KAOYAN 2008

2008年

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试大纲解析

（数学一和数学二适用）

教育部考试中心

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2008 年全国硕士研究生入学统一考试

数学考试大纲解析

（数学一和数学二适用）

教育部考试中心

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

2008年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析/教育部考试中心.—北京:高等教育出版社,2007.8

数学一和数学二适用

ISBN 978-7-04-021308-9

Ⅰ.2… Ⅱ.教… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第096907号

策划编辑 刘 佳　**责任编辑** 田晓兰　**封面设计** 王凌波
责任校对 殷 然　**责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	涿州市星河印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　本	787×1092　1/16	**版　次**	2007年8月第1版
印　张	25.25	**印　次**	2007年8月第1次印刷
字　数	620 000	**定　价**	40.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号 21308-00

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010)58581897/58581896/58581879

传　　真：(010)82086060

E - mail：dd@ hep. com. cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)58581114/5/6/7/8

特别提醒："中国教育考试在线"http://www.eduexam.com.cn 是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨，为考生提供名师导航、试题宝库、在线考场、图书浏览等多项增值服务。高教版考试用书配有本网站的增值服务卡，该卡为高教版考试用书正版书的专用标识，广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息，并以此辨别图书真伪。

第一部分　高等数学

一、函数　极限　连续

• 考试内容与要求 •

考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

• 考试内容解析 •

（一）函数

1. 定义　设 x 与 y 是两个变量，D 是实数集的某个子集，若对于 D 中的每个值 x，变量 y 按照一定的法则有一个确定的值 y 与之对应，称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x).$$

数集 D 称为函数的定义域，由函数对应法则或实际问题的要求来确定. 相应的函数值的全体称为函数的值域. 对应法则和定义域是函数的两个要素.

2. 几种特性

1° 有界性　设函数 $y=f(x)$ 在数集 X 上有定义，若存在正数 M，使得对于每一个 $x\in X$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则，即这样的 M 不存在，称 $f(x)$ 在 X 上无界. 所以函数在 X 上无界，是对任何 $M>0$，总存在 $x_0\in X$，使 $|f(x_0)|>M$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

2° 单调性　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2,且 $x_1<x_2$ 时,均有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad [\text{或} f(x_1)>f(x_2)],$$

称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少).如果其中的"$<$"(或"$>$")改为"$\leqslant$"(或"$\geqslant$"),称函数 $f(x)$ 在 I 上单调不减(或单调不增).

3° 奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-a,a)\quad(a>0)$,若对于任一 $x\in(-a,a)$,都有 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$ 为偶函数,如常数 $C,x^2,\cos x$ 等,其图像关于 y 轴对称;若对于任一 $x\in(-a,a)$ 都有 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$ 为奇函数,如 $x,x^3,\sin x$ 等,其图像关于坐标原点对称.

4° 周期性　对函数 $y=f(x)$,若存在常数 $T>0$,使得对于定义域内的每一个 x,$x+T$ 仍在定义域内,且有

$$f(x+T)=f(x),$$

称函数 $y=f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 复合函数、反函数、隐函数与分段函数

(1) 复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ,若集合 D_f 与 Z_φ 的交集非空,称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,u 为中间变量.对复合函数,重要的是会把它分解,即知道它是由哪些"简单"函数复合而成的.

(2) 反函数　设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f,定义域为 D_f,则对于每一个 $y\in Z_f$,必存在 $x\in D_f$ 使 $y=f(x)$.若把 y 作为自变量,x 作为因变量,便得一个函数 $x=\varphi(y)$,且 $f[\varphi(y)]=y$,称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.但习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=\varphi(x)$.$y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

(3) 隐函数　设有方程 $F(x,y)=0$,若当 x 在某区间内取任一值,便总有满足该方程唯一的值 y 存在时,称由方程 $F(x,y)=0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

(4) 分段函数　若一个函数在其定义域的不同部分要用不同的式子表示其对应规律,如 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & a<x<b,\\ \psi(x), & c<x<d,\end{cases}$ 称为分段函数.

(二) 极限

1. 概念

(1) 定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域 $(x_0-\delta_1,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_1)$ 内有定义,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当上述去心邻域内任意 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,不等式 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 或 $f(x)\to a\quad(\text{当 } x\to x_0)$.直观地说,即当 x 无限趋近 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限趋近常数 a.

定义 2　设 $f(x)$ 在区域 $|x|>E>0$ 内有定义,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得当 $|x|>M\geqslant E$ 时,不等式

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

恒成立,则称 a 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a.$$

直观地说,即当 $|x|$ 无限增大时,函数无限趋近常数 a.

(2) 左极限与右极限　在定义 1 中,若把"$0<|x-x_0|<\delta$"改为"$x_0-\delta<x<x_0$",即自变量 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0,则称 a 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a\quad\text{或}\quad f(x_0-0)=a;$$

相应把定义 1 中的"$0<|x-x_0|<\delta$"改为"$x_0<x<x_0+\delta$",a 便是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=a\quad\text{或}\quad f(x_0+0)=a.$$

极限存在的充分必要条件:当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在的充分必要条件为其左、右极限存在并相等,即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

在定义 2 中,把 $|x|>M$ 改为 $x>M$,便得到 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$,以及把

“$|x|>M$”改为 $x<-M$,便得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$ 的定义.

注 把数列$\{x_n\}$看作整标函数即 $x_n=f(n)\quad(n=1,2,\cdots)$,则数列极限的概念$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 便是$f(x)$在$x\to+\infty$的极限的特殊情况:自变量 x 取正整数. 即对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 为数列$\{x_n\}$的极限,也称此数列收敛于 a.

2. 性质

1° 唯一性 在自变量的一个变化过程中($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$),若函数的极限存在,则此极限唯一.

2° 有界性 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$[或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$],则存在 x_0 的某去心邻域(或 $|x|>M>0$),$f(x)$在此邻域(或 $|x|>M>0$)内有界.

3° 保序性 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$、$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=b$,若 $a<b$,则存在 x_0 的某去心邻域(或 $|x|>M>0$),在此邻域(或 $|x|>M>0$),恒有$f(x)<g(x)$;若在 x_0 的某去心邻域(或 $|x|>M>0$)内恒有$f(x)\leqslant g(x)$,则 $a\leqslant b$.

3. 极限存在准则

夹逼准则:若在 x_0 的某去心邻域(或 $|x|>M>0$)内,恒有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=a$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$.

单调有界准则:单调有界数列必收敛.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

5. 极限的四则运算

设在自变量的同一个变化过程中($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$),$\lim f(x)=a$,$\lim g(x)=b$,则有

(1) 和差:$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$.

(2) 积:$\lim[f(x)g(x)]=[\lim f(x)]\cdot[\lim g(x)]=a\cdot b$,特别地$\lim cf(x)=c\lim f(x)=ca$(其中 c 为常数),$\lim[f(x)]^k=[\lim f(x)]^k=a^k$ (其中 k 为正整数).

(3) 商:若$\lim g(x)=b\neq0$,则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

6. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的概念 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$,称 $\alpha(x)$为 $x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小,即极限为 0 的变量为无穷小. 常数 0 也是无穷小.

(2) 无穷小性质 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$ 的充分必要条件为$f(x)=a\pm\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$为 $x\to x_0(x\to\infty)$的无穷小.

(3) 无穷小的运算

1° 加法:有限多个无穷小的和仍为无穷小;

2° 乘法:有限多个无穷小的积仍为无穷小;

3° 有界变量与无穷小的乘积亦为无穷小.

(4) 无穷小的比较

设 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$都是在同一个自变量变化过程中的无穷小,且$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$也是在此变化过程中的极限:

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$高阶的无穷小,记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$低阶的无穷小;

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$（其中 c 为常数），称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小；

特别，若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

在求极限过程中，有时利用等价无穷小代换可以化简计算，所以应掌握几个常见的等价无穷小：当 $x\to0$ 时，

$$\sin x\sim x\sim\tan x,$$
$$\ln(1+x)\sim x,$$
$$e^x-1\sim x,$$
$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,$$
$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2 \text{ 等等.}$$

（5）无穷大的概念　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$，称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$　$(x\to\infty)$ 时的无穷大，即绝对值无限增大的变量为无穷大.

（6）无穷小与无穷大之间的关系

在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则其倒数$\frac{1}{f(x)}$必为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则其倒数$\frac{1}{f(x)}$必为无穷大.

（三）连续

1. 函数的连续性

（1）连续性的概念　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若当自变量增量 $\Delta x=x-x_0\to0$ 时，对应的函数值增量 $\Delta y=f(x_0+x)-f(x_0)\to0$，即$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续，$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$，称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

显然，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一处都连续，称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，也称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的连续函数；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，又在 a 点处右连续，b 点处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

（2）运算

1° 加法　有限多个在同一点处连续的函数之和，仍在该点处连续；

2° 乘法　有限多个在同一点处连续的函数之积，仍在该点处连续；

3° 除法　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续，且 $g(x_0)\neq0$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$在点 x_0 处连续.

（3）复合函数与初等函数的连续性

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，若函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

一切初等函数在其定义区间上都是连续的.

2. 函数的间断点

（1）函数间断点的概念　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点. 因此，若函数 $f(x)$ 在 x_0 处无定义；或 $f(x)$ 在 x_0 处虽有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；或虽然 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，此时 x_0 便为函数 $y=f(x)$ 的一个间断点.

（2）函数间断点的类型　设 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的间断点，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，其他均称为第二类间断点.

在第一类间断点中，左、右极限相等的称为可去间断点，不相等的称为跳跃间断点；无穷间断点与振荡间断

点都是第二类间断点.

3. 闭区间上连续函数的性质

1° 最大值和最小值定理　闭区间上的连续函数一定有最大值与最小值.

2° 有界性定理　闭区间上的连续函数在该闭区间上一定有界.

3° 介值定理　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)\neq f(b)$,则对于$f(a)$与$f(b)$之间的任一常数C,必在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使得$f(\xi)=C$.

推论　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M与最小值m之间的任何值.

4° 零点定理　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)$与$f(b)$异号,则在开区间(a,b)内至少存在函数$f(x)$的一个零点,即至少有一点$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=0$.

•例 题 详 解•

例 1.1　已知$f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$,则$\varphi(x)=$________的定义域为________.

答案　$\arcsin(1-x^2)$;$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$或$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

提示　本题主要考查函数记号的运算和复合函数的定义域.依次求出$\varphi(x)$的表达式及其定义域.

解　因　$1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$,故

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

从而要求

$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1,$$

即

$$0\leqslant x^2\leqslant 2,$$

解之得

$$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

典型错误　本题主要错在粗心上;由不等式$0\leqslant x^2\leqslant 2$得到的解为$0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

例 1.2　设函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则$f[f(x)]=$______.

答案　1.

提示　本题考查分段函数的复合函数,从$f(x)$和$f[f(x)]$的定义不难得到结果.

解　由$f(x)$的定义知,对任意$x\in(-\infty,+\infty)$,都有$|f(x)|\leqslant 1$.由$f[f(x)]$定义知,当$|f(x)|\leqslant 1$时,$f[f(x)]=1$,因而对每一$x\in(-\infty,+\infty)$都有

$$f[f(x)]=1.$$

典型错误　将$f[f(x)]$函数写成

$$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1,\end{cases}$$

是考生常犯的错误.错在没有看到$|f(x)|>1$是不成立的.

例 1.3　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$______.

答案　$\dfrac{1}{2}$.

提示　本题考查数列极限存在的"夹逼准则",以及适当"放大"与"缩小"的技巧.关键的思路是把每一项的分母取成相同的式子.

解　因为

$$\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$
$$\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1},$$

所以

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2},$$

故由数列极限存在的“夹逼准则”，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

典型错误 不少考生面对这类考题不知如何下手. 解这类题目常用的方法有两种：一是利用“夹逼准则”（如本题），一是化为定积分（见例 1.4）. 利用“夹逼准则”的关键是做适当的“放大”与“缩小”，并使它们的极限相等.

例 1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]=$______.

答案 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

提示 本题考查定积分概念. 将被积函数化为定积分求极限.

解 因为

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\Delta x_k,\end{aligned}$$

其中 $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$，$\Delta x_k=\frac{\pi}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 所以，根据定积分定义，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.\end{aligned}$$

典型错误 利用定积分求极限的方法是考生比较生疏的. 原因是他们“重方法、轻概念”. 应注意改变这种倾向.

例 1.5 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$________.

答案 $\frac{1}{3}$.

提示 本题属“$\infty-\infty$”型的极限题. 通分后，用洛必达法则或用等价无穷小代换求解.

解 用洛必达法则求解：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos x}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

用等价无穷小代换（$\tan x\sim x$）后再用洛必达法则：

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

典型错误 学会正确地运用等价无穷小代换，常能减少解题的工作量. 但这种代换要在乘或除法中使用，在加、减法中不能用！解本题常犯的一个错误是答案为 0，其原因就是不能正确运用等价无穷小代换.

例 1.6 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$______.

答案 $e^{-\frac{1}{2}}$或$\frac{1}{\sqrt{e}}$.

提示 本题主要考查洛必达法则或用等价无穷小代换与用重要极限求极限的方法. 可将原式化为 $e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}$后求解,亦可利用重要极限直接求解.

解 因 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}$,

而
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2},$$

所以
$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{-\frac{1}{2}}\text{或}\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

利用重要极限的解法如下:
$$\text{原式}=\lim_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}.$$

而
$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以
$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{-\frac{1}{2}}\text{或}\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

典型错误 将答案写成$-\frac{1}{2}$. 原因是忘了$-\frac{1}{2}$只是指数的极限. 这是一种常见的粗心错误,考生求出$-\frac{1}{2}$后应再看一下原题求的是什么!

例 1.7 若 $x\to0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,则 $a=$______.

答案 -4.

提示 本题考查等价无穷小概念和利用等价无穷小代换求极限的方法. 求出$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}$后令其等于1,便能解出 a.

解 由常用的等价无穷小代换:当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ 知,当 $x\to0$ 时
$$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim-\frac{1}{4}ax^2,$$
$$x\sin x\sim x^2.$$

所以
$$1=\lim_{x\to0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{1}{4}a,$$

故 $a=-4$.

也可用洛必达法则求极限:
$$1=\lim_{x\to0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}(1-ax^2)^{-\frac{3}{4}}(-2ax)}{\sin x+x\cos x}$$
$$=-\frac{a}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=-\frac{a}{4}.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

典型错误　填 $-\frac{1}{4}$ 或 4 的考生都有. 这显然是粗心所致. 考生在填写答案时一定要认真复核.

例 1.8　若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $a=$ ________.

答案　-2.

提示　本题考查函数的连续性概念. 对分段函数,主要考查函数在分界点处的连续性. 即先求 $x\to 0$ 时函数的极限值,再令 $f(0)$ 等于此极限,便可解出 a 来.

解　因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+2ae^{2ax}}{1}=2+2a.$$

由函数在一点处连续的定义,应有

$$a=2+2a,\quad 解得\ a=-2.$$

典型错误　函数在一点处连续,必然在该点处极限存在. 所以本题的关键仍是正确地求出极限. 如果极限求错,其结果肯定会错. 另外也有令 $2+2a=0$,得到 $a=-1$ 的. 其原因是没有仔细审题.

例 1.9　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ______.

答案　-2.

提示　本题考查分段函数在分界点处的连续性. 让左、右极限相等并等于 $f(0)$ 来确定常数 a.

解　由函数表达式知 $f(0)=a$;

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}ae^{2x}=a;$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2.$$

所以 $a=-2$.

典型错误　解本题出错大多在求极限上:用洛必达法则求导数出错. 所以若能用等价无穷小代换就尽量选用此方法.

例 1.10　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ________.

答案　0.

提示　本题考查由极限定义的函数与间断点的概念. 正确求出 $f(x)$ 的表达式即可.

解　显然,当 $x=0$ 时,$f(x)=0$;而当 $x\neq 0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=\frac{1}{x},$$

所以

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$$

由此可知 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

典型错误　如果换成填 $f(x)$ 的表达式,出错率会加大. 因为无论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有无定义,$x=0$ 都是其间断点.

例 1.11　曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 ________.

答案 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

提示 本题考查曲线的斜渐近线概念及其求法. 分别求 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ 及 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)$.

解 因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(2x+1)}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x^2-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4}.$$

所以斜渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

典型错误 不少考生不会求曲线的斜渐近线方程,一个原因是近几年没有出这类考题. 所以考生应全面复习《考试大纲》规定的内容,不可偏废.

例 1.12 曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

答案 $y=x+\frac{3}{2}$.

提示 本题考查曲线的斜渐近线的概念与求法. 解法同例 1.11.

解 因为

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^3-x^3}{\sqrt{x}\left[\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{x^3}\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+3x+1}{\sqrt{x(1+x)^3}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}+1}=\frac{3}{2},$$

或

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}\,\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}+\cdots\right)=\frac{3}{2},$$

所以该曲线的斜渐近线方程为 $y=x+\frac{3}{2}$.

典型错误 求极限 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-ax)$ 是本题的一个难点. 不少考生填不出答案,就是因为不会求此极限. 用初等方法求极限也是很重要的方法,考生应全面掌握求极限的各种方法(见本章后面的“小结”).

例 1.13 设 $f(x)=x\sin x\cdot e^{\cos x}$,则在 $(-\infty,+\infty)$ 内,$f(x)$ 为

(A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

答案 (D).

提示 本题考查函数的基本特性. 可直接证明,也可用排除错误选项而得正确选项.

解 因为 $f(-x)=(-x)\cdot\sin(-x)\cdot e^{\cos(-x)}=x\sin x\cdot e^{\cos x}=f(x)$.

所以 $f(x)$ 是偶函数,故选(D).

同时,我们指出,由于 x 是无界的非周期函数,所以(A)、(C) 均错;而 $\sin x,\cos x$ 都是周期函数,所以

(B) 错.

典型错误 答(A)与(C)的都有. 原因是没有看到$f(x)$的一个因式x既不是有界的也不是周期函数. 所以考生要仔细分析函数$f(x)$的每一个因子再下结论.

例 1.14 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$则$f(-x)$等于

(A) $\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

答案 (D).

提示 本题考查分段函数的函数记号运算. 关键要注意$-x$的取值范围.

解
$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0,\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$$
即选项(D)正确.

典型错误 选(C). 原因是只注意到式子的改变而没有关注每个式子的定义域的变化. 所以,对分段函数一定要注意每个式子后面的定义域.

例 1.15 设数列x_n与y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是

(A) 若x_n发散,则y_n必发散. (B) 若x_n无界,则y_n必有界.

(C) 若x_n有界,则y_n必为无穷小. (D) 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则y_n必为无穷小.

答案 (D).

提示 本题考查数列极限及其运算规律. 这种类型的题,比较适宜于用举反例的方法排除不正确的结论. 会举反例是考生应该掌握的方法,是加深对概念和理论理解的手段.

解 若取$x_n=n,y_n\equiv 0$,便否定了(A);

若取$x_n=n+(-1)^{n-1}n,y_n=n+(-1)^n n$,便否定了(B);

若取$x_n\equiv 0$,则y_n可以为任何数列而不必是无穷小,这也否定了(C).

于是剩下(D)是正确的. 事实上,当$\dfrac{1}{x_n}(n\to\infty)$为无穷小时,$y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$为无穷小$(x_ny_n)$与无穷小$\dfrac{1}{x_n}$的乘积,从而必为无穷小,故选(D).

典型错误 选(B). 原因是考生对"无界"与"无穷大"的区别尚没有掌握. 要多看一些例题并学会举反例.

例 1.16 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$对任意n成立. (B) $b_n<c_n$对任意n成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在. (D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

答案 (D).

提示 本题考查收敛数列的性质. 用举反例的方法排除错误结论.

解 设$a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n},b_n=\dfrac{n-1}{n}$,它们满足题目的条件,但$1=a_2>b_2=\dfrac{1}{2}$,故选项(A)错;若取$b_n=\dfrac{n+1}{n}$,$c_n=\ln n$,便否定了选项(B);若取$a_n=\dfrac{1}{n^2},c_n=n$也否定了选项(C). 故只有选项(D)正确.

事实上,由于$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,所以当$n$充分大时必有$b_n>0$,且极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=1$. 若极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$存在,设为$A$,则

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\cdot b_n c_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\cdot\lim_{n\to\infty} b_n c_n = A,$$

与 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$ 矛盾，即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

注 选项(A)、(B)被否定，在于"对任意 n 成立"这个条件. 事实上，由于这三个数列都是非负的，所以由极限的"保序性"，当 n 充分大后，必有 $a_n < b_n$. 而当 n 充分大后 $b_n < c_n$ 也是成立的. 换言之，若把选项(A)、(B)中的"对任意 n 成立"改成"对充分大的 n 成立"，则此题就不是单选题了.

典型错误 选(A)或(B)的均有. 原因是对收敛数列的"保序性"理解不全面. 考生对题目中的每一个条件都认真思索它的含意，便可少犯此类错误.

例 1.17 设 $f(x) = \int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$，$g(x) = x^3 + x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 等价无穷小. (B) 同阶但非等价无穷小. (C) 高阶无穷小. (D) 低阶无穷小.

答案 (B).

提示 本题考查无穷小的比较以及变上限定积分的导数. 由无穷小比较的概念，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$，便可得到结论.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3+x^4}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}$$

$$\xlongequal{\text{等价无穷小代换}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2+4x^3}$$

$$\xlongequal{\text{重要极限}} \frac{1}{3},$$

因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但非等价无穷小. 故选(B).

典型错误 本题在求极限的过程中，如果不用等价无穷小代换而继续用洛必达法则，会比较复杂而增加工作量，同时还可能会得到错误的结论.

例 1.18 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)$ 是比 $x\sin(x^n)$ 高阶的无穷小，而 $x\sin(x^n)$ 是比 $(\mathrm{e}^{x\tan^2 x}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

答案 (C).

提示 本题考查无穷小的比较. 在比较的过程中，把每个无穷小都用其等价的无穷小代换便可得到正确的结论.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^3) \sim \frac{x^2}{2}\cdot x^3 = \frac{x^5}{2}$,

$$x\sin(x^n) \sim x^{n+1},$$

$$\mathrm{e}^{x\tan^2 x} - 1 \sim x\tan^2 x \sim x^3,$$

因而正整数 $n+1=4$，即 $n=3$. 故选(C).

典型错误 选(D). 应该是 $n+1=4$，$n=3$. 选(D)者是错把 n 等于 4 了.

例 1.19 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$，$\beta = \int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，$\gamma = \int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

(A) α,β,γ. (B) α,γ,β. (C) β,α,γ. (D) β,γ,α.

答案 (B).

提示 本题考查无穷小的比较,分别求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\beta}{\gamma}$等即可.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos x^2}{2x\tan x}=\infty$,所以,$\alpha$ 是比 β 低阶的无穷小;又

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

即 β 是比 γ 高阶的无穷小;而

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}=\infty,$$

即 α 是比 γ 低阶的无穷小. 因而正确的排列次序是 α,γ,β.

或者,分别求出 α,β,γ 的导数,对仍是无穷小的变量用其等价无穷小代换,再进行比较也可得出结论:当 $x\to0^+$ 时,

$$\alpha'=\cos x^2\to1,$$
$$\beta'=2x\tan x\sim2x^2,$$
$$\gamma'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}\sim\frac{x}{2},$$

由此可知,正确的排列次序是 α,γ,β.

典型错误 选(A). 原因是 β 和 γ 的导数求错:$\beta'=\tan x,\gamma'=\sin x^{\frac{3}{2}}$. 作为变上限定积分求导,有公式 $\left[\int_a^{\varphi(x)}f(t)\,\mathrm{d}t\right]'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$,考生应充分注意!

例 1.20 "对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非必要条件又非充分条件.

答案 (C).

提示 本题考查对数列极限定义的理解,以及正确理解"必要条件"与"充分条件". 将题目中所述与数列极限的定义加以对照,不难看出它首先是必要条件,即由数列极限的定义:"对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$,存在 $N_1>0$,使得当 $n>N_1$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$"可以推出题中所述的. 这就否定了选项(A)与(D). 但它还是一个充分条件. 这就要求考生对数列 x_n 收敛于 a 的定义有深入的理解.

解 下面来推导它也是充分条件.

对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$,取 $\varepsilon=\min\left\{\dfrac{\varepsilon_1}{3},\dfrac{1}{3}\right\}$,这时 $\varepsilon\in(0,1)$,由已知,对于此 ε 存在 $N>0$,使得当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$,现取 $N_1=N-1$,于是有当 $n\geqslant N>N_1$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant\dfrac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$. 这证明了数列$\{x_n\}$收敛于 a. 总之(C) 是正确的.

典型错误 选(B). 表明考生是机械地理解数列极限的定义. 也有考生选(A),他们还需把"充分条件"与"必要条件"弄清楚. 总之,对数学上的重要概念,不能光"背下来"而要真正理解.

例 1.21 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$等于

(A) 0. (B) 6. (C) 36. (D) ∞.

答案 (C).

提示 本题考查函数极限的计算，以及泰勒公式的应用. 一个解法是在已知的极限中凑出欲求极限的形式：$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\frac{6+f(x)}{x^2}+\frac{\sin 6x-6x}{x^3}$，问题就化为计算第 2 项的极限了. 另一个解法是将 $\sin 6x$ 展成带皮亚诺余项的 3 阶泰勒公式

$$\sin 6x = 6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)$$

代入运算. 显然第二种解法要方便一些. 利用展成泰勒多项式求极限是一种重要的求极限的方法.

解法 1 由上述分析得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}+\frac{\sin 6x-6x}{x^3}\right]\\&=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{6\cos 6x-6}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{-36\sin 6x}{6x}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right]=0.\end{aligned}$$

故选(C).

解法 2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right]=0.\end{aligned}$$

亦为(C)正确.

典型错误 选(A). 错在：

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x\left[\frac{\sin 6x}{x}+f(x)\right]}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}=0.$$

再把$\frac{\sin 6x}{x}$用 6 代替，便得此极限为 0. 错就错在用 6 代替$\frac{\sin 6x}{x}$，所以考生在有加、减的式子中不能随便代替.

此外，不看$f(x)$是否满足条件就用洛必达法则也是错误的！

例 1.22 设函数 $y=f(x)$ 在$(0,+\infty)$内有界且可导，则

(A) 当$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$时，必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. (B) 当$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在时，必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$时，必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$. (D) 当$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$存在时，必有$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

答案 (B).

提示 本题考查函数的极限与导数的极限是否有联系，也可考查用拉格朗日中值定理处理问题的能力. 既可用举反例排除错误选项，也可直接证明(B).

解 (C)、(D)容易排除：设$f(x)=\sin x$，则它满足题设条件，且$\lim\limits_{x\to0^+}\sin x=0$但$\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1$，故(C)、(D)均错.

又设$f(x)=\frac{1}{x}\sin(x^2)$，它在$(0,+\infty)$内有界可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin(x^2)=0$；当$x>0$时，$f'(x)=-\frac{\sin(x^2)}{x^2}+2\cos(x^2)$，由于当$x\to+\infty$时$f'(x)$不存在，所以(A)错. 故只有(B)正确. 事实上，若$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在但不等于 0，则$f(x)$必无界.

用反证法. 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$，则对于$\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，存在$X>0$，使当$x>X$时，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com