

SHU XUE JIAO XUE LUN YAN JIU

数学教学论研究

■ 刘学军 著

河北人民出版社

前 言

数学教学论是一门以一般教育学、教学论基本理论为理论指导,以一定系统的数学知识为载体,从数学自身规律出发,分析数学教学过程的特点,总结长期以来数学教学的历史经验,揭示数学教学过程的规律,研究数学教学过程中的诸要素及其相互间的关系,并对数学教学的效果开展科学评价的一门综合性、实践性很强的理论科学。随着社会和数学学科自身的发展、数学教学和学习理论不断丰富,数学教学论的研究对象、范围和研究深度也在不断发生着变化。

新一轮的基础教育数学课程改革在我国数学教育史上是前所未有的。它所带来的观念变化,直接导致了教学目标、教学内容、教学策略、教学模式、教学评价的深刻变革。教师自身教学理论水平和实践能力是决定课程与教学改革成败的关键。新课程的实施,既要求高等院校在现有的教师培养过程中融入新的课程理念,使未来教师能够了解新课程、理解新课程,又要求一线教师更新教学观念,改进原来的教学方法、教学行为和教学手段,重新确立和认识自己的角色,改变原有课堂专业生活方式,提高专业水平。

在此大背景下,笔者在继承前人研究成果的基础上,在现代数学教学观念的指导下,紧密结合当前基础教育课程改革的基本理念,对传统意义上数学教学论进行了改造,确立并形成了体现现代数学教学理念的数学教学论。

本书首先回顾了近代国际数学教育改革运动及其特点,总结了我国建国以来数学教育改革成果,特别是对近二十年来我国数学教育发展进行了综述。其次,对我国基础教育数学课程改革的动因、国家数学课程标准的研制、国家数学课程标准的框架和基本理念进行了分析和研究。接着,在对数学教学基本观念,包括数学观、教学观、学习观、课程观探讨的基础上,对数学教学过程的基本要素,包括教学目标、课程内容、教学策略、教学模

式、教学和学习评价、信息技术与数学教学等进行了详细论述。其中,教学目标部分包括教学目标的制定、我国数学课程教学目的的历史演变、当代国际数学课程教学目标的特点;课程内容部分包括课程内容的选择与编排、基础教育数学课程内容、国际数学课程内容改革的特点;主体参与的教学策略部分包括数学教学主体参与的依据和特点、数学教学主体参与的策略;教学模式部分包括数学教学模式的内涵、意义与作用、中学数学教学模式、当代数学教学模式的发展趋势;教学和学习评价部分包括数学课堂教学评价和数学学习评价;信息技术与数学教学部分包括现代信息技术与数学教学改革、信息技术与数学教学的整合;最后,本书对数学教学实践中的数学教学设计以及数学教学技能等进行了探讨和研究。

本书在把握数学教学的发展方向的基础上,力争突破原有传统教学论的局限,将“学生是教学活动的主体”这一现代教学理念贯穿全书,努力体现当前基础教育课程改革的基本理念,并把新课程的多项要求融入其中。本书具有一定的实用性,它以基础教育数学教学为主要研究对象,以为中学教学服务、为广大在职教师提高教学专业化水平和高师数学教育专业学生走上讲台服务为主旨,在理论阐述的同时,介绍了一些具体方法和实施步骤,个别章节还特别配有教学案例,以便于读者领会和操作。

相信广大数学教师通过阅读此书,对更新教学观念、提高教学理论水平、教学科研能力会有一定的帮助;高师学生阅读此书,能获得比较系统的数学教学论基本知识,掌握基本的数学教学方法与策略,提高对数学教学本质的认识水平,从而有助于形成正确的现代数学教学观念,培养和提高数学教学水平和教育研究能力,并帮助他们在今后的教学生涯中运用所学的理论和方法解决教学实际中的具体问题。

目 录

绪 论	1
第一章 数学教育的改革与发展	9
第一节 国际数学教育的改革与发展	9
第二节 我国数学教育的改革与发展	20
第二章 国家基础教育数学课程改革	32
第一节 基础教育数学课程改革的动因	32
第二节 国家数学课程标准的研制	41
第三节 国家数学课程标准的框架和基本理念	46
第三章 数学教学目标	60
第一节 数学教学目标及其系统	60
第二节 中学数学教学目标的制定	70
第三节 我国数学教学目的的历史演变	76
第四节 当代国际数学课程教学目标的特点	81
第四章 数学课程内容	88
第一节 数学课程内容的选择与编排	88
第二节 义务教育阶段数学课程内容	94
第三节 高中数学课程内容	101
第四节 国际数学课程内容改革的特点	117

第五章 数学教学的理论基础·····	124
第一节 数学观·····	124
第二节 基于教育心理学的数学教学观念·····	129
第三节 现代数学教学观念·····	147
第六章 数学教学主体参与策略·····	158
第一节 数学教学主体参与的依据和特点·····	158
第二节 数学教学主体参与的策略·····	163
第七章 数学教学模式·····	187
第一节 数学教学模式概述·····	187
第二节 中学数学教学模式·····	193
第三节 当代数学教学模式的发展趋势·····	209
第八章 数学教学评价·····	212
第一节 数学教学评价概述·····	212
第二节 数学学习评价·····	216
第三节 数学课堂教学评价·····	235
第九章 现代信息技术与数学教学·····	255
第一节 现代信息技术与数学教学改革·····	255
第二节 现代信息技术与数学教学的整合·····	259
第十章 数学教学实践·····	268
第一节 数学教学设计·····	268
第二节 数学教学技能·····	285
参考文献·····	297
后 记·····	299

绪 论

一、数学教学论研究的对象

明确的研究对象，是一门学科存在的逻辑基础，数学教学论也是如此。研究数学教学论，首先关注的就是其研究对象。事实上，对数学教学论研究对象的把握应建立在对一般教学论研究对象的正确理解之上。

“教学论”又译作教授学（didaktik teaching theory），拉丁语的意思是“教授术”。教育文献中“教学论”这个术语，最初是由17世纪德国进步教育家拉特克（W. Ratke, 1571 ~ 1635）和捷克教育学家夸美纽斯（J. A. Comenius, 1592 ~ 1670）采用的。他们把这个术语释作“教学的艺术”。随着教育科学的发展，教学论逐渐成为一门相对独立的分支学科。

《辞海》在阐释“教学法”条目时说：“包括普通教学法和分科教学法。普通教学法亦称‘教学论’。分科教学法亦称‘各科教学法’或‘各科教学论’，分别研究每一门学科的教学任务、过程、原则、内容、方法和组织形式等。”^①

顾明远主编的《教育大辞典》第一卷在阐述“分科教学论”条目时说：“亦称‘学科教学论’。以某门学科教学的规律为主要研究对象的教学理论。如语文教学论主要研究语文教学的规律；数学教学论主要研究数学教学的规律。其研究范围包括某科教学的目的、内容、方法、评价及其自身研究的对象、方法等。”^②

① 《辞海》（彩图本）第3卷，上海辞书出版社，1999，第3968页。

② 顾明远：《教育大辞典》第一卷，上海教育出版社，1990，第179页。

由此可见,教学论是关于教学活动的理论,是揭示教学的一般规律,研究教和学的一般原理的科学;数学教学论是研究数学教学过程中教和学的联系、相互作用及其统一的科学。它涵盖了教师的数学教学活动与学生的数学学习活动两个方面的内容。因此,应该说,数学教学论的研究范围非常广泛,凡是和数学教与学有关的问题都是其研究的范围。但是,本书仅研究那些与数学教学有密切联系的问题。具体来讲包括:

(1) 现代教学观念层面。本书要在现代教学观念的指导下展开研究。包括对现代数学观、数学价值观、数学教学观、数学学习观的研究。

(2) 数学教学过程的基本要素层面。本书系统而深入地解释了数学教学过程的基本要素,包括教学目标、课程内容、教学策略、教学模式、教学评价、现代信息技术与数学教学、数学教学实践等。

(3) 关系层面。本书在对教学要素研究的基础上,还试图解释这些教学要素之间的内在联系,描述整个数学教育固有的特征,从理论和实践的结合上解决中学数学教学中“为什么教”、“教什么、学什么”、“怎么教、怎么学”、“为什么要这样教或这样学”、“教得怎么样、学得怎么样”等问题。

总之,数学教学论以一般教学论和教育学的基本理论为基础,从数学教学的实际出发,分析数学教学过程的特点,总结长期以来数学教学的历史经验,揭示数学教学过程的规律,研究数学教学过程中的诸要素及其相互关系,并对数学教学的效果开展科学的评价。

除上述课题外,本书还结合国内外数学教育改革背景,对数学教学中的各种新问题开展广泛的研究,特别是紧密结合我国新一轮基础教育课程改革的现实,突出时代特色,使之适应当前基础教育课程改革的新要求。

二、数学教学论的产生与发展

数学教学论的建立,经历了一个从产生、发展到逐步科学化的较长的历史过程。这个过程可分为两个阶段:

(一) 教材教法阶段

教材教法的历史悠久。在国外,最早提出把数学教育过程从教育过程中分离出来,并作为一门独立的科学加以研究的是瑞士教育家裴斯泰洛齐(J. H. Pestalozzi)。他于1803年发表的《关于数的直觉理论》一书中,第一次提出了“数学教学法”这一名称。这便是独立研究数学教学理论的发端。

在我国,早在19世纪末,学科教育研究就已开始,一个世纪以来得到了迅速发展。1904年清政府制定的《奏定优级师范学堂章程》明文规定师范生要学习“教育学”,其内容就包括“各科教授法”。清末,京师大学堂里开始设立“算学教授法”课程。

1917年任职于南京高等师范学校的陶行知先生提议,将“教授法”改称为“教学法”,当时虽被校方拒绝,但这一思想却逐渐深入人心,得到了社会的承认。“数学教学法”此名一直延续到20世纪50年代末。20年代,各地师范院校相继开设了分科教学法课程。1939年,教育部颁发的《学院分系必修及选修科目施行要点》正式确定这门课程的名称为“分科教材及教法研究”。30年代至40年代,我国曾陆续出版了几本数学教学法的书,如1949年1月商务印书馆出版了刘开达编著的《中学数学教学法》。该书对数学教学的现状、教学目标、教学原则作了论述,同时还论述了算术、代数、几何、三角教学法。然而,这些书多半是前人或外国关于教学法的研究,以及根据自己教学实践进行修补而总结的经验,其教育理论并未成熟。

20世纪50年代,我国的《中学数学教学法》用的是苏联伯拉斯基等编著的《中学数学教学法》,其内容主要是介绍中学数学教学大纲的内容和体系,以及中学数学中主要课题的教学法。这些内容虽然仍停留在经验上,但比以往只学一般的教学方法有所进步,毕竟变成了专门的中学数学教学方法。

特定的教学观是形成教材教法内容的基础。在教材教法阶段,人们将数学教学过程认为是传授数学知识的过程,教师是教学活动的主宰,学生只是一批听众。因此,教材教法的内容基本上是以教学经验总结为主的经验性的技艺知识的传授。只要知道“怎么教”的教师就是好教师。此外,当时所形成的教材教法的内容,还是在承认现有教材合理性的前提下研究教学方法的,并不探讨教材本身的合理性问题,不追求完整的理论体系(当时也尚未建立完整的理论体系),往往只回答具体的内容怎么教的问题,注重的是对师范生今后教学实际有操作意义的具体的教学方法和技术的传授和获得,较少从中提炼出教学的一般规律,未能回答数学教学的本质问题,仅仅以课堂教学为主题,以教学方法为核心,以经验描述为内容而展开,是教师—教材—学生的单循环。用现在的观点来看,这一时期对数学教学的研究范围比较狭隘,未能将教学实践经验升华为数学教学理论,并用理论指导教学实践,因此,作为一门学科来讲,其理论程度不高,科学性基础较差。事实上,现有的教材并不一定是合理的,缺乏对教材的合理性的研究,必然会限

制对教法研究的深入,无法充分发挥教师的主动性和创造性。同时,缺乏理论支撑,必然影响其科学性,也必然会限制学科的深入发展。

20世纪70年代,我国的《数学教学法》或《数学教材教法》一直是高师院校数学系(科)体现师范特色的一门专业基础课。1979年,北京师大等全国13所高等师范院校合作编写的《中学数学教材教法》(《总论》和《分论》),作为高等师范院校的数学教育理论学科的教材,成了我国在数学教学论建设方面的重要标志。

(二) 教学论阶段

20世纪后半叶,随着科学技术的突飞猛进,信息时代的来临,知识经济也初见端倪。控制论、信息论、系统论以及计算机等现代理论和技术的应用和普及,促进了科学技术的发展,也促进了人们思想观念的更新,对于数学教学的认识逐步深入。人们逐渐认识到,数学学习的过程是在一个系统中师生之间的可控制的信息交流过程,数学教学应是数学活动的教学,数学教学不仅要传授必要的知识,还要发展学生的能力、开发智力,形成适应现代社会所需要的数学素养和综合素质。在数学教学过程中,“学生是主体,教师是主导”的师生观已达成共识。近年来,人们对数学教学的成效日益关注,教学改革被作为提高数学教育质量的重要手段被提升到了一个新的高度,广大的数学教学工作者也越来越迫切地需要了解和掌握有关能够帮助他们切合实际地解决教学问题的理论。

与此同时,现代教育学、心理学、教学论的研究也获得了极大的发展,为实现从教材教法到学科教学论的转变提供了理论基础和研究的依据;辩证唯物主义哲学、数学方法论、控制论、信息论、系统论的原理为数学教学研究提供了方法论的指导;现代信息技术的应用促使数学教学手段发生了根本性变化。人们对数学教学的本质是什么,数学教学的过程是怎样的,数学教学有哪些内在的和外在的特殊规律等进行了不懈探求,这些因素直接导致了现代意义上的数学教学论逐步形成。

这一阶段所形成的教学论,不仅研究怎么教,还研究教什么、为何而教、教到何种程度,如何检验教的程度等等,比较全面地研究了数学教材的合理性,数学教学过程、方法、组织形式等,对教学操作层面上的问题的研究趋于全面。但是,相对于其他教育类学科来讲,数学教学论理论基础的研究还不够成熟,探索数学教学特有的内在规律,仍需要一个长期的历史阶段,需要进行不断的努力。

1969 年召开的第一届国际数学教育会议的决议中指出:“数学教育界越来越变成具有自己的课题、方法和试验的独立学科。”这是新技术革命时代社会发展对数学教育的呼唤。数学教育经历了近代化运动和“新数”运动之后,人们逐渐意识到需要对数学教育本身进行全面性的研究,并渴望有数学教育理论的指导,而不仅仅是对数学教学一招一式的探讨。

20 世纪 80 年代,我国的数学教学论不仅与国际数学教育共同发展(例如,从 80 年代起我国就派团参加了此后的各届 ICME),而且在数学教学活动和数学教育理论研究方面也逐渐形成了自己的特色。在数学教学法的基础上,开始出现数学教学的新理论。1984 年,丁尔升教授将原苏联著名数学教育学家 A. A. 斯托利亚尔的《数学教育学》一书译成中文,并由人民教育出版社出版发行。从“数学教材教法”到“数学教育学”,不仅仅是一个称呼的变化,而且是包含了一个质的飞跃,反映了 20 世纪数学教育思想的演变过程。

90 年代以来,国内外数学教育发展迅速,数学教育研究极为活跃,我国的数学教学论研究在已构筑的框架基础上不断深入和拓广。

1990 年,曹才翰教授编著的《中学数学教学概论》问世,标志着我国数学教育理论学科已由数学教学法演变为数学教学论,由经验实用型转为理论应用型。

1991 年,张莫宙教授等编著的《数学教育学》,把中国数学教育置于世界数学教育的研究之中,结合中国实际对数学教育领域内的许多问题提出了新的看法,对数学教育工作者涉及的若干专题,进行了分析和评论,这是数学教育研究的一个突破。

1992 年,由天津师范大学主办的《数学教育学报》创刊,对数学教育理论研究与实践探索发挥了重要作用。

近十几年来,数学教育界又涌现出了一批优秀的科研成果,出版了一系列数学教育学著作,研究内容包括“数学教学理论”、“数学学习理论”、“数学思维”、“数学方法论”、“数学课程与数学教育评价”、“数学习题理论”等多个方面。与此同时,我国还加紧了数学教学论专业人才的培养,国内各师范院校已增设课程与教学论(数学)硕士学位授权点和教育硕士(学科教学:数学)专业学位,培养出了一批年青的数学教学论工作者和研究人员。可以说 90 年代我国的数学教学论研究形成了一个高潮,数学教学活动实践和数学教育学理论的结合产生了丰硕的成果。

当前,我国正进行新一轮的基础教育课程改革,数学教育也逐步从

“应试教育”转向素质教育,以适应社会发展、国际竞争和经济全球化、信息化的新形势的需要。所有这些对中学数学教师的专业素养、教学理论、能力水平等诸多方面都提出了更高的要求。高等师范数学教育的改革应适应这一发展趋势,积极投身于数学教育的改革与发展之中,及时更新课程教学内容,才能更好地体现高等师范院校数学教育的先进性和带头作用。例如,2003年4月,张奠宙、李士锜、李俊编著的《数学教育学导论》一书,就用新的观点阐述了中小学数学教育的理论,构建了新的数学教育体系,并特别关注到与正在实施的国家数学课程标准相适应。

数学教学论是一门不断发展的新学科,它的内容、体系的成熟,需要数学教学与数学研究工作者的共同努力。随着我国数学教育事业的蓬勃发展,成果的不断涌现,具有中国特色的数学教学论正在逐步形成。

三、数学教学论的学科性质

(一) 综合性

从学科源缘上看,数学教学论是与数学、教育学、心理学、教学论、逻辑学、哲学有着密切关联的综合性学科。

数学教学论是研究数学教学规律、数学教学内容和方法的,因而数学教学论必然和必须与数学相结合。数学给数学教学论提供加工的材料。一个人数学造诣越高,就越容易把握数学教学内容的思想和方法等精髓的东西,就更容易获得和接近数学教学的本质。因此,数学是数学教学论的基本内容和重要的基础。

探讨数学教学的理论问题时,数学教学论必须和教育学、教学论相结合。这是因为教育学、教学论是研究一般教学理论的学科,它们为反映数学本身的特殊教学理论提供了一般意义上的指南,它们是一般和特殊的关系。教学论为数学教学法提供了一般的理论基础,反过来,数学教学论研究成果又进一步丰富了一般教学论的内容。因此,教育学、教学论为数学教学论提供了理论基础、基本形式和主要规范。

数学教学过程是师生互动的过程,学生是自身学习活动的主人,教师是学生学习活动的组织者、引导者、参与者。为了正确有效地进行教学,教师必须了解学生的心理特点和认知发展规律,这里,心理学的研究成果起到了为数学教学实践提供心理活动理论根据的作用。心理学是数学教学论研究学

生思维活动的逻辑依据。

数学教学论的某些原理是用逻辑方法或实验方法建立起来的。逻辑学和科学方法论是关于科学论证的知识,是对科学论证进行理论分析的基础。在数学教学中引进的逻辑知识,并不是直接地、专门地对它研究,而是为了提高教学效果,促进学生逻辑思维的发展。因此,逻辑学是数学教学论研究学生逻辑思维推理能力的理论基础。

任何数学教学方法和思想都建立在一定的数学哲学思想之上。数学教育哲学从哲学的高度反思数学教学实践中的种种现象,并用相关的理论指导着教学实践。因此,数学哲学是数学教学论研究数学教学问题的指导思想和方法论基础。

此外,数学教学必须借鉴过去的经验教训;数学教学中具体的教与学活动又需要技术作支撑,特别是现代信息技术从根本上提高了数学教学的有效性;数学教学既是一门科学,又是一门艺术,数学理论本身以及数学教学中有着极为丰富的美学问题需要探讨。因此,数学教学论又与数学教育史、现代信息技术、美学等有一定的关系。

由此可见,数学教学论的综合性特点表现在它吸收和利用了众多相关学科的理论、原理和方法,因此可以说它既具有研究方法的综合性又具有理论来源的综合性。

(二) 实践性

教学是一种有目的的实践活动,这就决定了数学教学论是一门实践性很强的学科。数学教学论所要研究的很多问题,从教学原则到教学方法,从教学设计到教学评价,都离不开数学教学实践。教学实践是数学教学论研究的出发点,也是最终归宿。

首先,数学教学论要以广泛的数学教学实践为背景,数学教学实践是数学教学论产生和成长的根基。从其本源而论,教学实践是数学教学论理论的源泉。数学教学论的大量理论都是长期数学教学经验的总结和升华;离开了教学实践,数学教学论就成了无源之水、无本之木。

其次,数学教学论要靠丰富的教学实践提供源源不断的有价值和新异的研究课题,正是教学实践这一动力,推动了数学教学论不断走向深入和成熟。

此外,数学教学论的研究成果,还要回到教学实践中,通过教学实践检验、修正、改进,再加以确认和推广,从而达到数学教学论指导、服务于数

学教学实践的最终目的。

（三）科学性

尽管数学教学论产生于长期的数学教学实践，但它已经不是实践经验的简单汇集，而是经过了多次的科学提炼和升华，对很多问题的研究已达到了理性化的程度。从目前的研究来看，它有确定的研究对象，有综合、系统、科学的研究方法，有内容丰富的研究课题，有清晰、有内在联系的框架结构，同时还受到强大的数学教学改革实践的支撑与检验。所有这些都使得数学教学论能够依据数学科学自身的特点，以教育学、心理学、现代教学论理论为理论基础，以数学科学知识为载体，揭示出数学教学活动的自身规律。这使数学教学论既体现出了教育科学的特征，又体现出其自身的科学性的特征。

（四）发展性

数学教学论是社会、科技的产物。一方面随着社会的不断进步，中学数学的教学理念、教学内容等会发生变化；另一方面，教育学、心理学等与数学教学论相关的学科也处于发展和变革之中。因此，数学教学论只能在一定的时期内，构建起一个相对完整的理论体系，但不可能有终极的理论模式。

此外，从一般意义上讲，可称为科学的学科必须具备这样的条件：有科学的概念、范畴和体系，科学的认识论和方法论。显然，目前的数学教学论还没有完全达到这一要求，还需要不断地充实新内容，更新和发展原有理论。

综上所述，数学教学论是一门以一般教育学、教学论的基本理论为理论指导，以一定的系统的数学知识为载体，从数学自身规律出发，分析数学教学过程的特点，总结长期以来数学教学的历史经验，揭示数学教学过程的规律，研究数学教学过程中的诸要素（教学方法、教学组织形式、教学的物质条件等）及其相互间的关系，并对数学教学的效果开展科学评价的一门综合性、实践性很强的发展中的理论科学。

第一章

数学教育的改革与发展

数学教育从其诞生之日起就处在不断的改革与发展中。纵观 20 世纪各个领域的教育改革，数学教育无疑是最活跃的学科之一。无论是 20 年代波及世界的教育改革运动，还是 50 年代末至今传遍全球的课程改革运动，在近百年来世界性的教育现代化运动中，数学教育始终处于改革的中心地位。

第一节 国际数学教育的改革与发展

一、近代数学教育改革运动

19 世纪末 20 世纪初以来，世界发达国家科学技术和生产力迅速发展，对人才素质的要求不断提高。与此同时，数学的思想、方法和内容也发生了重大变革。突出表现在：首先，纯粹数学已转向研究基本的数学结构；其次，数学的应用范围迅速扩大，信息论、规划论、图论、网络理论等新的数学理论、数学分支和数学方法不断产生；再次，计算机的出现大大增加了对数理逻辑与算法语言知识的需求，同时也为离散数学的应用开辟了广阔的前景。数学在工农业生产、科学技术、自然科学中的作用越来越重要。事实上，此时自然科学也已发展到了一个相当高的水平。所有这些使得许多数学家和数学教育家都察觉到 17 世纪以前形成的传统数学教学内容已不能满足社会生产和科技发展的需要。如何按照时代发展需求设计中小学课程，已成为世界教育的中心议题。于是，从此之后出现了多次较大的数学教育改革运动。下面主要介绍近代数学教育改革运动中影响较大的两次运动。

（一）贝利—克莱因运动

贝利(J. Peili, 1850—1920)是英国伦敦皇家学会力学与数学教授,也是近代数学教育改革的先驱。1901年在英国科学促进会召开的甲组(数学与物理学)与乙组(教育)的联席会议上,贝利发表了著名的《论数学教育》的演讲。在演讲中他全面批判了传统的数学教育,提出了明确的观点。他认为,数学的实践不是教会学生一些技巧,不是将抽象的理论如何运用于自然现象和社会现象。相反,他理解的数学是从自然现象或社会现象中,从实践中发现数学的法则。主张数学要从欧几里德的束缚中走出来。1902年,贝利在他的著作《关于数学教育的讨论》中提出了一系列的改革方案:脱离欧氏几何原本的形态;重视直观在数学中的作用;强调几何的实用部分,重视实验几何、几何应用,重视实际测量和近似计算;建议变量数学进入中学数学教学,尽早开设微积分。贝利针对当时英国数学教学忽视实际应用的弊病,强调了数学的实用性价值,提出数学教学要强调应用;肯定数学教育中思想教育的重要意义,坚持让学生自己去思考发现和解决问题;强调联系实际学习数学的重要性等等。这些思想和改革方案在原则上为人们所接受,并在英国得到部分实施。

英国教育委员会在贝利的影响下,提出了初等学校数学教育的目标应是:理解和掌握数学的基本概念和运算,并理智地应用;具备对日常生活有实际效用的计算的速度和准确性及商业、工业必需的数值计算方法;能将数学原理应用于日常生活中,理解具体物体的各侧面,养成应用的能力;重视智力训练、发展思维、分析、综合、比较、理解、演绎、归纳的能力。

贝利的数学教育改革主张,在英国形成了20世纪数学教育改革的第一个高潮。从此数学教育内容打破了欧氏几何一统天下的局面,许多新的教学内容,如圆锥曲线、微积分等进入了中等数学教育。

克莱因(F. Klein, 1849—1925)是德国数学家、数学教育家。他的改革中学数学内容的主张直接推动了德国的数学教育改革运动。1904年,在德国自然科学会议上,他发表了《关于中学数学与中学物理的若干问题》的演讲,提出了改革中学数学教育的方案,其主张要点是:

(1)提倡数学理论应用于实际。不过于重视数学的形式陶冶,应把重点放在应用方面。

(2)教材内容应以函数概念为中心,以“函数观念”和“直观形象”作为数学教材的核心。

(3) 应当运用教育学、心理学的观点来指导教学活动。顺应学生心理自然的发展,选取教材,安排教材。

(4) 融合数学诸分科,同时使数学与其他各门科学紧密联系。

按照这一方案,德国在1908年出现了将平面几何学、立体几何学、代数、三角、解析几何、微积分等内容汇集成一个整体的全新教科书,中学数学教学课时达到4~6小时,教学效果非常好。

1807年和1908年克莱因还分别撰写了《中学数学教学讲义》和《高观点下的初等数学》二本著作,详细阐述了他“用近代数学的观点和内容改造、充实传统的中学数学内容,把解析几何纳入中学数学,用几何变换的观点改造传统的几何内容,强调和提倡数学理论应用于实际”等的数学教学思想和观点,这些对后来的数学教育发展产生了深远的影响。

美国的数学教育改革得益于美国芝加哥大学校长慕尔(E. H. Moore, 1862—1931)。慕尔不仅拥护贝利的主张,而且结合美国的实际,指出了美国数学教育的许多不足。在1902年12月29日的美国数学年会上,他在就任会长的演讲《论数学基础》(On the Foundation of Mathematics)中的后半部分有关数学教育内容中建议:代数、几何、物理,可否不使它们各个孤立,而编成“有机的统一体”?统一以后,才能使数学、物理与日常生活有密切关系;三角、解析几何、微积分这三门学科,无论从其起源,还是其发展历史来看,都和具体的实际生活密切相关,所以应把这三门学科的基本原理结合起来,使它们密切联系在一起;数学、物理的教学,都应采用实验室的方法。后来,美国出现了体现慕尔主张的新教材,这些教材经过实践证明是优秀的,不仅在美国数学教育中起到了积极作用,而且被翻译到中国后,使用效果也很好。

尽管克莱因、贝利、慕尔的主张各有差异,但基本精神是一致的,这就是:使教材、教法近代化、心理化;强调数学教材的实践性、应用性;实行数学各科的有机统一;理论与实践的统一。从各国数学教育实施的具体情况来看,改革是成功的。函数、微积分、解析几何等一大批近代数学的内容进入了中学数学教科书。数学各分支之间,数学与物理学科之间的联系更紧密了。但是,由于传统观念的阻力,以及当时数学教学水平总体偏低,代数与几何融合和重组教材有一定的难度,加上实用主义哲学思潮的冲击以及第一、二次世界大战的爆发,使这场有意义的数学教学近代化改革运动被中断和冲淡。不过,这次以变革中学数学教学目的和课程内容为中心的数学教育改革运动奠定了整个20世纪数学教育的基础,为后来的数学教育现代化运

动起到了先导作用。

（二）新数运动

1. “新数”运动的历史背景和动因

20 世纪初，数学科学本身已经有了很大的发展。首先，数学科学已完成了其“基础精密化”，接着又在公理化思想的基础上出现了新的认识；其次，出现了许多独立发展的数学新分支；再次，数学的应用也日趋广泛，已经渗透到了各个科学领域，逐渐成为科学技术、实际生活中不可缺少的工具。

另一方面，二次大战结束以后，世界各工业先进国家先后转入和平恢复时期，各国都面临着经济重建、设备更新、军工转民用、采用新技术等问题。到了 20 世纪 50 年代，随着原子能、电子计算机、空间技术和生物工程的出现，世界进入了第三次技术革命。现代技术的发展向人类提出了大量的新的研究课题，尤其给基础数学、应用数学、计算技术等提供了大量问题和发展机会，促进了数学与各门学科的交叉和融合，对数学和数学教育提出了现代化要求。

然而，相比之下，传统的教学理论、教学内容和教学方法已经既不能反映数学自身的发展水平，也不能适应科学技术对数学的现代需求。世界各科学技术先进国家，对当时所出现的中学数学教学质量太差、效率太低的现象普遍感到不满，因此迫切要求进行相应的改革。一批数学家、数学教育家和教育心理学家纷纷提出了自己的改革建议。所有这些形成了“新数”运动的基本动因。

1957 年 10 月 4 日，前苏联的第一颗人造地球卫星发射成功，引起了全世界的震惊。它促使人们开始以新的眼光去认识科学技术发展的需要和教育改革的关系。特别是当时的美国政府在反省检查与前苏联的“差距”后认为，空间技术的落后主要在于科技人才的缺乏，根源在于教育的落后，尤其是中小学数学教育水平的落后。总结出了“极为重要的空间和国防计划方面能否成功，甚至能否进行，极大地依赖于数学及其应用是否占优势”的重要结论。从此，美国政府开始极度关心数学教育状况，认为必须在与前苏联的竞争中占有优势，迅速补充科技工作者的不足。为了科学技术的发展，必须大力改进数学教育，用“新数学”代替过时的“旧数学”，并需采取具体措施。由此触发了美国的“数学教育现代化”运动。

20 世纪 50 年代末到 60 年代初从美国发起的、以学校数学课程现代化