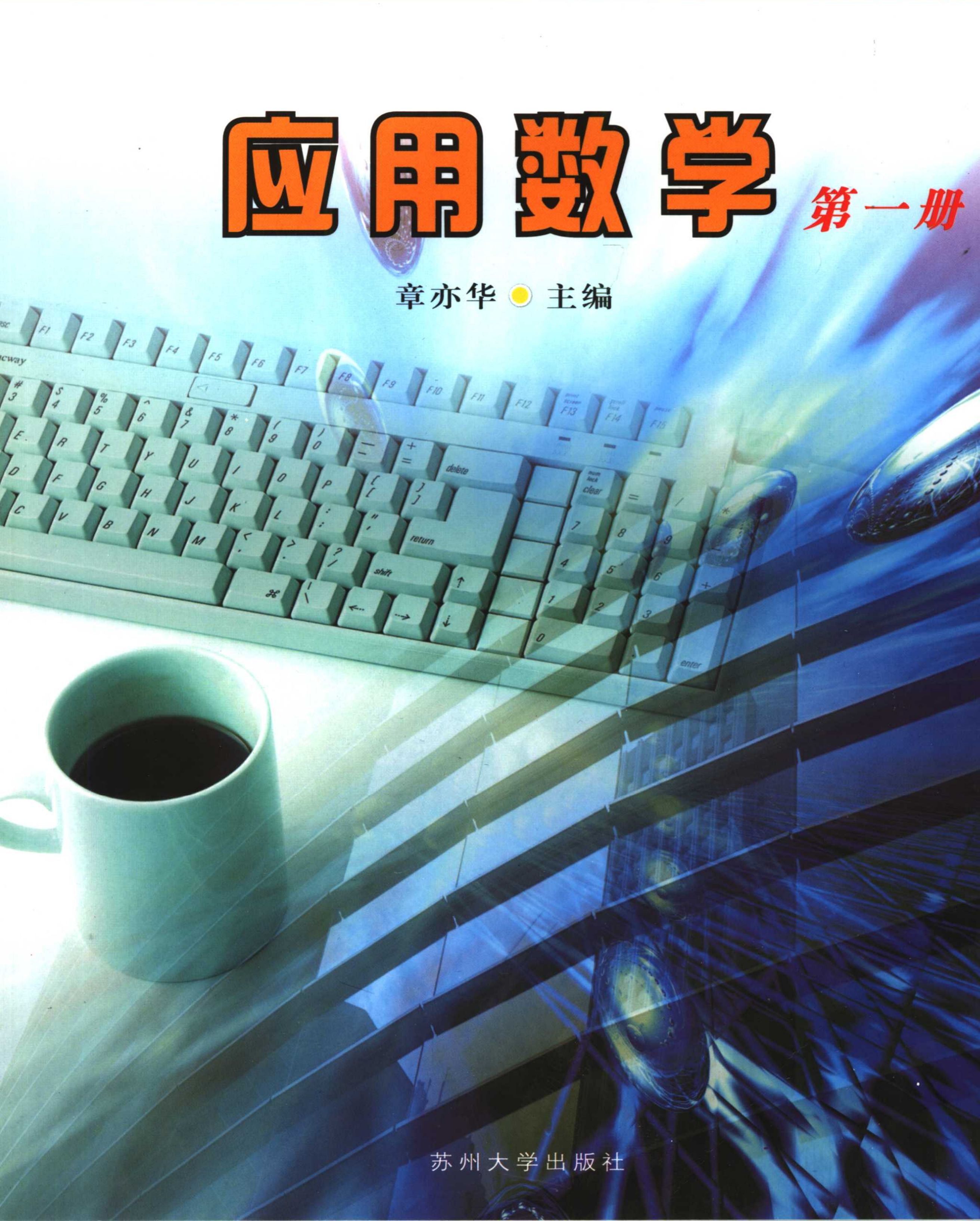
中等职业教育课程改革实验教材

应用数学

第一册

章亦华 ● 主编



苏州大学出版社

应用数学

第一册

章亦华　主　编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学. 第1册/章亦华主编. —苏州：苏州大学出版社，2007.7
中等职业教育课程改革实验教材
ISBN 978-7-81090-848-1

Ⅰ. 应…　Ⅱ. 章…　Ⅲ. 应用数学-专业学校-教材
Ⅳ. O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第109414号

应用数学(第一册)
章亦华　主编
责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路200号　邮编：215021)
丹阳市兴华印刷厂印装
(地址：丹阳市胡桥镇　邮编：212313)

开本787mm×1 092mm　1/16　印张8　字数200千
2007年7月第1版　2007年7月第1次印刷
ISBN 978-7-81090-848-1　定价：12.00元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-67258835

前　　言

随着教学改革的深入，中专课程改革越来越受到人们的关注.数学作为一门文化基础课，是提高学生全面素质和综合能力的重要保证，它的任务一方面要提高学生的科学文化素质和身心素质，培养和训练学生的能力，开拓视野，发展智力、个性和特长；另一方面要为学生学习专业知识、形成职业技能、转换职业岗位、接受继续教育提供必要的文化基础和条件，它具有基础性和工具性双重功能.

为适应中专学生实际，普及数学方法与数学思想的教育，遵循“够用”原则，我们编写了本教材.

本教材立足于中专学生的实际，在编写思路上体现出：求简捷不求全面；重视直觉判断，淡化逻辑推理；重视道理的说明，淡化严密的证明；重视看图、识图，淡化作图；重视使用计算器，淡化运算技巧.适当降低难度，增加情景引入，把深奥的、抽象的、枯燥的数学知识直观化、趣味化、生活化.在加强基础训练的同时，注重实际应用，重点训练实际生活和职业岗位中常见的基本计算和运用，并选取与专业课密切相关的知识点作为学习内容.通过教学，提高学生的数学素养，培养学生的基本运算、数学思维和简单实际应用等能力，为今后的专业课程的学习打下必要的数学基础.

本教材分两册，第一册包含七章内容，注重基础；第二册的一些章节为选学内容，供学有余力的同学选学.

本书由章亦华主编，陆桃根、李根深、宋丹、陈娟、张玉芳、费洪华、梅春林、薛丽萍、朱芳芳、夏洁等老师参加了编写工作，陆桃根、李根深负责统稿，贾叙仁、吕中起两位老师参加了审稿工作.

限于编者水平以及时间仓促等原因，疏漏和不当之处在所难免，请老师和同学们在使用过程中提出意见和建议，您的宝贵意见是对我们工作的最大支持.

本书在编写过程中参考了有关资料，在此一并表示感谢！

编　者

2007 年 5 月

本书编委会名单(按姓氏笔画为序)

王乃国　王　春　司　鸿　刘　江

李翔宇　周敏慧　章亦华　傅寿松

薛　峰

主　　编　章亦华

编写人员　陆桃根　李根深　宋　丹　陈　娟

张玉芳　费洪华　梅春林　薛丽萍

朱芳芳　夏　洁

Contents 目录

第七章　数列

第一章

基本数学运算

伟大的数学家——花拉子密

我们知道，从 1 数到 10，最方便的记录方法是使用阿拉伯数字. 这种奇妙的数字是聪明的阿拉伯人从印度人那儿吸收，并将之介绍到西方与东方的. 同时，这些阿拉伯人向世界推广了数字“0”与十进制. 具体地说，正是借助花拉子密著名的《印度计算法》一书，这种对世界产生难以估量影响的奇妙数字才为世人了解并接受. 因此，人们把这种数字称为阿拉伯数字. 今天，阿拉伯数字已经与我们的生活密不可分了.

中学生进入中学学习的第一门数学课程是什么？答案是代数学. 代数学是人类步入数学以及其他自然科学领域的基础，它是在阿拉伯人手里正式成为数学的一门学科的. 因此，当后来的数学家们孜孜不倦地学习花拉子密的代数学著作时，没有人怀疑代数学是阿拉伯人创立的. 花拉子密对代数学的贡献是不可磨灭的，由他的名字——al-Khowārizmī 的拉丁语译名——Algorismus，不仅派生出“algorithm”或“algorism”（“运算法则”或“十进制”），后来还演变出现在的对数一词——logarithm（简写为“log”），算术“arithmetic”一词的来源也与之类似. 他在代数学中使用的“还原、移项”一词的阿拉伯语音译“al-jabr”，传入欧洲后便演变为我们今天使用的“algebra（代数）”.

20 世纪最具影响力的科学史学家、《科学史导引》的作者乔治 · 萨顿对花拉子密的评价是“那个时代最伟大的数学家、迄今所有时代最崇高者之一”. 希提在《阿拉伯通史》中对花拉子密评价说，他对于数学思想影响之大，是中世纪时代任何作家所不能及的. 花拉子密不仅编辑了最古的天文表，而且编写了关于算术和代数学的最古老的书籍. 本章我们将复习基本数学运算.

§1.1 数与式的运算

代数式是由运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子，单独的一个数或一个字母也被看成代数式.

例如，$3xy$，$2x^3+3y^2-1$，0，a，$\frac{x+y}{z}$，$\sqrt[3]{6xy^2}$等均是代数式.

用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值.

例如，当 $x=1$，$y=2$ 时，$3xy=6$.

上述代数式中，$3xy$，0，a 是单项式；$2x^3+3y^2-1$ 是多项式；$\frac{x+y}{z}$是分式；$\sqrt[3]{6xy^2}$是根式.

下面我们通过举例来说明几种常见代数式的运算.

1.1.1 因式分解

例 1 将下列多项式分解因式：

(1) $axz-3byz-3ayz+bxz$； (2) $a^3b-2a^2b^2+ab^3$；

(3) x^2-y^2+2y-1； (4) $a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}$；

(5) $x^2-6xy-16y^2$.

解 (1) 原式$=az(x-3y)+bz(x-3y)=z(a+b)(x-3y)$.

(2) 原式$=ab(a^2-2ab+b^2)=ab(a-b)^2$.

(3) 原式$=x^2-(y^2-2y+1)=x^2-(y-1)^2$

$=(x-y+1)(x+y-1)$.

(4) 原式$=(a^{\frac{2}{3}})^2-(b^{\frac{2}{3}})^2=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})$

$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})[(a^{\frac{1}{3}})^2-(b^{\frac{1}{3}})^2]$

$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})$.

(5) 原式$=(x-8y)(x+2y)$.

分解因式是重要的代数式运算技能，其主要方法有提取公因式法(如(1)、(2)题)，公式法(如(2)、(4)题)，分组分解法(如(1)、(3)题)，十字相乘法(如(5)题). 有时会用到两种以上的方法(如(1)、(2)题).

一般的分解策略：有公因式先提取公因式；四项及四项以上的一般先分组；分解要彻底.

1.1.2 分式运算

例 2 化简下列各分式：

(1) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$；

(2) $\frac{1}{a+b}-\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$；

(3) $\frac{1}{a+b}-\frac{b}{a^2+2ab+b^2}$；

(4) $\dfrac{\frac{1}{a^2-b^2}}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}}$.

解 (1) 原式$=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}+\frac{a+b}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a}{a^2-b^2}$.

(2) 原式$=\frac{(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{-3ab}{a^3+b^3}$.

(3) 原式$=\frac{1}{a+b}-\frac{b}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)-b}{(a+b)^2}=\frac{a}{(a+b)^2}$.

(4) 解法一：原式$=\dfrac{\frac{1}{a^2-b^2}}{\frac{(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\dfrac{\frac{1}{a^2-b^2}}{\frac{2a}{a^2-b^2}}$

$=\frac{1}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{2a}=\frac{1}{2a}$.

解法二：原式$=\dfrac{\frac{1}{a^2-b^2}\cdot(a+b)(a-b)}{\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)(a+b)(a-b)}=\frac{1}{2a}$.

异分母分式相加减，一般先将各分式的分母分解因式，然后确定公分母，再通分、化简. 化简繁分式应先化简主分数线对应的分子、分母，然后化除为乘；也可以直接乘以分子、分母的公分母，然后化简.

1.1.3 根式化简

例 3 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$；

(2) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$；

(3) $\frac{3}{\sqrt{10}+2}-\frac{8}{\sqrt{17}+1}$；

(4) $1-\sqrt{x^2-1}+\frac{2\sqrt{x+1}+4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

解 (1) 原式$=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

(2) 原式$=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$.

(3) 原式$=\dfrac{3(\sqrt{10}-2)}{(\sqrt{10}+2)(\sqrt{10}-2)}-\dfrac{8(\sqrt{17}-1)}{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{10}-2}{2}-\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{17}-1}{2}$.

(4) 原式$=1-\sqrt{x^2-1}+\dfrac{(2\sqrt{x+1}+4\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$=1-\sqrt{x^2-1}+\dfrac{(2\sqrt{x+1}+4\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{2}$

$=1-\sqrt{x^2-1}+(x+1)+\sqrt{x^2-1}-2(x-1)$

$=4-x$.

本例(2)中，原式的分母为无理式$\sqrt{2}-1$，我们采取的化简方法是分子、分母同时乘以$\sqrt{2}+1$，这样正好利用平方差公式把分母化简为有理数 1. 这个过程通常叫做分母有理化，$\sqrt{2}+1$ 叫做$\sqrt{2}-1$ 的有理化因子.

分母有理化是二次根式化简中经常使用的方法，由于将分母化成了有理数(式)，所以后续的化简变得非常方便.

练习 1.1

1. 将下列多项式分解因式：

(1) $2ax-10ay+5by-bx$；　　(2) $4a^2b-4ab^2+b^3$；

(3) $4x^2-5xy-6y^2$；　　(4) $x(6x-1)-1$；

(5) $x^{\frac{2}{3}}-4y^{\frac{2}{3}}$；　　(6) $4a^2-4ab+b^2+4a-2b$.

2. 化简下列分式：

(1) $\dfrac{3a^2-ab}{3a^2+5ab-2b^2}$；　　(2) $\left(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3}{a^3-x^3}$；

(3) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$；　　(4) $1-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a+1}}$.

3. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$；

(3) $\left[\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}(2\sqrt{2}-3)\right]^{2005}$；　　(4) $\sqrt{x-1}+\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

趣味岛

数字诗欣赏

◆宋代理学家邵康节曾写过一首五言诗：

一去二三里，烟村四五家；
亭台六七座，八九十枝花.

在这首别具一格的诗里，巧妙地运用了一至十这十个数字，寥寥几笔便描绘了景色宜人的乡村画面，成了一首绝妙的数字诗.

◆清代陈沆曾写了一首七言绝句：

一帆一桨一渔舟，一个渔翁一钓钩.
一俯一仰一场笑，一江明月一江秋.

一首诗用了十个“一”字，用得错落有致，轻捷灵巧，有“独”、“一”、“满”、“全”等多种意义.每个“一”都是具体鲜明的形象，写人状物，绘声绘色，很有诗情画意.

§1.2 指　　数

1.2.1 整数指数

在初中，我们学习了整数指数，由

$a^2=a\cdot a$,

$a^3=a\cdot a\cdot a$,

$a^n=a\cdot a\cdot\cdots\cdot a$（$n$ 个 a 连乘），

…

可知，a^n 是 n 个相同因子 a 的连乘积的缩写，a^n 叫做 a 的 n 次幂，a 叫做幂的底数，n 叫做幂的指数.显然地，$a^1=a$.

在上述定义中，n 必须是正整数，所以这样的幂叫做正整数指数幂，容易验证，正整数指数幂的运算满足如下法则：

(1) $a^m a^n=a^{m+n}$；

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$；

(3) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ $(m>n, a\neq 0)$；

(4) $(ab)^m=a^mb^m$.

在法则(3)中，有 $m>n$ 的限制，如果取消这种限制，那么正整数指数幂可以推广到整数指数幂. 例如，当 $a\neq0$ 时，

$$\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0,$$

$$\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}.$$

这些结果不能用正整数指数幂的定义来解释，但我们知道，

$$\frac{a^3}{a^3}=1,$$

$$\frac{a^3}{a^5}=\frac{1}{a^2},$$

即

$$a^0=1,$$

$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$$

于是我们规定

$$\boxed{\begin{gathered} a^0=1\ (a\neq0) \\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq0, n\in\mathbf{N}_+) \end{gathered}}$$

由此规定了零指数幂和负整数指数幂的意义，我们把正整数指数幂推广到整数指数幂，同时正整数指数的运算法则对整数指数运算仍然成立，例如：

$8^0=1$； $(-0.8)^0=1$；

$(a-b)^0=1\ (a\neq b)$； $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0.001$；

$(2x)^{-3}=2^{-3}x^{-3}=\frac{1}{8x^3}\ (x\neq0)$； $(ab)^{-2}=\frac{1}{(ab)^2}=\frac{1}{a^2b^2}$；

$\left(\frac{x^3}{r^2}\right)^{-2}=\frac{x^{-6}}{r^{-4}}=\frac{r^4}{x^6}$； $\frac{a^2}{b^2c}=a^2b^{-2}c^{-1}$.

注 对于零指数和负整数指数幂，底数不能为零.

1.2.2 分数指数

在初中我们还学习了方根的概念，如果

$$x^n=a\ (n>1, n\in\mathbf{N}),$$

那么 x 叫做 a 的 n 次方根. 正数的偶次方根有两个，它们互为相反数，分别表示为 $\sqrt[n]{a}$，$-\sqrt[n]{a}$ (n 为偶数)，负数的偶次方根没有意义；正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数，都表示为 $\sqrt[n]{a}$ (n 为奇数).

正数 a 的正 n 次方根叫做 a 的 n 次算术根.

当$\sqrt[n]{a}$有意义的时候,$\sqrt[n]{a}$叫做根式,n 叫做根指数.

根据 n 次方根的定义,根式具有如下性质:

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$;

(2) 当 n 为奇数时,$\sqrt[n]{a^n}=a$;

当 n 为偶数时,$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a>0.\end{cases}$

例如:

$(\sqrt[2]{5})^2=5$; $(\sqrt[3]{-5})^3=-5$; $(\sqrt[5]{2^3})^5=2^3=8$;

$\sqrt[3]{5^3}=5$; $\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$;

$\sqrt{5^2}=5$; $\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3$.

我们还可以把整数指数幂推广到正分数指数幂.例如:

$$(a^{\frac{1}{3}})^3=a^{\frac{1}{3}\times 3}=a;$$

$$(a^{\frac{2}{3}})^3=a^{\frac{2}{3}\times 3}=a^2.$$

这些运算都不能用整数幂的定义来解释,但如果规定

$$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a},$$

$$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2},$$

则上述分数指数幂就能像整数指数幂那样运算了.

我们约定底数 $a>0$,于是,当 $a>0$ 时,可定义

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\left(n,m\in\mathbf{N}_+,\text{且}\frac{m}{n}\text{为既约分数}\right)$$

负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相同,即对负分数指数幂,我们可以定义

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\left(n,m\in\mathbf{N}_+,\text{且}\frac{m}{n}\text{为既约分数}\right)$$

至此,我们把整数指数幂推广到了有理数指数幂.有理数指数幂还可以推广到实数指数幂.

在 $a^\alpha(a>0)$中,α 可以为任意实数.实数指数幂又有如下三条运算法则:

(1) $a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta}$;

(2) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$;

(3) $(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$.

其中 $a>0,b>0,\alpha,\beta$ 为任意实数.

例 1 化简下列各式(式中字母均为正数):

(1) $3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$；　　(2) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{16a^{-4}}{81b^{4}}\right)^{3}}$.

解　(1) $3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}=3\cdot3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{6}}$

$$=3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^{2}=9.$$

(2) $$\sqrt[4]{\left(\frac{16a^{-4}}{81b^{4}}\right)^{3}}=\left(\frac{2^{4}a^{-4}}{3^{4}b^{4}}\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{(2^{4})^{\frac{3}{4}}\cdot(a^{-4})^{\frac{3}{4}}}{(3^{4})^{\frac{3}{4}}(b^{4})^{\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2^{3}a^{-3}}{3^{3}b^{3}}=\frac{8}{27a^{3}b^{3}}.$$

例 2　利用函数计算器计算(精确到 0.001)：

(1) $0.2^{1.52}$；　(2) 3.14^{-2}；　(3) $3.1^{\frac{2}{3}}$.

解　按键方法和结果如下：

题　序	按　键	显示	结果
(1)	0.2 $\boxed{y^x}$ 1.52 $\boxed{=}$	0.086609512	0.087
(2)	3.14 $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$	0.101423993	0.101
(3)	3.1 $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{ab/c}$ 3 $\boxed{=}$	2.12605484	2.126

练习 1.2

1. 求值：

(1) $8^{\frac{2}{3}}$；　(2) $100^{\frac{1}{2}}$；

(3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}$；　(4) $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$；

(5) $4^{-\frac{1}{2}}$；　(6) $\left(6\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

2. 用分数指数幂表示下列各式(式中字母均为正数)：

(1) $\sqrt[3]{x^{2}}$；　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$；

(3) $m^{2}\cdot\sqrt{m}$；　(4) $\sqrt{a\sqrt{a}}$；

(5) $\sqrt[4]{(a+b)^{3}}$；　(6) $\sqrt[3]{m^{2}+n^{2}}$；

(7) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^{2}}}$.

3. 化简：

(1) $a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{8}}$；　　(2) $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\div a^{\frac{1}{2}}$；

(3) $(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}})^{6}$.

4. 计算：

(1) $2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$；　　(2) $3\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$；

(3) $\sqrt[6]{\left(\frac{8}{125}\right)^{4}}$；　　(4) $\sqrt[3]{\frac{3y}{x}}\cdot\sqrt{\frac{3x^{2}}{y}}$（式中字母为正数）.

5. 利用计算器计算(精确到小数点后 5 位)：

(1) $\sqrt[100]{2}$；　　(2) $100\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt[100]{5}$；　　(4) $3^{\frac{8}{25}}$；

(5) $0.4012^{-\frac{1}{4}}$；　　(6) $1.414^{1.12}$；

(7) $0.0301^{\frac{3}{4}}$.

趣味岛

数学家的遗嘱

阿拉伯数学家花拉子密写完遗嘱时，他的妻子正怀着他们的第一胎小孩."如果我亲爱的妻子帮我生个儿子，我的儿子将继承三分之二的遗产，我的妻子将得三分之一；如果是生女的，我的妻子将继承三分之二的遗产，我的女儿将得三分之一".

而不幸的是，在孩子出生前，这位数学家就去世了.之后，发生的事更困扰大家，他的妻子帮他生了一对龙凤胎，而问题就发生在他的遗嘱内容上.

如何遵照数学家的遗嘱，将遗产分给他的妻子、儿子、女儿呢？

§1.3 对　数

已知 $3^{x}=5$，如何求 x 呢？这也就是已知底数和幂的值，求指数的问题.

如果 $a^{b}=N(a>0$，且 $a\neq 1)$，那么称 b 是以 a 为底的 N 的对数，记作

$$\log_{a}N=b\ (a>0,\text{且 }a\neq 1,N>0).$$

其中，a 称为底数(简称底)，正数 N 称为真数.

对于三个数 a,b,N，$a^{b}=N$ 称为指数式，$\log_{a}N=b$ 称为对数式.

根据对数的定义，可以得到下面的对数恒等式：

$$a^{\log_a y}=y\ (a>0,且\ a\neq 1,y>0)$$

$$\log_a a^y=y\ (a>0,且\ a\neq 1)$$

例如，$2^{\log_2 32}=32$；$10^{\log_{10}100}=100$.

根据对数的定义，对数具有下述基本性质：

(1) 1 的对数为 0，即 $\log_a 1=0$；

(2) 底的对数等于 1，即 $\log_a a=1$；

(3) 0 和负数没有对数.

通常把以 10 为底的对数称为常用对数，为了简便，N 的常用对数 $\log_{10}N$，记作 $\lg N$. 例如，$\log_{10}5$ 记作 $\lg 5$，$\log_{10}3.5$ 记作 $\lg 3.5$.

注 计算器、计算机上都用 log 表示常用对数，实质上就是 lg.

在工程技术中常常使用以无理数 e=2.71828…为底的对数，以 e 为底的对数称为自然对数，如 $\log_e 3$ 记作 $\ln 3$，$\log_e 10$ 记作 $\ln 10$.

任一正实数的常用对数或自然对数都可使用计算器计算.

例 1 把下列指数式写成对数式，对数式写成指数式：

(1) $5^4=625$； (2) $2^{-6}=\frac{1}{64}$；

(3) $3^a=27$； (4) $\left(\frac{1}{3}\right)^m=5.73$；

(5) $\log_{\frac{1}{2}}16=-4$； (6) $\log_2 128=7$；

(7) $\lg 0.01=-2$； (8) $\ln 10=2.303$.

解 (1) $\log_5 625=4$；

(2) $\log_2 \frac{1}{64}=-6$；

(3) $\log_3 27=a$；

(4) $\log_{\frac{1}{3}}5.73=m$；

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$；

(6) $2^7=128$；

(7) $10^{-2}=0.01$；

(8) $e^{2.303}=10$.

例 2 求值：

(1) $\log_2 2$； (2) $\log_2 1$；

(3) $\log_2 16$； (4) $\log_2 \frac{1}{2}$；

(5) $\lg 100$； (6) $\lg 0.01$.

解 (1) $\log_2 2=1$.