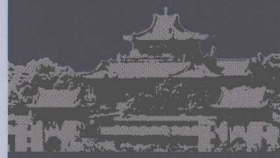


武汉大学

百年名典

半纯函数的聚值线理论

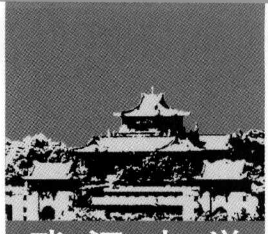
根深葉茂 實大聲洪

山高水長 流風甚美

李国平 著

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



武汉大学
百年名典

半纯函数的聚值线理论

李国平 著

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

半纯函数的聚值线理论/李国平著．—2 版．—武汉：武汉大学出版社，2007.5
武汉大学百年名典
ISBN 978-7-307-05512-4

Ⅰ.半…　Ⅱ.李…　Ⅲ.半纯函数—数学理论　Ⅳ.O174.52

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 048040 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：刘　欣　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷：武汉中远印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张：16.75　字数：239 千字　插页：4
版次：2007 年 5 月第 1 版　2007 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-05512-4/O·358　定价：30.00 元

武汉大学百年名典

自然科学类编审委员会

作者简介

李国平（1910~1996），广东丰顺人。1933年毕业于中山大学数学天文系，后任广西大学讲师，1934~1936年在日本东京帝国大学做研究生，1937年赴法国巴黎大学庞加莱研究所做研究工作。1939年回国，先后任四川大学、武汉大学教授。1955年当选为中国科学院学部委员（院士）。先后担任武汉大学数学系主任、副校长、数学研究所所长、中国科学院数学计算技术研究所所长、中国科学院武汉数学物理研究所所长，历任湖北省科协副主席、中国数学会理事、中国系统工程学会副理事长兼学术委员会主任、湖北省暨武汉市数学会理事长，担任《数学物理学报》主编、《数学年刊》副主编、《数学杂志》与《系统工程与决策》名誉主编。他的学术研究主要涉及整函数与半纯函数的值分布理论、准解析函数、微分方程与差分方程、数学物理四个领域。尤其在半纯函数的波莱尔方向与填充圆的统一理论方面获得多项重要成果，在数学物理方面的研究受到理论和应用界的广泛重视。他一贯主张边缘学科的研究和多学科的相互交叉渗透，是数学理论联系实际的倡导者和实践者。一生共发表80多篇学术论文，自撰或与学生合作撰写了《半纯函数的聚值线理论》等18部学术著作。

出版前言

百年武汉大学，走过的是学术传承、学术发展和学术创新的辉煌路程；世纪珞珈山水，承沐的是学者大师们学术风范、学术精神和学术风格的润泽。在武汉大学发展的不同年代，一批批著名学者和学术大师在这里辛勤耕耘，教书育人，著书立说。他们在学术上精品、上品纷呈，有的在继承传统中开创新论，有的集众家之说而独成一派，也有的学贯中西而独领风骚，还有的因顺应时代发展潮流而开学术学科先河。所有这些，构成了武汉大学百年学府最深厚、最深刻的学术底蕴。

武汉大学历年累积的学术精品、上品，不仅凸现了武汉大学"自强、弘毅、求是、拓新"的学术风格和学术风范，而且也丰富了武汉大学"自强、弘毅、求是、拓新"的学术气派和学术精神；不仅深刻反映了武汉大学有过的人文社会科学和自然科学的辉煌的学术成就，而且也从多方面映现了 20 世纪中国人文社会科学和自然科学发展的最具代表性的学术成就。高等学府，自当以学者为敬，以学术为尊，以学风为重；自当在尊重不同学术成就中增进学术繁荣，在包容不同学术观点中提升学术品质。为此，我们纵览武汉大学百年学术源流，取其上品，掬其精华，结集出版，是为《武汉大学百年名典》。

"根深叶茂，实大声洪。山高水长，流风甚美。"这是董必武同志 1963 年 11 月为武汉大学校庆题写的诗句，长期以来为武汉大学师生传颂。我们以此诗句为《武汉大学百年名典》的封面题词，实是希望武汉大学留存的那些泽被当时、惠及后人的学术精品、上品，能在现时代得到更为广泛的发扬和传承；实是希望《武汉大学百年名典》这一恢弘的出版工程，能为中华优秀文化的积累和当代中国学术的繁荣有所建树。

《武汉大学百年名典》编审委员会

再版前言

刘培德　欧阳才衡

出版社决定出一套《武汉大学百年名典》丛书，其意图十分明显，就是为了光大学术精神，钩沉被岁月尘封了的知识宝库，借鉴于今日之研究，实现学术上的振兴与跨越。于是我们推荐了李国平院士的这本《半纯函数的聚值线理论》。这不仅是因为无论学术成就还是影响流变此书足堪其选，而且因为该书是李先生最重要的一部学术专著。此前山东教育出版社曾经于 2002 年出版了一本《李国平论函数论与数学物理》，是李先生一生主要学术论文的汇集，现在有了这本专著的再版，二者交互辉映，无疑地会给学术研究带来无尽的启迪！

《半纯函数的聚值线理论》应该说是李先生对他的因以成名的理论研究工作的系统阐释。从上世纪 30 年代在东京帝国大学当研究生起李先生就开始了对于半纯函数（又称亚纯函数）理论的研究，后来到了巴黎 Poincare 研究所继续其研究工作。半纯函数的值分布理论起源于 Picard 和 Borel 在 19 世纪末关于整函数值分布理论的研究工作。20 世纪初，一批著名的函数论专家如 Blumenthal、Montel、Landau、Julia、Schottky、Milloux、Nevanlinna、Valiron 等纷纷投入其中，发展了这一理论，取得了很多重要的成果。大约在 1936 年前后，李先生通过强化 Nevanlinna 基本不等式和改造 Blumenthal 函数型实现了理论上的突破，发表了一系列关于半纯函数值分布理论的创新成果。这一成果不仅把若干分散的研究纳入一个总的框架，而且把有限级和无穷级的半纯函数运用统一的方法去处理。它不仅把原有的结论更加精密化，而且在更高的层次上提出了许多新问题加以研究，从而把值分布理论的研究导向一个新的境界。李先生把这些成果

称之为半纯函数聚值线的统一理论，或者叫做半纯函数的 Borel 方向与填充圆的统一理论，以区别于此前 Blumenthal 等人，包括熊庆来以及他本人的研究工作。这些文章的发表立即受到学术界的高度重视，Valiron 等在法国科学院院报上逐篇为之评介，熊庆来教授也多次在文章中予以首肯。李先生一时声名鹊起，奠定了他在该领域的学术地位。

据李先生自述，本书初稿是从 1938 年开始写起的，算起来到 1958 年正式出版整整经历了 20 年时间。该书是国内出版的第一本有关半纯函数值分布理论的专著。读过这本书的人不难看到，李先生不仅循序渐进地阐述了有关的理论成果，而且把当初解决问题的思路，各个研究方法的优劣，学术思想发展的脉络交待得清清楚楚，甚至每位数学家在这一理论大厦中所做的贡献都丝毫不爽地一一列举。这无疑对于了解值分布理论生长的源头、把握理论发展的趋势是十分有利的，同时也体现了作为一位科学家的高尚的学术风范与道德风范。今天我国的函数论研究已经有了更加丰硕的成就，呈现出崭新的面貌，然而正像登山者在崖壁上留下的一道重重的刻痕，它永远标识着前进的历程。时至今日它仍然不失其学习和参考的价值，其中的思想与方法仍然值得借鉴，书中散发出来的某些“原生态”的数学研究素材仍然有待于进一步发掘。

该书原版是由科学出版社出版的，距今已近半个世纪，再版工作殊为不易。实际上就连当年跟着李先生研修值分布理论的学生健在者都已经不多了。原书要不要进行内容和文字的修订？包括书中的某些文言句式要不要改变？还有原书是铅字排印的，需要重新打印校对，工作量很大。根据出版宗旨：要尽量保持原貌，但为了阅读方便，必要的文字校勘还是少不了的。恰在此时我们找到了一本原书的复印本，里面还有若干用钢笔改过的文字，据信是李先生手写的，这真是喜出望外，它使得部分校勘有了依据。总括地说来，目前的改动有以下几个方面：1. 原书目录太简，现在添加了二级的标题以便于检索；2. 把少量的文言字词改为现代口语；3. 改正了明显的文字错漏；4. 补正了一处数学公式的遗漏。当然以上改动是否为原著者所愿就

无从得知了，如有失误均应由校勘者负责。此外原书缺少前言和参考文献，经编辑部商讨也不再增补，转而以再版前言代替。这里应该说明的是出版社的编辑们，特别是责编顾素萍女士为此做了耐心、细致的工作，这是应该特别感谢的！时间紧迫，文字审校恐还留有不少问题，诚望方家与读者不吝指正！

（2007 年 5 月）

目　录

第一章　函数的规则化

导　论

从一个给定的实变量r的实函数$f(r)$来作出一个和它紧密联系着的、满足某些条件(A)的函数$\varphi(r)$，叫做**按条件(A)规则化**$f(r)$**为**$\varphi(r)$. 函数的规则化理论在整函数和半纯函数论中，在函数之近似法理论和准解析函数论中有着广泛的应用. 因此，掌握函数规则化理论在函数论工作上有着重大的意义.

在这里我们先叙述三个启蒙定理，然后在本章中讨论几个特殊的规则化问题作为处理本书中心问题的准备.

1. Du Bois-Reymond 氏定理. 设$\varphi_n(x)$为$x_0\leqslant x<+\infty$上之正值函数，有界于其存在区间上每一有界区间者$(n=1,2,\cdots)$，则必有不减函数$F(x)$存在，致

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\varphi_n(x)}=+\infty\quad(n=1,2,\cdots).$$

命

$$f(n)=\max\Big(\sup_{x_0\leqslant x\leqslant n+1}\varphi_1(x),\cdots,\sup_{x_0\leqslant x\leqslant n+1}\varphi_n(x)\Big);\qquad(1)$$

当$n\leqslant x\leqslant n+1$时，命

$$f(x)=f(n)+(x-n)[f(n+1)-f(n)].\qquad(2)$$

由(1)，则$f(n)\leqslant f(n+1)$；由(2)则$f(x)$为x之不减函数；又由(1)，则

$$\varphi_p(x)\leqslant f(n)\quad(p\leqslant n,\ x_0\leqslant x\leqslant n+1).\qquad(3)$$

如$n\leqslant x$，则必有一正整数m使$n\leqslant m\leqslant x<m+1$，由(3)又见

$n \leqslant x$ 致

$$\varphi_n(x) \leqslant f(m) \leqslant f(x).$$

取任一不减函数 $H(x)$ 致 $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = +\infty$ 者，命

$$F(x) = f(x)H(x),$$

则

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{\varphi_n(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi_n(x)} H(x) \geqslant \lim_{x \to +\infty} H(x) = +\infty.$$

2. Borel 氏定理. 设 $W(r)$ 为 r 在 $r \geqslant r_0'$ 上之正值不减的单值有限的函数，并令 $W(r) = W(r+0)$，且设 $\lim\limits_{r \to +\infty} W(r) = +\infty$，则不论 α 为如何小之正数必致

$$W\left(r + \frac{1}{\log W(r)}\right) < [W(r)]^{1+\alpha}, \tag{1}$$

但须除去区间 $r \geqslant r_0'$ 上可数多个长度之和为有限的小区间.

命 $k = 1 + \alpha$. 假设(1) 式不完全成立，于 r 充分大时，取 r_0 相当大致

$$W(r_0) > 1,$$

$$W\left(r_0 + \frac{1}{\log W(r_0)}\right) \geqslant [W(r_0)]^k.$$

置

$$r_0' = r_0 + \frac{1}{\log W(r_0)}, \quad \Delta_0 = r_0' - r_0.$$

命 $r \geqslant r_0'$ 上不致(1) 式之 r 的最小者为 r_1，则有

$$r_1' = r_1 + \frac{1}{\log W(r_1)}, \quad \Delta_1 = r_1' - r_1, \quad W(r_1') \geqslant [W(r_1)]^k.$$

依此进行，设 r_{n-1} 之意义已定，则命

$$r_{\nu-1}' = r_{\nu-1} + \frac{1}{\log W(r_{\nu-1})},$$

并令 $r \geqslant r_{\nu-1}'$ 上不致(1) 式之 r 的最小者为 r_ν，则有

$$r_\nu' = r_\nu + \frac{1}{\log W(r_\nu)}, \quad \Delta_\nu = r_\nu' - r_\nu, \quad W(r_\nu') \geqslant [W(r_\nu)]^k.$$

这样，不致(1) 式之 r 除包含在 $0 \leqslant r \leqslant r_1$ 上之部分区间上者外全

部在一串区间

$$[r_\nu, r'_\nu] \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

上. 现在可以证明这些区间的长度总和$\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty}\Delta_\nu$为有限.

由 $W(r_\nu) \geqslant W(r'_{\nu-1}) \geqslant [W(r_{\nu-1})]^k$, 则

$$W(r_\nu) \geqslant [W(r_0)]^{k^\nu}. \tag{2}$$

故

$$\Delta_\nu = \frac{1}{\log W(r_\nu)} \leqslant \left(\frac{1}{k}\right)^\nu \frac{1}{\log W(r_0)},$$

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\Delta_\nu \leqslant \frac{1}{\log W(r_0)}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^\nu.$$

定理得证.

注意: 由(2) 可见 $\lim\limits_{\nu\to+\infty} W(r_\nu) = +\infty$, 随之也见 $\lim\limits_{\nu\to+\infty} r_\nu = +\infty$.

3. Nevanlinna 氏定理. $W(r)$ 之定义同前述 Borel 定理. 设 $\varphi(r)$ 为 r 在 $r \geqslant r'_1$ 上不增的正值函数, 可积分于每一有限区间内, 设

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t\log t}\mathrm{d}t < +\infty, \tag{1}$$

则不论 α 为如何小之正数, 必致

$$W(r + \varphi[W(r)]) < [W(r)]^{1+\alpha}, \tag{2}$$

但须除去区间 $r \geqslant r'_0$ 上可数多个区间其长的总和 L 致

$$L \leqslant \varphi(W_0) + \frac{1}{\log(1+\alpha)}\int_{W_0}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t\log t} \quad (W_0 = W(r_0) > \mathrm{e})$$

者, 反之, 设

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t\log t}\mathrm{d}t = +\infty,$$

则必有 $W(r)$, 致

$$W(r + \varphi[W(r)]) \geqslant [W(r)]^{1+\alpha}.$$

就此定理, 令

$$\varphi(t) = \frac{1}{\log t} \quad (t > 1),$$

则此定理即是 Borel 定理.

现在来寻求 $\varphi(r)$ 所应满足之条件，致

$$W(r)+\varphi[W(r)]\geqslant W(r)+1 \tag{3}$$

之 r 如果存在则必在可数多个长度之和为有限的区间内.

$W(r)$ 及 $\varphi(r)$ 均为单调函数，其间断点都是第一类间断点，这些点成一可数集合. 假设在间断点上

$$W(r)=W(r+0),\quad \varphi(r')=\varphi(r'+0).$$

下面用 W_ν 表 $W(r_\nu)$.

命 r_1 为 r 之最小值，致

$$W(r_1+\varphi[W(r_1)])\geqslant W_1+1$$

者；以 $r(W)$ 表示 $W(r)$ 之反函数，则

$$r_1+\varphi(W_1)\geqslant r(W_1+1).$$

致

$$\Delta_1=r(W_1+1)-r_1\leqslant\varphi(W_1).$$

命 r_2 为 r 在区间 $r\geqslant r(W_1+1)$ 上之最小值，致

$$W(r_2+\varphi(W_2))\geqslant W_2+1$$

者，则

$$\Delta_2=r(W_2+1)-r_2\leqslant\varphi(W_2),\quad r_2\geqslant r(W_1+1).$$

准此，可用数学归纳法定出 $r_3,r_4,\cdots$，致

$$r_0\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_\nu\leqslant\cdots,$$

$$\Delta_\nu=r(W_\nu+1)-r_\nu\leqslant\varphi(W_\nu), \tag{4}$$

$$r_{\nu+1}\geqslant r(W_\nu+1)=r_\nu+\Delta_\nu, \tag{5}$$

在这里 $r_{\nu+1}$ 为 r 在区间 $r\geqslant r(W_\nu+1)$ 上之最小值，致

$$W(r_{\nu+1}+\varphi(W_{\nu+1}))\geqslant W_{\nu+1}+1$$

者. 容易看见(3) 式在 $r_\nu+\Delta_\nu\leqslant r<r_{\nu+1}$ 上不成立，其反面成立：

$$W(r+\varphi[W(r)])<W(r)+1,\quad r_\nu+\Delta_\nu\leqslant r<r_{\nu+1}.$$

如 r_n 有无限多个，则必 $\lim r_n=+\infty$. 若果 $\lim r_n=r_\infty=R<+\infty$，则从

$$W(r_\infty)\geqslant W(r_n)\geqslant W+n-1\quad(\text{不论 } n \text{ 为如何大})$$

立得一个矛盾. 又从次式：

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Delta_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\varphi(W_\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\varphi(W_0+n-1) < \varphi(W_0)+\int_{W_0}^{W_n}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

亦见 Δ_ν 之和随$\int_{t_0}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$ 而为有限. 故得:

Ⅰ. 设$\int_{t_0}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t<+\infty$, 则 r 之值致不等式

$$W(r+\varphi[W(r)]) \geqslant W(r)+1$$

者必在可数多个区间内其长之和小于

$$\varphi(W_0)+\int_{W_0}^{W}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

由此结果出发, 立可推得定理之前段.

如果(2) 式成立, 即令 $k=1+\alpha$, 应有

$$\frac{\log\log W(r+\varphi[W(r)])}{\log k} < 1+\frac{\log\log W(r)}{\log k}.$$

令

$$W_1(r)=\frac{\log\log W(r)}{\log k},\quad \varphi_1(W_1)=\varphi(W).$$

则上式化为下式:

$$W_1(1+\varphi(W_1)) < 1+W_1(r). \tag{6}$$

反之, 如此式成立, 则得(2) 式. 又

$$\int_{W_0}^{\infty}\varphi_1(W_1)=\int_{W_0}^{\infty}\varphi(W)\,\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}W}\mathrm{d}W$$

$$=\int_{W_0}^{\infty}\frac{\varphi(W)}{\log k}\,\frac{\mathrm{d}W}{W\log W}<+\infty,$$

此由(1) 式可见. 因此 Ⅰ 之结果可应用于函数 $W_1(r)$ 及 $\varphi_1(t)$, 定理前段得证.

现在来证明定理之后段.

命 $\varphi(t)$ 为不增函数致$\int_{t_0}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$ 者, 则

$$r=r(W)=\int_0^W\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

之反函数 $W=W(r)$ 为不减函数, $r\to+\infty$ 时 $W(r)\to+\infty$.

但

$$W(r+\varphi[W]) = W(r) + W'(r+\theta\varphi)\varphi(W) \quad (0<\theta<1)$$
$$= W(r) + \frac{\varphi(W)}{\varphi(W[r+\theta\varphi])} \geqslant W(r)+1,$$

故得：

Ⅱ. 设$\int_{t_0}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t = +\infty$，则必有不减函数 $W(r)$ ($r\to+\infty$ 时 $W(r)\to+\infty$) 致 $W(r+\varphi[W(r)])\geqslant W(r)+1$ 者存在.

据此结果施用前段的转化，则得定理后段之证.

本　论

Ⅰ. Blumenthal 氏函数型

1. 在前述 Borel 氏定理之证法中已经得出如次之结果：设 $W(x)$ 为 x 在 $x\geqslant x_0'$上之正值不减的单值有限的函数，$W(x)\to+\infty$ 当 $x\to+\infty$ 时；α 为任何正数，则在 $x\geqslant x_0 (x_0\geqslant x_0')$ 上不致

$$W\left(x+\frac{1}{\log W(x)}\right) < [W(x)]^{1+\alpha} \tag{1}$$

之 x 必在一串其长之和 $L<\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{\log W(x_0)}$ 的间隔上，但 x_0 适当大致 $W(x_0)>1$. 现在我们来推广这个结果作为制作 Blumenthal 氏函数型的论据.

为简化用语起见，本章一律用无穷小一辞来表示不增的连续正函数 $\varepsilon(x),\eta(x),\cdots$，此皆随$\frac{1}{x}$ 而趋近于 0，虽然这个名称在微积分中的意义比较广泛. 这些无穷小量 $\varepsilon(x),\eta(x),\cdots$ 有时亦简写为 $\varepsilon,\eta,\cdots$. 但 $\alpha,\beta,\cdots$ 则用以表示正常数.

想用无穷小 $\varepsilon(x)$（简写为 ε）代换(1) 式之 α，则可添加次列条件：

($\mathrm{E_a}$)　εe^x 为不减函数；

(F)　$\varepsilon\log W(x)$ 为不减函数且 $\lim \varepsilon\log W(x)=+\infty$.