的学习打基础,为函数的学习扫除障碍,函数的现代定义是建立在集合与对应的基础之上,同时求函数的定义域、值域,研究函数的性质,都离不开解简单的不等式;数列可以看作是一个特殊的函数,因此数列是函数学习的延伸和拓展.

(二)学习要求

1. 集合与简易逻辑

(1)理解集合、子集、补集、交集、并集的概念.了解空集和全集的意义.了解属于、包含、相等关系的意义.掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

(2)掌握含绝对值不等式和一元二次不等式的解法.

(3)理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义.理解四种命题及其相互关系.掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义.

2. 函数

(1)了解映射的概念,理解函数的概念.

(2)了解函数单调性、奇偶性的概念,掌握判断一些简单函数的单调性、奇偶性的方法.

(3)了解反函数的概念及互为反函数的函数图象间的关系，会求一些简单函数的反函数.

(4)理解分数指数幂的概念，掌握有理指数幂的运算性质. 掌握指数函数的概念、图象和性质.

(5)理解对数的概念，掌握对数的运算性质. 掌握对数函数的概念、图象和性质.

(6)能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题.

3. 数列

(1)理解数列的概念，了解数列通项公式的意义. 了解递推公式是给出数列的一种方法，并能根据递推公式写出数列的前几项.

(2)理解等差数列的概念，掌握等差数列的通项公式与前 n 项和公式，并能解决简单的实际问题.

(3)理解等比数列的概念，掌握等比数列的通项公式与前 n 项和公式，并能解决简单的实际问题.

（三）学法指导

1. 联系实际

由于高一数学上册所学习的内容比较抽象（特别是集合与函数），因而在高一的数学学习中，若不注意方法，就使不少同学的数学成绩拉下来，由此丧失了学习数学的信心. 因此我们在高一的数学中要注意联系实际来理解这些抽象概念. 例如用在小学和初中所学习的求两个自然数的最小公倍数的实例来理解两个集合的交集的运算，利用一次函数、二次函数等函数模型来理解函数的单调性等等. 同时，集合与函数之所以抽象的主要原因在于它充分地运用符号语言来表述，符号语言的运用使数学具有简洁美的赞誉，但它又是我们初学的最大拦路虎，要突破这一难点，其关键在把它们具体化、形象化. 如集合的学习，利用 Venn 图来表示，就使抽象的摸不着的集合变得具体、形象了. 再如初学高中函数最大的障碍在于对抽象的函数记号的“$f(x)$”的理解，其实，在初学时，你只要把它理解为关于 x 的一个代数式，就像用字母代替数一样，如 $f(x)=2x^2-3x+1$，$f(x)=x+\frac{2}{x}-3x^2$ 等等.

2. 构建网络

数学的学习关键在于构建知识网络，也就是先要把书读厚，本书对教材中每一个知识点进行完全地详细地解读，有助于你从方方面面地理解所有知识点；同时还详细地介绍了相关的解题方法技巧，掌握了这些方法技巧将大大地提高你的解题能力，有助于你构建完整的知识网络；而且本书采用左右栏对照形式排版，右栏的“考题”的解题依据、主要考查的知识点，就在左栏中，“题型设计”中的“点击考点”暗示如何找到解题依据，以及破题的大致方向，有助于你顺利地通过模仿练习转化为自己的解题能力. 因此用好本书能使你准确理解高一数学上册的基本知识、熟练掌握基本方法，从而达到快速地将书读厚的效果.

构建网络不仅要把书读厚，更要注意把书读薄，本书在每一章之末的“单元知识梳理与能力整合”有助于你对知识和方法进行系统梳理，从而把书读薄.

3. 勤学巧练

老师讲得再好，终究不能成为你的能力，要把它变成自己的能力，这就需要你的大量练习，才能内化为自己的能力. 但不同的练习方法有“事半功倍”与“事倍功半”效果之别，因此，你不仅要勤于练习，更要善于练习. 这里告诉你几个练习的小窍门：(1)见缝插针地巧练. 在使用本书的“考题”和“例题”时，请不要先看其解答，而应把它先用纸遮住，自己先做一遍，再看解答，这样你肯定有意想不到的收获. (2)有的放矢地巧练. 大量的重复练习只是浪费时间和精力，本书中的“例题”和“练习题”都是精选于近几年各地的考试题，具有较强的针对性和代表性，有以一当十之效，而且题目新颖灵活，具有较强的覆盖性，你只要认认真真地把本书中的例题和习题完全吃透，应付期中、期末考试（乃至高考）绰绰有余，而且本书把近五年涉及到各节的高考题详细地收录到各节之中，在我们上新课之时见见这些高考题有助于我们超前备考，具有较强的前瞻性.

4. 乐于思辨

要想自己的数学能力有较大的提高，还要乐于思辨，即：

(1)思因果　解题后，要思考：在解题过程中运用了哪些知识点，已知条件及它们之间的联系，还有哪些条件没有用过，结果与题意或实际生活是否相符，求解论证过程是否判断有据、严密、完善等等. 这样可促使我们进行大胆探索，发现规律，从而激发创造性思维.

(2)思规律　解题后，要注意思考所运用的方法，认真总结规律，以达到举一反三的目的，有利于强化对知识的理解和运用，提高迁移能力.

(3)思多解　解题后，要注意思考本题有无其他解法？众多解法中哪一种最简捷？在解题中坚持采用多种解法，不仅可以锻炼我们思维的发散性，而且可以培养我们综合运用所学知识解决问题的能力和不断创新的意识.

(4)思变通　对于一道题不局限于就题论题，而要进行适当变化引申，在培养思维变通性的同时让我们的思维变得深刻流畅. 解题后，要注意把本题的解法和结论进一步推广，思考能否得到更有益的普遍性结论——举一反三，多题一解？一题变多题，有利于开阔眼界，拓宽思路，提高应变能力，防止思维定势的负面影响.

(5)思归类　做题的目的在于做完题后的归纳总结，把各种题目分门别类. 解题后，回忆与该题同类的习题，进行对比，分析其解法，找到解这一类题的技巧和方法，从而达到触类旁通的目的，久而久之便能形成技巧，解题效率自然会大大提高.

(6)思错误　解题后，要思考题中易混易错的地方，总结教训，提高辨析错误的能力，就能不断丰富、完善自己. “错误是最好的老师”，建议你准备一个本子，专门收集做错的题，并认真地纠正错误，当然，更重要的是寻找错因，及时进行总结，三、五个字，一、两句话都行，言简意赅，切中要害，以利于吸取教训，力求相同的错误不犯第二次.

5. 关注新课标

普通高中课程标准的实施势在必行，因此，我们所使用的教材正处在向新课标教材过渡的时期，而在过渡时期的高中数学的教学和高考也尽量地向新课标靠拢，从 2004 年起的高考中就已经充分体现了新课标的教学理念，而且在命题时还常以新课标教材中某些知识或材料（现行教材上没有的）作为命题背景来设计相关的试题，因此我们有必要关注新课标. 本书的这次修订版不仅在讲解知识点和方法时充分地体现了新课标理念，而且在每一章的“单元知识梳理与能力整合”之后的“新课标借鉴”中名副其实地介绍新课标，它比较了每一章知识在新课标中的差异，特别介绍了新课标中新增的内容，这些知识不仅开拓了我们的视野，更有助于我们能力的提高.

最后祝愿你顺利地跨越高一数学上册的所有障碍，使数学成为你走向光辉的明天的有力工具，衷心祝愿你在 2010 年的高考中取得优异的成绩！

第一章 集合与简易逻辑

大纲单元知识

1. 本章主要内容

本章共分两大节:集合;简易逻辑.

(1)集合:集合语言是现代数学的基本语言,通过对本章集合的学习,我们将学习集合的一些基本知识,用集合语言表示有关数学对象.集合的初步知识与其他知识内容有着密切的联系,是学习、掌握和使用数学语言的基础.教材中通过从熟悉的集合(自然数集,有理数集等)出发,给出了元素、集合的定义.通过类比实数间的大小关系、运算引入集合的关系以及子集、全集等集合的概念.

在集合后安排了一元一次不等式、一元一次不等式组、绝对值不等式和一元二次不等式的解法.并用集合表示不等式的解.

(2)简易逻辑:首先给出了逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义,介绍判断含"或"、"且"、"非"的复合命题的真假方法,在初中的基础上,结合四种命题的知识,进一步讲解反证法、充分条件、必要条件、充要条件的知识.

2.《考试大纲》要求.

(1)理解集合、子集、补集、交集、并集的概念.了解空集和全集的意义.了解属于、包含、相等关系的意义.掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

(2)掌握含绝对值的不等式和一元二次不等式的解法,会解含绝对值的不等式和一元二次不等式.

(3)理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义.理解四种命题及其相互关系.掌握充要条件的意义.

3. 本章学法指导

学习本章内容时,要注意与初中内容的衔接.在学习集合这部分内容时,注意利用图形的直观作用来理解集合的知识.通过对实例理解抽象概念,培养抽象思维能力.通过类比的方法比较意义相近或有从属关系的概念.注意相应符号的记忆掌握.随着后续章节的学习,对集合与逻辑知识的应用越来越广泛,理解和掌握的水平也就越来越好.

高考命题趋向

1. 集合的包含关系与集合的运算.这类试题又包含两类,一是考查具体集合间关系或具体集合的运算,解答这类问题应注意把抽象问题具体化、形象化;二是抽象集合(不知道集合含有哪些元素)间的关系与运算,解答这类问题,有时可借助图示法把它形象化.

2. 充要条件的判定以及命题真假的判定.而在考查命题知识的同时,主要考查命题转换、逻辑推理和分析问题的能力.

3. 集合与简易逻辑常作为载体或中间过程与其他知识相互渗透、综合考查,特别是把对逻辑知识的考查常融入具体的数学问题之中.这类试题要求考生有较好的、较全面的基础知识,能进行简单的逻辑推理,一般难度不大.

4. 含绝对值的不等式和一元二次不等式的解法主要是以工具的形式出现在高考试题中,是高考的热点、重点考查对象,有时也命制单独考查不等式解法的选择题、填空题.

1.1 集　合

1 重难点聚焦

1. 集合的概念

集合是数学中最原始的不定义的概念,只能给出描述性说明:某些指定的对象集在一起就成为一个集合.组成集合的对象叫元素.集合常用

名师诠释

◇[考题1] 以你所在的学校为例,举几例说明哪些对象能组成一个集合,哪些对象不能组成一个集合.

[解析] 看一组对象能否组成集合,关键是看这组对象是否是确定的,即任何一个对象,要么在这一组之中,要么不在,而没有第三种情况.例如:

大写字母$A,B,C,\cdots$来表示,元素常用小写字母$a,b,c,\cdots$来表示.

集合是一个确定的整体,因此对集合也可以这样描述:具有某种属性的对象的全体组成一个集合.

注意(1)对于集合我们一定要从整体的角度来看待它.例如由"我们班的同学"组成的一个集合A,则它是一个整体,也就是一个班集体,也可以用我们班的序号来代替它.

(2)要注意组成集合的"对象"的广泛性:一方面,任何一个确定的对象都可以组成一个集合,如人、动物、物体、数、方程,不等式等都可以作为组成集合的对象;另一方面,就是集合本身也可以作为集合的对象,如上面所提到的集合A,可以作为以"我们高一年级各班"组成的集合B的元素.

(3)构成集合的对象必须是"确定"的且"不同"的.其中"确定"是指构成集合的对象具有非常明确的特征,这个特征不是模棱两可的;"不同"是指构成集合的各个对象互不相同.

特殊数集的表示:$\mathbf{N}^*=\{$正整数$\}$,$\mathbf{N}=\{$自然数$\}$,$\mathbf{Z}=\{$整数$\}$,$\mathbf{Q}=\{$有理数$\}$,$\mathbf{R}=\{$实数$\}$.

2. 元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于与不属于两种:元素a属于集合A,记作$a\in A$;元素a不属于集合A,记作$a\notin A$或$a\overline{\in}A$.

注意(1)符号"$\in$"及"$\notin$"表示元素与集合之间的关系,即属于与不属于.它不能表示集合与集合之间的关系.

(2)$a\in A$与$a\notin A$取决于a是不是集合A中的元素,根据集合中元素的确定性,可知对任何a与A,$a\in A$与$a\notin A$这两种情况有且只有一种成立.

例如:用符号$\in$与$\notin$填空:

0 ____ $\mathbf{N}^*$;$\sqrt{3}$ ____ $\mathbf{Z}$;0 ____ $\mathbf{N}$;$(-1)^0$ ____ $\mathbf{N}^*$;$\sqrt{3}+2$ ____ $\mathbf{Q}$;$\dfrac{4}{3}$ ____ $\mathbf{Q}$.

分析:要注意字母所表示集合的含义.

解答:$0\notin\mathbf{N}^*$;$\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$;$0\in\mathbf{N}$;$(-1)^0\in\mathbf{N}^*$;$\sqrt{3}+2\notin\mathbf{Q}$;$\dfrac{4}{3}\in\mathbf{Q}$.

3. 集合元素特征

(1)元素的确定性:设A是给定的一个集合,a是某一具体对象,则a或者是A的元素或者不是A的元素.两种情况必有一种且只有一种成立.例如:元素-2是方程$x^2+3x+2=0$所有实数根所组成集合的元素,而2不是其集合的元素.

(2)元素的互异性:对于给定的集合中任意两个元素都是不同的,即元素不能重复.如方程$x^2-4x+4=0$的根构成的集合只有2一个元素,不能出现有两个重复的元素2,2.

(3)元素的无序性:在给定的集合中元素之间无顺序关系,即集合中的两元素交换次序后所得的集合与原来的集合是同一个集合.如由2和

(1)"我所在班上的男同学"能组成集合;

(2)"班上高个子同学"就不能组成集合,因为"高个子"没有确定的标准;

(3)"我们学校一年级所有班"能组成集合.

[点评] 判断一组对象能否组成一个集合,关键是看是否有一个明确的标准,用来判定任何一个对象是否在这个集合中.

◈[考题2] 下列各组对象组成的集合中元素是什么类型的对象?

(1)1,2,3,4,5,6,7,8,9;(2)方程$x^2=1$的解;(3)平行四边形的全体;

(4)平面内与一个定点O距离等于定长$r(r>0)$的点的全体;

(5)一元二次方程的全体;(6)某校高一(2)班全体同学.

[解析] (1)中的集合是由大于0且小于10的整数所组成的集合,它的元素是自然数;由于方程$x^2=1$的解为$x=\pm1$,所以(2)中的集合是由-1和1所组成的集合,它的元素是整数;(3)中是由所有的平行四边形所组成的集合,其中每一个平行四边形都是这个集合中的元素;(4)中是由平面内以O为圆心、r为半径的圆上的点所组成的集合,它的元素是点;(5)中是由所有一元二次方程所组成的集合,它的元素是方程;(6)中是由某校高一(2)班全体同学所组成的集合,它的元素是人.

[解答] (1)(2)中元素是"整数";(3)中元素是"平行四边形";(4)中的元素是"点";(5)中元素是"方程";(6)中元素是"人".

[点评] 由本例可知,构成集合的元素具有广泛性,只要是确定的对象即可,如由确定的数、式、点、方程、函数、人、用品、文具……均可构成某个集合的元素.

◈[考题3] 用符号$\in$与$\notin$填空(其中A是由满足$y=x^2+1$且$x\in\mathbf{N}$的实数y所组成的集合,B是由抛物线$y=x^2-2x+2$上的点所组成的集合):

(1)0 ____ A;3.5 ____ A;10 ____ A;$(1,2)$ ____ A.

(2)$(0,0)$ ____ B;$(1,1)$ ____ B;2 ____ B.

[解析] 本题解题的关键是弄清集合由哪些元素所构成.

[解答] (1)$\because$ 集合A是由满足"$y=x^2+1$且$x\in\mathbf{N}$"的实数y所组成的集合,而x分别取$0,1,2,3,4,5,\cdots$,y取$1,2,5,10,17,26,\cdots$. $\therefore 0\notin A$;$3.5\notin A$;$10\in A$;$(1,2)\notin A$.

(2)$\because$ 集合B是由抛物线$y=x^2-2x+2$上的点所组成的集合,而$x=0$时,$y=2$;$x=1$时,$y=1$;2是数而不是点. $\therefore (0,0)\notin B$;$(1,1)\in B$;$2\notin B$.

[感悟规律] 要确定元素与集合的关系,只需看元素是否在集合中,首先确定元素是否具备集合所具有的形式,其次,看元素是否具备集合所具有的特征(属性),这就需要把较为抽象复杂的集合具体化、形象化,如本例(1),集合A的元素形式是数,而$(1,2)$是有序实数对,即点的坐标,因此$(1,2)$不在A中;而要判断数0、3.5、10与A的关系,就需要先把集合A具体化,从而弄清构成的元素是哪些,这样就能顺利地确定0、3.5、10与A的关系.

◈[考题4] 由对象x,x^2-x,x^3-3x能组成一个集合吗?如果能组成一个集合,则说明理由;如果不能,则需要添加什么条件,使它组成一个集合.

[解析] 它不一定能表示成一个集合,因为x,x^2-x,x^3-3x之间有可能相等,因而不一定满足元素的互异性.

由$x=x^2-x$,得$x=0$或$x=2$;

由$x=x^3-3x$,得$x=0$或$x=\pm2$;

由$x^2-x=x^3-3x$,得$x=0$或$x=2$或$x=-1$.

故只需要添加条件$x\neq0$且$x\neq-1$,且$x\neq2$,且$x\neq-2$,

则$\{x,x^2-x,x^3-3x\}$能表示成一个集合.

[点评] 集合的元素所必须具备的"三性"有着广泛的应用,在解题时,特别是在题目解答快完毕时,我们必须问问自己,这里的集合的元素是否满足"三性".

3 构成的集合与方程$(x-2)(x-3)=0$的根构成的集合是同一个集合.

集合的元素必须具备确定性、互异性、无序性;反过来,一组对象若不具备这三性,则这组对象也就不能构成集合.

集合的元素的"三性",既是解决有些问题的切入点,又是我们解题的疏忽点、易错点.

4. 集合的分类

按集合的元素个数的多少,可分为有限集、无限集.

空集就是不含任何元素的集合,空集可用"$\varnothing$"或"{ }"表示.

注意 (1)空集就像一个无处不在的幽灵,要处处设防,时刻提高警惕,才不至于掉进空集这一陷阱之中.

(2)由于$\varnothing$中没有元素,即 0 个元素,规定它属于有限集.空集虽不含任何元素,可它却有两个方面的作用:

①空集客观地反映了一些问题的实际意义.如方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x+y=2\end{cases}$的解的集合就是空集;又如,不等式$x^2<0$的解的集合也是空集.

②空集在反映集合与集合之间的关系上起到"桥梁"的作用,使一些难以表达的问题得到简明扼要的表达.如由直线$x+y=4$上的点组成的集合A,由抛物线$y=-x^2$上的点组成的集合B,则由A与B的公共元素组成的集合可简记为$\varnothing$.

2 方法——技巧平台

5. 列举法

用列举法表示集合,就是把集合的元素一一列举出来,并写在大括号内.

注意 用列举法表示集合时,必须注意如下几点:(1)元素与元素之间必须用","隔开;(2)集合的元素必须是明确的;(3)不必考虑元素出现的先后顺序;(4)集合的元素不能重复;(5)集合的元素可以表示任何事物;(6)对含有较多元素的集合,如果构成该集合的元素具有明显的规律,可用列举法表示,但是必须把元素间的规律显示清楚后,才能用省略号表示,如$\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$.

6. 描述法

描述法就是把集合的元素所具有的属性叙述出来,并写在大括号内,它又分为:(1)文字描述法——用文字把元素所具有的属性描述出来,如{自然数};(2)符号描述法——用符号把元素所具有的属性描述出来,即$\{x\mid p(x)\}$或$\{x\in A\mid p(x)\}$等.

◈[考题5] 设集合A是由k^2-2k和$2k$构成的集合,求实数k的取值范围.

[解析] 集合的元素应具有互异性,利用互异性可求解.

[解答] 根据集合元素的互异性,有$k^2-2k\neq 2k$,解得$k\neq 0,k\neq 4$.

$\therefore$ 实数k的取值范围是不等于 0 且不等于 4 的实数.

[点评] 集合元素的特性(特别是互异性)是解决有些问题的切入点.如本例由集合的元素的互异性找到不等式$k^2-2k\neq 2k$,从而使问题顺利地解决.

◈[考题6] 下列各组对象能否形成集合?若能,请指出它们是有限集,无限集,还是空集.

(1)非负奇数;(2)小于 18 的既是奇数又是质数的数;(3)方程$(x^2-1)\cdot(x^2+2x+1)=0$的解;(4)平面直角坐标系内所有第三象限的点.

[解析] 先确定各组对象能否构成集合,再看它的元素个数的多少,从而确定它是怎样的集合.

[解答] (1)能,无限集;

(2)小于 18 的质数是 2,3,5,7,11,13,17. 只有 2 为偶数,所以能形成集合,有限集;

(3)能,注意集合中元素的互异性,集合中的元素是$-1,1$,有限集;

(4)第三象限的点的横坐标和纵坐标都小于 0,能形成集合,无限集.

[点评] 判断集合是有限集,无限集,还是空集,关键在于弄清集合的元素的构成,从而确定集合的元素个数的多少.

◈[考题7] 求方程$x^2-2ax+a^2-a+3=0$的实数根所组成的集合的元素个数.

[解析] 方程可能有两个不相等的实根,或两个相等的实根或无实数根.

[解答] $\because \Delta=4a^2-4(a^2-a+3)=4(a-3)$,

$\therefore$ ①当$a>3$时,$\Delta>0$,方程有两个不相等的实根,即所求元素个数为 2;②当$a=3$时,$\Delta=0$,方程有两个相等的实根,即所求元素个数为 1;③当$a<3$时,$\Delta<0$,方程无实根,即所求元素个数为 0.

[点评] (1)解答本题要注意讨论,千万别掉进空集这一隐形的陷阱之中.

(2)在推导一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的求根公式过程中,配方后得$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$,只有当$b^2-4ac\geqslant 0$时,才能两边开平方,因此我们把$b^2-4ac$叫做一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的判别式,即

①当$\Delta=b^2-4ac>0$时,方程有两个不相等的实根$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

②当$\Delta=b^2-4ac=0$时,方程有两个相等的实根$x=-\dfrac{b}{2a}$;

③当$\Delta=b^2-4ac<0$时,方程没有实数根.

◈[考题8] 用列举法表示下列集合:

(1)不大于 10 的非负偶数集;

(2)自然数中不大于 10 的质数集;

(3)$\left\{x\ \middle|\ x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b},a,b\text{ 为非零实数}\right\}$.

[解析] (1)因为不大于 10 是小于或等于 10;非负是大于或等于 0 的意思,所以不大于 10 的非负偶数集是$\{0,2,4,6,8,10\}$.

(2)在自然数中,除 1 外只能被 1 和本身整除的数叫质数,1 既不是质数也不是合数,2 是质数,所以答案为$\{2,3,5,7\}$.

(3)关键是根据绝对值的意义化简$x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}$,当$a>0,b>0$时,$x=2$;当$a<0,b<0$时,$x=-2$;当$a,b$异号时,$x=0$,故用列举法表示为$\{-2,0,2\}$.

[点评] 列举法的优点是元素清晰可见,一目了然;缺点在于不易看出元素所具有的属性.

注意(1)用符号描述法表示集合时注意：弄清元素所具有的形式(即代表元素是什么)，是数、还是有序实数对(点)、还是集合、还是其他形式？元素具有怎样的属性？当题目中用了其他字母来描述元素所具有的属性时，要去伪存真，而不能被表面的字母形式所迷惑.

(2)用描述法表示集合时，若需要多层次描述属性时，可选用逻辑联结词“且”与“或”等联结；若描述部分出现元素记号以外的字母时，要对新字母说明其含义或指出其取值范围.

例：用描述法表示下列集合：

$$\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7}\right\}.$$

解：集合 $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7}\right\}$ 可以写成 $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7}\right\}$，因而用描述法表示为 $\left\{x\ \middle|\ x=\frac{n}{n+2},n\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }n<6\right\}$.

思考：用描述法表示集合的优、缺点在哪里？

描述法突出了元素所具有的属性，其中文字描述法通俗易懂；而符号描述法则简洁概括，但有点抽象，不易看出集合中到底有哪些元素.

(3)解决用符号描述法表示的集合的问题时，首先要弄清元素所具有的形式；其次透过符号的表象，弄清元素到底具有怎样的属性．这就需要仔细审题，透彻地理解题意，有时还需要借助特殊值的探讨方能顺利地解决问题.

7. **Venn 图法**

Venn 图法就是用一条封闭的曲线圈成一个区域来表示一个集合．如集合 $A=\{2$ 的倍数$\}$ 和 $B=\{3$ 的倍数$\}$ 可表示为图 1－1－1.

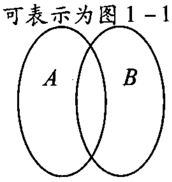


图1－1－1

Venn 图法又称为图示法、韦恩图法、文氏图法等.

8. **集合表示的常见错误**

使用列举法和描述法表示集合最容易出现下述两类错误：

一是没有弄清集合的元素所具有的形式，就胡乱表示.

例：用列举法写出由 $1,2,x^2-9=0$ 组成的集合.

错解：$\{1,2,3,-3\}$.

解析：这里错在把 $x^2-9=0$ 中的“x”可取的值当作是元素，事实上一个集合中的所有元素并

◈［考题 9］ 用描述法表示下列集合：

(1)使 $y=\frac{1}{x^2+x-6}$ 有意义的实数 x 的集合；

(2)坐标平面上第一、三象限上点的集合；

(3)函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象上所有点的集合；

(4)方程 $x^2+(m+2)x+m+1=0(m\in\mathbf{Z})$ 的解集.

［解析］ 用符号描述法来表示，因此首先要弄清元素所具有的形式，从而写出其代表元素，再确定元素所具有的属性即可.

［解答］ (1)要使 $y=\frac{1}{x^2+x-6}$ 有意义，则有 $x^2+x-6\neq0$，则有 $x\neq2$ 且 $x\neq-3$，故可写成 $\{x|x\neq2\text{ 且 }x\neq-3,x\in\mathbf{R}\}$.

(2)第一、三象限上的点的特征是纵、横坐标符号相同，因而可写成 $\{(x,y)|xy>0\text{ 且 }x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

(3) $\{(x,y)|y=ax^2+bx+c,x\in\mathbf{R},a\neq0\}$.

(4) $\{x|x^2+(m+2)x+m+1=0,m\in\mathbf{R}\}$.

［点评］ 用特征性质描述法表示集合时，还要注意确定和简化集合的元素所具有的共同特征(或所具有的属性).

◈［考题 10］ 用列举法表示下列集合：

(1) $P=\left\{x\in\mathbf{N}\ \middle|\ \frac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}\right\}$；(2) $Q=\left\{\frac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}\ \middle|\ x\in\mathbf{N}\right\}$.

［解析］ 集合 P、Q 中元素的形式不一致，要正确认识.

［解答］ (1)$\because$ $x\in\mathbf{N}$，且 $\frac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}$，$\therefore$ $1+x=1,2,3,6$，

$\therefore$ $x=0,1,2,5$. $\therefore$ $P=\{0,1,2,5\}$.

(2)结合(1)知，$\frac{6}{1+x}=6,3,2,1$. $\therefore$ $Q=\{6,3,2,1\}$.

［误区警示］ 要注意 P 与 Q 的区别，集合 P 中的元素是自然数 x，满足条件的 $\frac{6}{1+x}$ 是整数；集合 Q 中的元素是整数 $\frac{6}{1+x}$，满足条件的 x 是自然数.

◈［考题 11］ 已知 $A=\{x|x=5n+1,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x=5n+2,n\in\mathbf{N}\}$，$C=\{x|x=5n+3,n\in\mathbf{N}\}$，$D=\{x|x=5n+4,n\in\mathbf{N}\}$，若 $\alpha\in A,\beta\in B,\theta\in C,\gamma\in D$，则(　　).

A. $\alpha^2\in A,\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in A$　　B. $\alpha^2\in A,\beta^2\in B,\theta^2\in C,\gamma^2\in D$

C. $\alpha^2\in A,\beta^2\in C,\theta^2\in B,\gamma^2\in A$　　D. $\alpha^2\in B,\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in B$

［解析］ $\because\alpha\in A$，$\therefore$ 存在 $n_1\in\mathbf{N}$，使 $a=5n_1+1$，$\therefore\alpha^2=(5n_1+1)^2=25n_1^2+10n_1+1=5(5n_1^2+2n_1)+1$，$\therefore\alpha^2\in A$. 同理 $\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in A$. 故选 A.

◈［考题 12］ 用 Venn 图法表示下列集合以及它们之间的关系：

$A=\{$四边形$\}$，$B=\{$平行四边形$\}$，$C=\{$梯形$\}$，$D=\{$菱形$\}$，$E=\{$正方形$\}$，$F=\{$矩形$\}$.

［解析］ 用图示法表示，如图 1－1－2 所示.

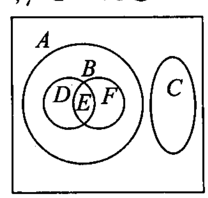


图 1－1－2

［点评］ 用 Venn 图法表示集合的优点在于形象直观，它特别适用于解决与抽象的集合(即集合由哪些元素所组成、元素具有怎样的属性不明确)有关的问题．缺点在于集合的元素具有怎样的属性不明显.

◈［考题 13］ 方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\x-y=-1\end{cases}$ 的解集是______.

［解析］ 由于这里的方程组是二元方程组，它的解是一组解 $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ 而不是一个数，联想平面直角坐标系的点的表示，因此可用有序实数对来表示

不是都是要具有同一形式,它可以有的是数,有的是方程,有的是式,等等,因此方程 $x^2-9=0$ 是这里的集合中的一个元素.

二是没有准确把握符号描述法中的符号所描述的具体属性.

例如:区别符号“0”、“$\varnothing$”、“$\{0\}$”、“$\{\varnothing\}$”.

事实上“0”是一个数,它可以作为集合的元素;而“$\varnothing$”则是一个集合,由于集合也可以作为另一个集合的元素;因此“$\varnothing$”也可以作为某些集合的元素;“$\{0\}$”则是由数0组成的一个单元素集合;“$\{\varnothing\}$”是由“$\varnothing$”为元素组成的一个集合.

9. 元素分析法

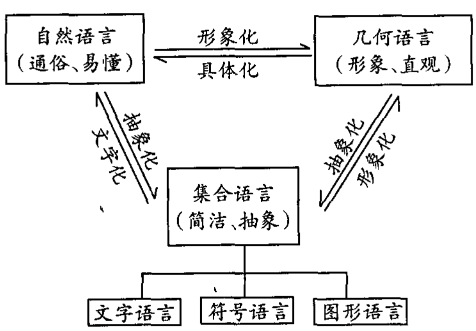
元素分析法就是抓住元素进行分析,也就是元素形式(即代表元)如何?元素应具有哪些属性?元素是否满足“三性”(确定、互异、无序)?

运用元素分析法解题,能准确理解和把握集合的内涵,能有意识地引导我们分析集合是由哪些元素所组成的,而且还能有效地避免解题的错误发生.

3 综合·创新拓展

10. 集合语言

集合语言是现代数学的基本语言,也就是用集合的有关概念和符号来叙述问题的语言.集合语言与其他语言的关系以及它的构成如下:



集合语言的不同形态各有自己的特点,符号语言比较简洁、严谨,可大大缩短语言表达的“长度”,有利于推理、计算;图象语言易引起清晰的视觉形象,它能直观地表达概念、定理的本质以及相互间的关系,在抽象的数学思维面前起着具体化和帮助理解的作用;普通语言比较自然、生动,它能将问题所研究的对象的含义更加明白地叙述出来,教科书上的概念、定理等多以普通语言叙述.在数学解题中,如果数学问题有抽象的字母和符号语言出现,解题能力强的人在审题时往往会先画出草图或把问题变为普通语言.如果问题是以普通语言形式表达的,如应用题,为了便于计算和进行推理,则往往需要引进字母变它,所以它的元素可写成(0,1).

[正解] 填$\{(0,1)\}$ $\left(\text{或}\{(x,y)\mid x=0\text{且}y=1\},\text{或}\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\right\}\right)$.

[错解] 错解一:解方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=-1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$故填$\{x=0,y=1\}$.

错解二:填$\{0,1\}$.

错解三:填$\{(x,y)\mid x=0\text{或}y=1\}$.

[点评] 错解一中,方程 $x=0$ 和方程 $y=1$ 分别是集$\{x=0,y=1\}$中的元素,因此它不是原方程组的解集.错解二中集合$\{0,1\}$的元素是数,也不是原方程组的解集.错解三中,由于“$x=0$ 或 $y=1$”中“$x=0$”与“$y=1$”不一定要同时成立,因而它有无穷个元素,如(0,1),(0,0),(0,3),…等都是它的元素,也不是原方程组的解集.

◈ [考题14] 集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{x^2-1},x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=\sqrt{x^2-1},x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,集合 A 与 B 是否是同一集合?

[解析] 由于集合 A 的元素形式是 x,而它满足的属性是:$x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$,且 $y=\sqrt{x^2-1}$,$\therefore x^2-1\geqslant0$,即 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$.$\therefore A=\{x\mid x\geqslant1\text{或}x\leqslant-1\}$.而集合 B 的元素形式是 y,具有的属性仍为:$x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},y=\sqrt{x^2-1}$,由此得 $y\geqslant0$,$\therefore B=\{y\mid y\geqslant0\}$.故 A 与 B 不为同一集合.

◈ [考题15] 下列命题:

(1)方程 $\sqrt{x-2}+|y+2|=0$ 的解集为$\{2,-2\}$;

(2)集合$\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$与$\{y\mid y=x-1,x\in\mathbf{R}\}$的公共元素所组成的集合是$\{0,1\}$;

(3)集合$\{x\mid x-1<0\}$与集合$\{x\mid x>a,a\in\mathbf{R}\}$没有公共元素.

其中真命题的个数有(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

[解析] 要判断这些命题的真假,这就需要对用来描述这些命题的集合语言进行转化,以弄清集合的构成.

在(1)中方程 $\sqrt{x-2}+|y+2|=0$ 等价于$\begin{cases}x-2=0,\\y+2=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=2,\\y=-2.\end{cases}$其解应为有序实数对,因此其解集应为$\{(2,-2)\}$,故命题(1)是假命题.

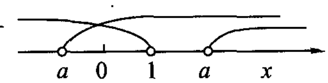


图 1-1-3

而在(2)中,由于集合$\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$的代表元素是 y,而 y 满足属性:“$y=x^2-1,x\in\mathbf{R}$”.由于当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$y=x^2-1\geqslant-1$,所以集合$\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$是由大于或等于 -1 的实数所组成的集合.同理$\{y\mid y=x-1,x\in\mathbf{R}\}$的解集是 $\mathbf{R}$,因此(2)也是错误的.

在(3)中,集合$\{x\mid x-1<0\}$即为不等式 $x-1<0$,即 $x<1$ 的解集,而$\{x\mid x>a,a\in\mathbf{R}\}$即为不等式 $x>a$ 的解集.由图1-1-3可知,这两个集合可能有公共的元素,也可能没有公共的元素,因此(3)也是错误的.

[答案] A

[点评] 在(2)中,很容易被符号描述法的表象所蒙蔽,认为这两个集合中的“x”和“y”必须取相同的值.事实上,这是用相同字母来描述不同的集合的元素所具有的属性,因此像这类问题我们必须将它转化为不用字母描述的集合,进而弄清集合到底由哪些元素所组成.

◈ [考题16] 用描述法表示图1-1-4阴影部分(含边界)点的集合.

[解析] 本题是用图形语言给出的问题.要求把图形语言转换为符号语言.

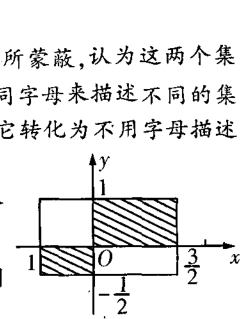


图 1-1-4

量建立数学模型. 尤其是几何问题,离开符号语言将寸步难行. 这些都说明解题时各种语言间的互译是必要的,它可达到简缩思维过程的目的,摆脱思维受阻的困境,有时还能产生妙解.

11. 解决集合问题的关键

解决集合问题的关键:弄清集合由哪些元素所构成的. 如何弄清呢? 关键在于把抽象问题具体化、形象化. 也就是把用描述法表示的集合用列举法来表示,或用图示法来表示抽象的集合,或用图形来表示集合. 当集合的元素为有序实数对时,可用平面直角坐标系中的图形表示相关的集合.

例如,在判断集合 $A=\{x|x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$ 与集合 $B=\{y|y=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$ 是否为同一集合时,若从代表元素入手来分析它们之间的关系,则比较抽象,而用列举法来表示两个集合,则它们之间的关系就一目了然. 即 $A=\{\cdots,-1,1,3,5,\cdots\}$,而 $B=\{\cdots,-1,1,3,5,\cdots\}$,$\therefore A$ 与 B 是同一集合.

12. 开放题

在新课标中注重了主动探索、探究能力的培养,因而在教材过渡时期的高考也将注意这方面能力的考查,因此,我们应有意识地提高这方面的能力.

例:设 $S=\{x|x=m+\sqrt{2}n,m,n\in\mathbf{Z}\}$.

(1)若 $a\in\mathbf{Z}$,则 a 是否属于 S?

(2)对于 S 中任意两个元素 x_1,x_2,问 $x_1+x_2,x_1\cdot x_2$ 是否属于 S?

(3)对于给定的整数 n,试求满足 $0<m+\sqrt{2}n<1$ 的 S 中的元素的个数.

解:(1)$\because\ a=a+\sqrt{2}\cdot0$,$\therefore\ a\in S$.

(2)$x_1,x_2\in S$,可设 $x_1=a+b\sqrt{2}$,$x_2=c+d\sqrt{2}$ $(a,b,c,d\in\mathbf{Z})$,则 $x_1+x_2=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$,$x_1\cdot x_2=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$,$\therefore\ x_1+x_2$,$x_1\cdot x_2$ 都属于 S.

(3)由 $0<m+\sqrt{2}n<1$ 得 $-\sqrt{2}n<m<-\sqrt{2}n+1(n\in\mathbf{Z})$,①当 $n=0$ 时,有 $0<m<1$,故这样的整数 m 不存在;②当 $n\neq0$ 时,$-\sqrt{2}n\notin\mathbf{Z}$,$\because -\sqrt{2}n<m<-\sqrt{2}n+1$,所以存在一个整数 m 符合题意.

综合①②可得:当 $n=0$ 时,S 中元素个数为 0;当 $n\neq0$ 时,S 中元素个数为 1.

点评:把握元素特征是解决本题的关键,同时要注意紧扣条件.

[解答] 用描述法表示为(即用符号语言表示):

$\left\{(x,y)\ \middle|\ -1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant1,\text{且 }xy\geqslant0\right\}$.

[点评] (1)首先要注意此题的代表元素 (x,y) 是点的坐标形式,然后仔细分析横、纵坐标满足的条件.

(2)本题给出的是图形语言,直观、清楚;解答时用的是符号语言,表示需简练、严谨.

(3)本题也可用文字语言加以解决,要力求准确、简练.

(4)同一数学研究对象,往往可以用不同的语言形态来表达. 数学中常采用文字语言、符号语言及用一般语言等,在平时学习中要重视各种数学语言形态间的互译. 这对数学解题能力提高很有益处.

◈ [考题 17] 设集合 $A=\{a|a=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$,集合 $B=\{b|b=k^2-4k+5,k\in\mathbf{N}^*\}$,若 $a\in A$,试判断 a 与集合 B 的关系.

[解析] 解法一:$\because a\in A$,

$\therefore a=n^2+1=(n^2+4n+4)-4(n+2)+5$
$=(n+2)^2-4(n+2)+5$.

$\because n\in\mathbf{N}^*$,$\therefore n+2\in\mathbf{N}^*$,$\therefore a\in B$.

解法二:$\because A=\{2,5,10,17,\cdots\}$,$B=\{2,1,5,10,17,\cdots\}$,

$\therefore$ 若 $a\in A$,则 $a\in B$.

[点评] 解法一:是从一般角度入手,即要证明一个元素是否属于某个集合,只需看这个元素是否具备该集合的元素所具有的属性;而解法二则把问题具体化了,因而答案一目了然.

◈ [考题 18] 已知数集 A 满足条件 $a\neq1$,若 $a\in A$,则 $\frac{1}{1-a}\in A$.

(1)已知 $2\in A$,求证:在 A 中必定还有两个元素;

(2)请你自己设计一个数属于 A,再求出 A 中其他的所有元素.

(3)从上面两小题的解答过程中,你能否悟出什么"道理"? 并证明你发现的这个"道理".

[解析] (1)$2\in A\Rightarrow\frac{1}{1-2}=-1\in A\Rightarrow\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$,

而 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$,$\therefore$ 若 $2\in A$,A 中必定还有且仅有另外两个元素 -1 和 $\frac{1}{2}$.

(2)不妨设 $3\in A\Rightarrow-\frac{1}{2}\in A\Rightarrow\frac{2}{3}\in A$,而 $\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$,$\therefore$ 若 $3\in A$,则 A 中同样还有且仅有两个元素 $-\frac{1}{2},\frac{2}{3}$.

(3)由(1)(2)可猜想 A 中只有 3 个元素,即 $a,\frac{1}{1-a}$ 和 $\frac{a-1}{a}(a\neq1)$.

下面证明这三个数存在且不相等:

先证存在性:$\because\ a\neq1$,$\therefore\ \frac{1}{1-a}$ 存在且不为 0,

$\because\ \frac{1}{1-a}\in A$,$\therefore\ \frac{1}{1-a}\neq1$,$\therefore\ a\neq0$,即 $\frac{a-1}{a}$ 必有意义.

再证互不相等:若 $a=\frac{1}{1-a}$,$\therefore\ a^2-a+1=0$,$\therefore\ \Delta<0$,故不可能.

$\therefore\ a\neq\frac{1}{1-a}$,同理可证 $\frac{1}{1-a}\neq\frac{1-a}{a}$ 成立.

综上所述,集合 A 中必有这三个互不相同的元素. 而 $\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}}=a$,$\therefore\ A$ 中仅有这三个元素.

[点评] 这是一道元素具有循环性,即集合中元素是定量的集合开放题. 解答时充分利用其表达式去求元素,证明.