21世纪高校教材

GAODENG SHUXUE XITIKE JIAOCHENG

高等数学习题课教程

● 蒋家尚 主编

苏州大学出版社

高等数学
习题课教程

21 世纪高校教材

高等数学习题课教程

主　编　蒋家尚

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/蒋家尚主编. —苏州：苏州大学出版社，2007.8
21世纪高校教材
ISBN 978-7-81090-858-0

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 蒋…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—习题
Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 117522 号

高等数学习题课教程
蒋家尚　主编
责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路200号　邮编：215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址：宜兴市南漕镇　邮编：214217)

开本 787mm×960mm　1/16　印张 15.5　字数 262 千
2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81090-858-0　定价：19.50 元

苏州大学出版社营销部　电话：0512-67258835

《高等数学习题课教程》编委会

主　编　蒋家尚

副主编　屠文伟　施国华

编　委　蒋家尚　施国华　屠文伟　袁永新

卞秋香　陈　静　沈启庆　郭永强

臧正松　刘三明　周小玮　潘秋华

居　琳

前　　言

高等数学习题课在高等数学学习过程中起着非常重要的作用，它能使学习者理顺和巩固所学内容，并在解题中扩展思路，培养数学思维能力。本教程就是为高等数学习题课所编写的，其内容体系参照了教材《高等数学》(同济大学第五版)，适用于各类各层次的高等数学学习者，对报考硕士研究生的读者亦有一定的帮助，也可作为高等数学教师的教学参考书。

本教程包括六部分的内容：

1. 目的要求　按照全国工科院校高等数学课程教学的基本要求，让读者分层次明晰学习高等数学各章内容的目的与要求。

2. 内容提要　包括主要定义、主要定理和主要结论，并给出了作者在高等数学教学中总结出来的一些计算方法和计算公式。

3. 复习提问　提供了老师与学生在习题课上交流的内容，包含对一些概念的理解，辨析一些较难的计算问题等。

4. 例题分析　例题中有基本概念讨论题，有介绍基本方法的计算题或证明题，也有较灵活的综合题，对所给例题作了深入浅出的分析。

5. 自测练习　分 A、B 两个层次，A 层次的练习题以基本题为主，给出了答案；B 层次的练习题难度较大些，给出了详解。

6. 综合练习　按高等数学上册和下册内容分别给出 8 套综合练习，相当于 16 套测试卷，并附有答案。每套用时两小时左右，便于读者巩固所学内容并找出自身的薄弱环节。

本教程的编写得到了江苏科技大学教务处和数理学院领导的关心和支持，得到了数理学院全体高等数学任课教师的大力协作。另外，数理学院胡明老师、孙红老师和叶慧老师为教程中的部分练习的解答付出了辛勤劳动。在此一并表示衷心的感谢。

本教程的不足之处敬请读者批评指正，不胜感激。

编　者

2007 年 5 月

目录 Contents

第一章 函数与极限

一、目的要求 1
二、内容提要 1
三、复习提问 3
四、例题分析 4
五、自测练习 10

第二章 导数与微分

一、目的要求 12
二、内容提要 12
三、复习提问 13
四、例题分析 14
五、自测练习 19

第三章 中值定理与导数的应用

一、目的要求 21
二、内容提要 21
三、复习提问 24
四、例题分析 25
五、自测练习 32

第四章 不定积分

一、目的要求 35
二、内容提要 35
三、复习提问 37

四、例题分析 38
五、自测练习 47

第五章 定积分

一、目的要求 49
二、内容提要 49
三、复习提问 51
四、例题分析 52
五、自测练习 61

第六章 定积分的应用

一、目的要求 65
二、内容提要 65
三、复习提问 67
四、例题分析 67
五、自测练习 73

第七章 空间解析几何与向量代数

一、目的要求 77
二、内容提要 77
三、复习提问 80
四、例题分析 80
五、自测练习 88

第八章 多元函数微分法及其应用

一、目的要求 91
二、内容提要 91
三、复习提问 95
四、例题分析 95
五、自测练习 101

第九章　重积分

一、目的要求　104
二、内容提要　104
三、复习提问　106
四、例题分析　106
五、自测练习　114

第十章　曲线积分与曲面积分

一、目的要求　116
二、内容提要　116
三、复习提问　119
四、例题分析　119
五、自测练习　131

第十一章　无穷级数

一、目的要求　134
二、内容提要　134
三、复习提问　137
四、例题分析　138
五、自测练习　143

第十二章　常微分方程

一、目的要求　146
二、内容提要　146
三、复习提问　149
四、例题分析　150
五、自测练习　158
高等数学(上)综合练习一　161
高等数学(上)综合练习二　163
高等数学(上)综合练习三　165
高等数学(上)综合练习四　167

高等数学(上)综合练习五 169
高等数学(上)综合练习六 171
高等数学(上)综合练习七 173
高等数学(上)综合练习八 175
高等数学(下)综合练习一 177
高等数学(下)综合练习二 179
高等数学(下)综合练习三 181
高等数学(下)综合练习四 183
高等数学(下)综合练习五 185
高等数学(下)综合练习六 187
高等数学(下)综合练习七 189
高等数学(下)综合练习八 191
参考答案 193

第一章

函数与极限

一、目的要求

1. 深刻理解一元函数的定义，掌握函数的表示法和函数的基本性态.
2. 深刻理解复合函数与反函数概念.
3. 理解初等函数的概念，熟练掌握基本初等函数的性质.
4. 深刻理解极限概念.
5. 掌握极限的两个存在准则——单调有界准则与夹逼准则.
6. 熟练掌握极限的运算法则，牢固掌握两个重要极限.
7. 理解无穷小量的概念，掌握无穷小量的比较.
8. 理解无穷大量与无穷小量的关系. 理解极限与无穷小量的关系.
9. 理解函数连续性的概念，掌握连续函数的性质，了解函数的间断点.
10. 掌握初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质.

二、内容提要

1. 若数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

2. 若数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

3. 如果$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$且$a>0$(或$a<0$)，那么存在正整数$N>0$，当$n>N$时，有$x_n>0$(或$x_n<0$).

4. 如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任一子列也收敛，且极限也是a.

5. 如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$，并且$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$，则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$.

6. 单调递增有上界的数列必有极限.

7. 单调递减有下界的数列必有极限.

8. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$均存在且相等.

9. 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，那么这个极限唯一.

10. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数$M>0,\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|<M$.

11. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A\neq 0)$，那么存在$x_0$的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0)$，当$x\in\mathring{U}(x_0)$时，有$|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

12. 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于$x_0$的数列，满足$x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}_+)$，那么函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

13. 有限个无穷小量的和也是无穷小量.

14. 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

15. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$;

(3) 若$B\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

16. 设函数$y=f[g(x)]$是由函数$y=f(u)$与函数$u=g(x)$复合而成，$f[g(x)]$在点x_0的某去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在$\delta>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，有$g(x)\neq u_0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

17. 几个常用极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

18. 设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0连续，则它们的和$f(x)+g(x)$、差$f(x)-g(x)$、积$f(x)\cdot g(x)$及商$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$都在点$x_0$连续.

19. 设函数$y=f[g(x)]$是由函数$y=f(u)$与函数$u=g(x)$复合而成，$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若函数$u=g(x)$在$x=x_0$连续，且$g(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在$u=u_0$连续，则复合函数$y=f[g(x)]$在$x=x_0$也连续.

20. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

21. 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取到它的最大值与最小值.

22. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

23. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，其最大值与最小值分别为 M,m，则对任意的 $c\in[m,M]$，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=c$.

三、复习提问

1. 下列说法可否作为"数列 $\{x_n\}$ 以 l 为极限"的定义？

(1) $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists$ 实数 A，当 $n>A$ 时，$|x_n-l|\leqslant\varepsilon$；

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<k\cdot\sqrt{\varepsilon}$，这里 k 为正常数；

(3) $\exists$ 正整数 N，$\forall\varepsilon>0$，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<\varepsilon$；

(4) $\forall$ 正整数 N，$\exists\varepsilon>0$，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<\varepsilon$；

(5) $\forall$ 正整数 m，$\exists$ 正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<\dfrac{1}{2^m}$；

(6) $\exists$ 正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<\dfrac{1}{2^n}$；

(7) $\forall\varepsilon>0$，集合 $\{n\mid x_n\overline{\in}(l-\varepsilon,l+\varepsilon)\}$ 为有限集；

(8) $\forall\varepsilon>0$，集合 $\{n\mid x_n\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)\}$ 为无限集.

答　(1)，(2)，(5)，(7)可以.

2. 下列作法是否改变数列的敛散性？

(1) 任意改变有限项；

(2) 任意重排；

(3) 各项同取绝对值；

(4) 各项乘以同一常数 k.

答　(1)，(2)均不改变数列的敛散性.

3. 下列说法是否正确？

(1) 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 皆发散，则 $\{x_ny_n\}$ 必发散；

(2) 若 $\{x_n\}$ 发散，$\{y_n\}$ 收敛，则 $\{x_ny_n\}$ 必发散；

(3) 若 $\{x_n\}$ 为无穷大，$\{y_n\}$ 非无穷小，则 $\{x_ny_n\}$ 仍是无穷大；

(4) 若 $\{x_n\}$ 为无穷大，$\{y_n\}$ 无界，则 $\{x_ny_n\}$ 为无穷大.

答　四种说法均不正确.

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义,下列说法可否推出 $f(x)$ 在 x_0 连续?

(1) $\forall\delta>0,\exists\varepsilon=\varepsilon(x_0,\delta)>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,当 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 时,$|x-x_0|<\delta$;

(3) $\forall\delta>0,\exists\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$,当 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 时,$|x-x_0|<\delta$;

(4) $\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$.

答 (1)~(4)均不可以.

四、例题分析

例 1 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,其中 $a>1$.

证明 令 $a^{\frac{1}{n}}-1=\alpha$,则 $\alpha>0$. 由伯努利不等式可得

$$a=(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha=1+n(a^{\frac{1}{n}}-1),$$

即

$$a^{\frac{1}{n}}-1\leqslant\frac{a-1}{n}.$$

对任意 $\varepsilon>0$,由上式可知,当 $n>\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]=N$ 时,就有

$$a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon,$$

即

$$|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$.

解 因为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $1+2+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$,

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{2n}}+\sqrt{\frac{n-1}{2n}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 3 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(4-2x)-(4+x)](\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{[(x+1)-(1-x)](\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})}=-\frac{3}{4}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x+2)-3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)(x+2)}=-\frac{1}{6}.$$

例 4 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a 与 b.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}$.

由条件知，分式函数$\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}$中的分子必为零次函数，即分子中的 x^2 项，x 项前面的系数应为 0，由此可得 $a=1,b=-1$.

例 5 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的极限.

解 当 $n>1$ 时，$\sqrt[n]{n}>1$. 记 $a_n=\sqrt[n]{n}=1+h_n(h_n>0)$，则有

$$n=(1+h_n)^n\geqslant 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2\geqslant\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

因此

$$0\leqslant h_n^2\leqslant\frac{2}{n-1},$$

或

$$0\leqslant h_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

于是有

$$1\leqslant a_n=1+h_n\leqslant 1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\right)=1$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$，其中$\left[\dfrac{1}{x}\right]$表示不超过$\dfrac{1}{x}$的最大整数.

解 易知 $$\frac{1}{x}-1\leqslant\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x},$$

因此,当 $x>0$ 时,有 $$1-x\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1,$$

而当 $x<0$ 时,有 $$1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1-x.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1$,故由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

例 7 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}\cos 2x}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$; (4) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{2}{1-x}}$.

解 (1) 令 $t=x-1$,则当 $x\to 1$ 时,$t\to 0$. 故

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\cdot\tan\frac{\pi(t+1)}{2}=-\lim_{t\to 0}t\cdot\cot\frac{\pi t}{2}$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cdot\cos\frac{\pi t}{2}=-\frac{2}{\pi}.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}+\frac{\sqrt{\cos x}(1-\cos 2x)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}+\sqrt{\cos x}\cdot\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}+\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos x}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}.$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-3x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

令 $t=\frac{-3x}{1+x}$,则 $x\to 0$ 时,$t\to 0$. 故

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-3x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{3}{t}-1}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{3}{t}}\cdot(1+t)^{-1}=e^{-3}.$$

(4) $$\lim_{x\to 1}x^{\frac{2}{1-x}}=\lim_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{2}{1-x}}.$$

令 $t=x-1$,则 $x\to 1$ 时,$t\to 0$. 故

$$\lim_{x\to1}[1+(x-1)]^{\frac{2}{1-x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\mathrm{e}^{-2}.$$

例 8　设 $a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

证明　显然 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，又对任意 n，有

$$\begin{aligned}a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}&\leqslant\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\\&=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=2-\frac{1}{n}<2.\end{aligned}$$

因此，$\{a_n\}$ 是单调递增有上界的数列，于是，$\lim\limits_{x\to+\infty}a_n$ 存在.

例 9　证明数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}},\cdots$ 单调有界，并求其极限.

证明　令 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$，易见数列 $\{a_n\}$ 是递增数列. 现在用数学归纳法来证明数列 $\{a_n\}$ 是有界的.

显然，$a_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $a_n<2$，则有 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$，从而对一切 n 有 $a_n<2$，即数列 $\{a_n\}$ 是有界的.

由单调有界定理，数列 $\{a_n\}$ 有极限，记为 a. 由于

$$a_{n+1}^2=2+a_n,$$

运用数列极限的四则运算法则，当 $n\to+\infty$ 时，有

$$a^2=2+a,$$

即 $a=-1$，$a=2$. 前者不可能，所以应有

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=2.$$

例 10　利用等价无穷小量求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin3x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sin x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x\cdot\ln(2x-1)}{1+\cos\pi x}$.

解　(1) $x\to0$ 时，$\ln(1+2x)\sim2x$，$\sin3x\sim3x$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$