$$\iint_D xy^2\,dx\,dy=\int_1^2 x\,dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} y^2\,dy$$

$$=\int_1^2 x\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\frac{1}{3}\int_1^2\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{57}{30}.$$

专升本考试

高等数学

复习指导书

ZHUAN SHENG BEN KAO SHI
GAO DENG SHU XUE
FU XI ZHI DAO SHU

主编　刘德厚

中国石油大学出版社

专升本考试

高 等 数 学

复习指导书

主　编　刘德厚

副主编　任丽华　解玖霞

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

专升本考试高等数学复习指导书/刘德厚主编. —东营：中国石油大学出版社，2007.6

ISBN 978-7-5636-2422-5

Ⅰ. 专… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学—成人教育：高等教育—升学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 090597 号

书　　名：专升本考试高等数学复习指导书
作　　者：刘德厚　任丽华　解玖霞

责任编辑：高　颖　吕　炜(0546—8393394)
封面设计：九天设计

出 版 者：中国石油大学出版社(山东 东营　邮编 257061)
网　　址：http://www.uppbook.com.cn
电子信箱：shiyoujiaoyu@126.com
印 刷 者：东营石大博雅印务有限公司
发 行 者：中国石油大学出版社(电话 0546—8392791，8392563)
开　　本：140×202　印张：6.875　字数：169 千字
版　　次：2007 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：16.00 元

前言

历年来专升本考试的考题千变万化，但万变不离其宗，那就是课程的基本概念、基本理论、基本方法是不变的。本书是根据山东省历年来专升本高等数学考试的考点和考试范围，在多年辅导讲义的基础上编写而成的，适用于理科、工科各专业及部分经济类专业。

全书共分 9 章，内容包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分、常微分方程和无穷级数等。本书第 1 章由解玖霞编写，第 2 章由郑冠贞、徐辉增编写，第 3 章由魏淑云编写，第 4 章由吕娜编写，第 5 章由李俊永编写，第 6 章由杨蕊编写，第 7 章由孟玲编写，第 8 章由任丽华编写，第 9 章由董秀红编写，模拟训练和附录由刘德厚编写，最后由刘德厚、任丽华统稿。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者

2007 年 3 月

目录

第 1 章　极限与连续

一、目的要求

(1) 理解函数的概念，会求函数的定义域；

(2) 了解函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性；

(3) 了解反函数的概念，会求反函数；

(4) 掌握复合函数的概念，能熟练地指出复合函数的复合过程；

(5) 了解基本初等函数的图像和性质；

(6) 了解分段函数并能作简单分段函数的图形；

(7) 会建立函数关系式；

(8) 了解极限的概念，掌握极限的运算法则；

(9) 了解无穷小与无穷大的概念，掌握无穷小的性质；

(10) 掌握求极限的方法；

(11) 理解函数在一点处的连续性概念，会用定义讨论函数的连续性，特别是分段函数在定义域的分段点处的连续性；

(12) 会求函数的间断点并会判断间断点的类型；

(13) 会利用函数的连续性求极限.

二、重点

(1) 复合函数、函数的定义域、基本初等函数和初等函数；

(2) 求极限的消零因子法、分子分母同除以最高次幂法、有理化法、重要极限法、利用无穷小的性质法、等价无穷小替换法、利用

函数的连续性和罗必达法则求极限法；

(3) 讨论函数在一点处的连续性及函数的间断点.

三、主要内容及典型例题

1. 函数

1）函数的两要素

函数的两要素是定义域和对应法则.

只有当两个函数的定义域和对应关系完全相同时，它们才是相同的函数. 如 $y=f(x),x\in D$ 与 $y=f(t),t\in D$ 是同一函数.

2）复合函数

$y=f(u),u\in D,u=\varphi(x),x\in D_1,\varphi(x)\in D_2,D\cap D_2\neq\varnothing$，有复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，其定义域是使 $f[\varphi(x)]$ 有意义的 x 的集合.

3）反函数

$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数. 只有一一对应的函数才有反函数.

4）初等函数

由常数和基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合构成的且能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

初等函数一般都有图形，但不是所有函数都有图形，如

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\overline{\mathbf{Q}}.\end{cases}$$

5）奇偶性

奇函数：$f(-x)=-f(x)$，其图形关于原点对称.

偶函数：$f(-x)=f(x)$，其图形关于 y 轴对称.

奇函数与偶函数的定义域一定是关于原点对称的集合. 只要定义域不关于原点对称，则函数必是非奇非偶函数.

6）单调性

函数 $f(x)$，定义域是连续区间 D，对任意 $x_1<x_2\in D$，如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 上是单调增函数；如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 D 上是单调减函数.

7）周期性

函数 $f(x)$，定义域是 D，如果存在正数 T，对任意 $x\in D$，都有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，T 是一个周期.

8）有界性

函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界函数；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界函数.

从图形上看，若函数的图形完全在以 x 轴为对称轴的足够宽的长带子型区域内，则函数是有界函数；否则，就是无界函数.

例 1　设 $f(x+1)=\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$.

［**解题分析**］　已知复合函数求简单函数，其常规方法是换元法，也可用凑的方法.

解法 1　设 $x+1=t$，则 $x=t-1$，因此

$$f(t)=\frac{1}{t-1},$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{x-1}.$$

解法 2　因为 $f(x+1)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{(x+1)-1}$，所以

$$f(x)=\frac{1}{x-1}.$$

例 2　已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，$\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由 $f(x)=e^{x^2}$，得 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$，即 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，所以

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}.$$

由 $\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0,\\ 1-x>0,\end{cases}$ 得函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

2. 函数的极限

1）函数在点 x_0 处的极限

当 x 无限接近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

2）左极限

当 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$.

3）右极限

当 x 从 x_0 的右侧无限接近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

4）极限、左极限、右极限之间的关系

极限存在的充要条件是左极限与右极限都存在且相等.

上述关系可用来讨论分段函数在定义域的分段点处的连续性.

5）极限的运算法则

设 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=b$，则

(1) $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\square} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\square} g(x)=a\pm b$；

(2) $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to\square} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square} g(x)=a\cdot b$；

(3) $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=\dfrac{a}{b}\quad(b\neq 0)$.

法则中的 $x\to\square$表示六种自变量变化趋势($x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty,x\to x_0,x\to x_0^+,x\to x_0^-$)中的任一种.

例 3　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\beta}-\sqrt{\beta}}{x}\quad(\beta>0)$.

[**解题分析**]　求无理分式的极限,当分子和分母的极限都等于零时,常用有理化法.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\beta}-\sqrt{\beta}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{x+\beta}+\sqrt{\beta})}=\dfrac{1}{2\sqrt{\beta}}$.

例 4　求极限$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$.

[**解题分析**]　求当 x 趋向于有限值时有理分式的极限,如果分子和分母的极限都等于零,常用消零因子法.

解　$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1}{3}$.

例 5　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})$.

[**解题分析**]求"$\infty-\infty$"型未定式的极限常用化单项式法.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}}=0$.

例 6　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=0$.

例 7　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt[8]{3}\times\cdots\times\sqrt[2^n]{3})$.

[**解题分析**]　求无限多个因子乘积的极限必须先求积,再求极限.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt[8]{3}\times\cdots\times\sqrt[2^n]{3})=\lim\limits_{n\to\infty}3^{1-0.5^n}=3$.

例 8　设$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan(1-x^2)}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{2}$，求 a，b.

解　由已知$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan(1-x^2)}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{2}$且$\lim\limits_{x\to1}\tan(1-x^2)=0$，所以

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0. \qquad ①$$

又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\tan(1-x^2)}{x^2+ax+b}&=\lim_{x\to1}\left[\frac{1-x^2}{x^2+ax+b}\frac{\tan(1-x^2)}{1-x^2}\right]\\&=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x-b)}\lim_{x\to1}\frac{\tan(1-x^2)}{1-x^2}\\&=\lim_{x\to1}-\frac{1+x}{x-b}\lim_{x\to1}\frac{\tan(1-x^2)}{1-x^2}=-\frac{2}{1-b},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{2}{1-b}=\frac{1}{2}. \qquad ②$$

由①和②式，得 $a=2$，$b=-3$.

例 9　已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$，试确定 α，β 之值.

解　因为

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-\alpha)x^2-(\alpha+\beta)x+(1-\beta)}{x+1}=0,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases}1-\alpha=0,\\\alpha+\beta=0,\end{cases}$$

解得 $\alpha=1$，$\beta=-1$.

6）无穷小

若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$是当 $x\to\square$时的无穷小.

（1）无穷小的性质.

无穷小与有界函数之积是无穷小；

有限个无穷小的和、差、积是无穷小.

(2) 等价无穷小.

如果$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 $f(x)$与 $g(x)$是 $x\to\square$时的等价无穷小,记作 $f(x)\sim g(x)$.

常用的等价无穷小:当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$e^x-1\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$.

可利用无穷小的性质和等价无穷小替换求极限.

(3) 无穷小与无穷大的关系.

无穷大的倒数是无穷小,非零无穷小的倒数是无穷大.

例 10　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$.

[**解题分析**]　利用等价无穷小替换求极限较简单,当 $x\to 0$ 时,$e^x-1\sim x$;也可用罗必达法则计算,但较繁琐.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^{\sin x-x}-1)}{\sin x-x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x-x)}{\sin x-x}=1.$$

例 11　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=1.$$

7) 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin[f(x)]}{f(x)}=1$;

(2) $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=e$ 或 $\lim\limits_{g(x)\to 0}[1+g(x)]^{\frac{1}{g(x)}}=e$.

例 12　求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{-\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^{-4}=\mathrm{e}^{-4}$.

例 13 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2x+3}{2x-5})^{x+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2x+3}{2x-5})^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\dfrac{3}{2x})^{x+1}}{(1-\dfrac{5}{2x})^{x+1}}$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{3}{2x})^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{3}{2x})}{\left[\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{5}{2x})^{-\frac{2x}{5}}\right]^{-\frac{5}{2}}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{5}{2x})}=\mathrm{e}^{4}.$$

例 14 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 15 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\ln(1+x)}$.

[**解题分析**] 求无理分式的极限时，如果分子与分母的极限都是 0，则这类极限一般采用有理化法.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}.$$

例 16 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x=1.$$

要使$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在，必须有$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，可得 $a=1$. 所以，当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在且$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

3. 函数的连续性

1）函数在一点处连续

如果函数 $y=f(x)$满足：

（1）在点 x_0 的某邻域内有定义；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续. 点 x_0 称为函数 $f(x)$的连续点.

2）左连续

如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 及其左近旁有定义且$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点 x_0 处左连续.

3）右连续

如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 及其右近旁有定义且$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点 x_0 处右连续.

函数在点 x_0 处连续，则函数必须在点 x_0 有定义，这是与极限不同的.

4）函数的间断点

满足下列情形之一的点称为函数的间断点：

（1）函数在点 x_0 处无定义，但在其近旁有定义，或在点 x_0 处有定义，但在其近旁无定义；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

（3）虽然$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

5）间断点的分类

设点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，如果

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

6) 利用连续性求极限

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

例 17 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 的连续性.

解 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 是初等函数，因此函数在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 内连续.

函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，当然在点 $x=0$ 的某邻域内有定义，且 $f(0)=0$.

因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

综上，函数 $f(x)$ 在定义域内不连续.

例 18 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点，并判断其类型.

解 由 $\begin{cases}1-e^{\frac{x}{1-x}}\neq 0,\\ 1-x\neq 0,\end{cases}$ 得函数的定义域为

$$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty),$$