2008 人大考研

读考研书 找人大社

2008年考研

数学

模拟冲刺试卷（理工类）

主编 李恒沛 高文森 张旭利 晓 卉

● 权威命题专家亲自编写 ● 全真冲刺试题

前命题组长积多年命题经验与研究心得精心编制

依据最新大纲最新样题全新改版

数一、数二各八套试卷，临考全真模拟

中国人民大学出版社

2008年考研数学模拟冲刺试卷(理工类)

▶主　编　李恒沛　高文森　张旭利　晓　卉

2008

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

2008年考研数学模拟冲刺试卷．理工类/李恒沛等主编．5版
北京：中国人民大学出版社，2007
ISBN 978-7-300-05030-0

Ⅰ．2…
Ⅱ．李…
Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第161360号

2008年考研数学模拟冲刺试卷（理工类）
主编　李恒沛　高文森　张旭利　晓卉

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn http://www.1kao.net(中国1考网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规　格	210 mm×285 mm　16开本	**版　次**	2003年11月第1版 2007年11月第5版
印　张	12.75	**印　次**	2007年11月第1次印刷
字　数	381 000	**定　价**	19.00元

目 录

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一　模拟试卷(1) …… (1)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一　模拟试卷(2) …… (12)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一　模拟试卷(3) …… (22)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一　模拟试卷(4) …… (32)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一　模拟试卷(5) …… (43)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一　模拟试卷(6) …… (53)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一　模拟试卷(7) …… (64)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一　模拟试卷(8) …… (75)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二　模拟试卷(1) …… (86)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二　模拟试卷(2) …… (94)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二　模拟试卷(3) …… (103)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二　模拟试卷(4) …… (112)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二　模拟试卷(5) …… (121)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二　模拟试卷(6) …… (130)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二　模拟试卷(7) …… (140)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二　模拟试卷(8) …… (150)

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试卷 …… (161)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试卷 …… (170)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试卷 …… (179)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试卷 …… (188)

2008 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一　模拟试卷(1)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散,则必有

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 发散.

[　　]

(2) 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0) 处

(A) 不连续且偏导数不存在.　　(B) 不连续但偏导数存在.

(C) 连续且偏导数存在.　　(D) 连续但偏导数不存在.

[　　]

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ \ln(x+1), & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则下述命题正确的是

① 在 $[-1,1]$ 上 $f(x)$ 存在原函数.

② 存在定积分 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

③ 在点 $x=0$ 处, $g'(x)$ 连续.

④ 在 $[-1,1]$ 上 $g(x)$ 存在原函数.

(A)①②.　　(B)③④.　　(C)①③.　　(D)②④.

[　　]

(4) 设 $I_1=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$,则

(A) $I_1>I_2$.　　(B) $I_1<I_2$.

(C) $I_1=I_2$.　　(D) I_1 与 I_2 无法比较.

[　　]

(5) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$

(A) $\frac{1}{24}$.　　(B) 24.　　(C) $\frac{1}{120}$.　　(D) 120.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵 $(m\neq n)$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有唯一零解的充要条件是

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关.

[　　]

(7) 若把 n 个均质小球随机地投入 n 个洞中，则至少有一个洞空着的概率为

(A) $\dfrac{1}{n}$.　　(B) $1-\dfrac{1}{n}$.　　(C) $\dfrac{n!}{n^n}$.　　(D) $1-\dfrac{n!}{n^n}$.

[　　]

(8) 设 $X \sim N(1,4)$，$Y \sim N(2,9)$，X 与 Y 相互独立. 如果 $\dfrac{Y+aX}{b} \sim N(0,1)$，其中 $b>0$，那么

(A) $a=2, b=5$.　　(B) $a=-2, b=5$.

(C) $a=2, b=25$.　　(D) $a=-2, b=25$.

[　　]

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+k}{x+8}\right)^{\frac{x}{1\,000}} = \mathrm{e}^2$，则 $k=$ ________.

(10) 平面 $Ax+By+Cz=0(C\neq 0)$ 与柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相交所成椭圆的面积为________.

(11) 微分方程 $y'''+6y''+13y'=0$ 的通解为________.

(12) 设 $f_1(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，$f_2(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，则 $f_1(x)+f_2(x)=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，有特征值 $1,2,3$，$f(x)=x^3-6x^2+11x-10$，则 $f(\boldsymbol{A})=$ ________.

(14) 设每次试验成功的概率为 0.2，失败的概率为 0.8，独立地重复试验直到成功为止，记所做的试验次数为 X，则 $E(X)=$ ________.

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

设 S 是平面 $x+y+z=2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，计算 $\displaystyle\iint_S x\,\mathrm{d}S$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且满足

$$x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,\ f(1)=2, \text{求 } f(x).$$

(17)(本题满分 10 分)

计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(t)$ 具有连续导数，$\sum$ 为下半球面 $x^2+y^2+z^2=1(z<0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 10 分)

设一质点从时刻 $t=0$ 开始沿直线运动，移动单位距离用了单位时间，且初速度和末速度都为零，证明其在单位时间内总有某一时刻的加速度的绝对值不小于 4.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 连续，$x\in[a,b]$，且可导，试证在 (a,b) 内存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$.

(20)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^3+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化成标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$，求 a,b 及所用的正交变换.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_l$，且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性无关，证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 也线性无关．

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，且 X 与 Y 相互独立，求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

设试验 E 成功的概率为 $p(0<p<1)$，将试验 E 独立地重复进行 5 次，以 X 表示试验成功的次数. 已知总体 X 的样本值如下：3,1,2,4,3,5，求概率 $q=P\{X=2\}$ 的最大似然估计值.

参考解答及分析

一、选择题

(1) **分析**：例如取级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$，这两个级数都发散，显然此时选项(A)，(B)，(D) 都不正确，只有(C) 正确.

解：应选(C).

(2) **分析**：

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x\cdot0}{(\Delta x)^3}=0.$$

同理得 $f'_y(0,0)=0$.

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在，但 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

$$\left(\begin{aligned}&\text{例如，取 } y=kx\text{，当 } x\to0,y\to0\text{，于是}\\&\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}.\end{aligned}\right)$$

因而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

解：应选(B).

(3) **分析**：若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在原函数 $F(x)$，则由题设可知在 $[-1,0]$ 上，

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+x+c_1;$$

在 $(0,1]$ 上，

$$F(x)=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+c_2.$$

因在 $x=0$ 处，$F(x)$ 连续，故得 $c_1=c_2$.

于是

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+c_1, & x\in[-1,0],\\ x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+c_1, & x\in(0,1].\end{cases}$$

由于 $F'_-(0)=1,F'_+(0)=0$，从而 $F'(0)$ 不存在.

故 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不是 $f(x)$ 的原函数，此与题设矛盾，即说明 ① 不成立.

又 $f(x)$ 在$[-1,1]$上有界且只有 1 个间断点,故 $f(x)$ 在$[-1,1]$上可积.

即 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,② 正确.

因$\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ 不存在,而 $g'(0)=0$,故 ③ 不正确.

因在$[-1,1]$上 $g(x)$ 连续,故在$[-1,1]$上 $g(x)$ 存在原函数,即 ④ 正确.

解:应选(D).

(4) **分析**:由

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x=t+n\pi} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n\pi}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+(2k-1)\pi}\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+2k\pi}\mathrm{d}t\right] \\
&= -\pi\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{[t+(2k-1)\pi](t+2k\pi)}\mathrm{d}t<0,
\end{aligned}
$$

故得 $I_1<I_2$.

解:应选(B).

(5) **分析**:相似矩阵有相同的特征值,从而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,$\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 2,3,4,5,$\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 1,2,3,4,而方阵的行列式等于其全部特征值的乘积,故 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=24$.

解:应选(B).

(6) **分析**:因

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{ 有唯一零解}\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的极大列向量线性无关组中向量个数为 n,

故选项(D) 正确. 而

选项(C),相当于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$;

选项(B),相当于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$;

选项(A),相当于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<m$;

故选项(A),(B),(C) 都不对.

解:应选(D).

(7) **分析**:每一小球投入任一洞中的机会都是均等的,每一小球有 n 种可能投法,故样本空间的元素总的个数为 n^n."至少有一个洞空着" 的对立事件是"没有洞空着",这就是说,每个洞中各有一球,其概率为$\frac{n!}{n^n}$,而所求的概率为 $1-\frac{n!}{n^n}$.

解:应选(D).

(8) **分析**:由于

$$E\left(\frac{Y+aX}{b}\right)=\frac{E(Y)+aE(X)}{b}=\frac{2+a}{b}=0,$$

$$D\left(\frac{Y+aX}{b}\right)=\frac{D(Y)+a^2D(X)}{b^2}=\frac{9+4a^2}{b^2}=1,$$

因此 $a=-2,b=5$.

解:应选(B).

二、填空题

(9) **分析**:利用$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+k}{x+8}\right)^{\frac{x}{1\,000}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k-8}{x+8}\right)^{\frac{x+8}{k-8}}\right]^{\frac{k-8}{x+8}\cdot\frac{x}{1\,000}}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{k-8}{1\,000}}\xlongequal{\text{由题设}}\mathrm{e}^{2}\Rightarrow\frac{k-8}{1\,000}=2\Rightarrow k=2\,008.$$

解:应填2 008.

(10) **分析**:$D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,z=\frac{Ax+By}{-C}$.

$$S=\iint_D\mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\sqrt{1+\left(-\frac{A}{C}\right)^2+\left(-\frac{B}{C}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi ab\sqrt{1+\left(\frac{A}{C}\right)^2+\left(\frac{B}{C}\right)^2}$$

$$=\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

解:应填$\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

(11) **分析**:相应的特征方程为

$$r^3+6r^2+13r=0$$

$$\Rightarrow r(r^2+6r+13)=0$$

$$\Rightarrow r=0,\ -3\pm 2i.$$

于是原方程的通解为

$$y=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)\quad(C_1,C_2,C_3\text{ 为任意常数}).$$

解:应填$y=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数).

(12) **分析**:因$(f_1(x)+f_2(x))'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(-\frac{1}{x^2})=0$,

故

$$f_1(x)+f_2(x)=C(\text{常数})$$

$$\Rightarrow\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=C.$$

令$x=1$,可得$f_1(x)+f_2(x)=\frac{\pi}{2}$.

解:应填$\frac{\pi}{2}$.

(13) **分析**:由$f(x)=x^3-6x^2+11x-10=(x-1)(x-2)(x-3)-4$,知

$$f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})-4\boldsymbol{E}\qquad①$$

由设,$\boldsymbol{A}$有三个互不相同的特征值1,2,3,从而$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,即存在可逆矩阵$\boldsymbol{B}$,使

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix},$$

于是 $\quad A = B\Lambda B^{-1}$，

代入式①，得

$$\begin{aligned} f(A) &= (B\Lambda B^{-1} - E)(B\Lambda B^{-1} - 2E)(B\Lambda B^{-1} - 3E) - 4E \\ &= B(\Lambda - E)B^{-1}B(\Lambda - 2E)B^{-1}B(\Lambda - 3E)B^{-1} - 4E \\ &= B\left[\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}\right]B^{-1} - 4E \\ &= -4E. \end{aligned}$$

解：应填 $-4E$.

(14) **分析**：X 服从几何分布，即

$$P\{X = k\} = 0.2 \times 0.8^{k-1}, k = 1, 2, \cdots,$$

从而

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \times 0.2 \times 0.8^{k-1} = 0.2 \times \sum_{k=1}^{\infty} k \times 0.8^{k-1}.$$

因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \ |x| < 1,$$

所以

$$E(X) = 0.2 \times \sum_{k=1}^{\infty} k \times 0.8^{k-1} = 0.2 \times \frac{1}{(1-0.8)^2} = \frac{1}{0.2} = 5.$$

解：应填 5.

三、解答题

(15) **分析**：按第一型曲面积分（对面积的曲面积分）计算之.

解：$z = 2 - x - y, \dfrac{\partial z}{\partial x} = -1, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$，

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$\displaystyle\iint_S x\,\mathrm{d}S = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt{3}\,x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r = 0$ （或由积分域对称性及被积函数为奇函数直接得 0）.

(16) **分析**：对等式两端求导变成微分方程. 利用初始条件，解出 $f(x)$，再由 $f(x)$ 的连续性，求出 $f(0)$，即得 $f(x)$ 的表达式.

解：等式两端对 x 求导，得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + x(x+1)f(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + x^2 f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = xf(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$\Rightarrow x^2 f'(x) + 3xf(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = -\frac{1}{x} - 3\ln x + \ln C$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} x^{-3} C)$$

$$\Rightarrow f(x)=Cx^{-3}e^{-\frac{1}{x}}$$

当 $x=1$ 时，$f(x)=2,2=Ce^{-1}$，得 $C=2e$，

故 $\quad f(x)=2x^{-3}e^{1-\frac{1}{x}} \qquad (0<x\leqslant 1).$

又 $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0) \qquad$ （由题设），

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}2ex^{-3}e^{-\frac{1}{x}}=2e\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}2e\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3}{e^t}=0.$$

故得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{1-\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(17) **分析:** 添加平面 $z=0$，使积分域成为封闭曲面，利用高斯公式计算.

解: 添加平面 $P:z=0$，$\sum\cup P$ 为封闭曲面，

$$\iint_{\Sigma}=\oiint_{\Sigma\cup P}-\iint_{P}.$$

$$\oiint_{\Sigma\cup P}\frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_{\Omega}\left[\frac{2y^2}{y}f'(xy^2)-\frac{2xy}{x}f'(xy^2)+(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}v$$

$$=-\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2}{5}\pi.$$

而 $\quad \iint\limits_{P}=0,$

故 $\quad \iint\limits_{\Sigma}\frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{5}\pi.$

(18) **分析:** 由题设知（令距离函数 $s=s(t)$）

$$s(0)=0,s(1)=1,s'(0)=0,s'(1)=0.$$

即欲证 $|s''(\xi)|\geqslant 4$. 本题可利用泰勒公式证.

证: 由泰勒公式有

$$s(t)=s(0)+s'(0)t+\frac{s''(\xi_1)}{2!}t^2=\frac{s''(\xi_1)}{2!}t^2,$$

（ξ_1 在 0 与 t 之间）

于是得 $\quad s(\frac{1}{2})=\frac{s''(\xi_1)}{8}.$ ①

又由泰勒公式有

$$s(t)=s(1)+s'(1)(t-1)+\frac{s''(\xi_2)}{2!}(t-1)^2=1+\frac{s''(\xi_2)}{2!}(t-1)^2,$$

（ξ_2 在 t 与 1 之间）

于是得 $\quad s\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{s''(\xi_2)}{8}.$ ②

由①②得

$$\frac{1}{8}[s''(\xi_1)-s''(\xi_2)]=1,$$

即 $$s''(\xi_1)-s''(\xi_2)=8.$$

因此

$$8=|s''(\xi_1)-s''(\xi_2)|\leqslant|s''(\xi_1)|+|s''(\xi_2)|$$
$$\leqslant 2\max(|s''(\xi_1)|,|s''(\xi_2)|).$$

取 $$|s''(\xi)|=\max(|s''(\xi_1)|,|s''(\xi_2)|),$$

故 $$8\leqslant 2|s''(\xi)|,\xi\in(0,1),$$

即 $$|s''(\xi)|\geqslant 4,\xi\in(0,1).$$

(19) **分析**:欲证 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$,

或 $$f(\xi)-f(a)=f'(\xi)(b-\xi),$$

即 $$f'(\xi)(b-\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0$$

$$\Rightarrow bf'(\xi)-[\xi f'(\xi)+f(\xi)]+f(a)=0$$

$$\Rightarrow [bf(x)]'\Big|_{\xi}-[xf(x)]'\Big|_{\xi}+[f(a)x]'\Big|_{\xi}=0$$

$$\Rightarrow [bf(x)-xf(x)+f(a)x]'\Big|_{\xi}=0$$

$$\Rightarrow [(b-x)(f(x)-f(a))+bf(a)]'\Big|_{\xi}=0$$

$$\Rightarrow [(b-x)(f(x)-f(a))]'\Big|_{\xi}=0.$$

取辅助函数

$$F(x)=(b-x)[f(x)-f(a)],$$

容易验证 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件,即可证得.

证:

令 $F(x)=(b-x)[f(x)-f(a)]$,

由题设知 $F(x)$ 连续,$x\in[a,b]$,且可导,

又 $$F(a)=F(b)=0,$$

故存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $F'(\xi)=0$.

由 $$F'(x)=(b-x)f'(x)-[f(x)-f(a)],$$

得 $$F'(\xi)=(b-\xi)f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0,$$

即 $$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi},\xi\in(a,b).$$

(20) **分析**:此类问题的关键在于正确地写出二次型的矩阵.

解:$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{bmatrix}$. 其标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$. 显然有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$,由此得 $a=b$.

又 1(或 2) 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,即 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$(或 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$),由此得 $a=b=0$.

由$(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,取特征向量 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

由$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,取特征向量 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

由$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,取特征向量 $\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$,

则所求正交变换为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$.

(21) **分析**:利用线性无关的概念证之.

证:设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\beta}_l=\boldsymbol{0}$

$\Rightarrow (k_1+k_2+\cdots+k_l)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\cdots+k_l)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\alpha}_l=\boldsymbol{0}$,

由设知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性无关,故有

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_l=0\\ \qquad k_2+\cdots+k_l=0\\ \qquad\quad\cdots\\ \qquad\qquad\quad k_l=0\end{cases},即$$

$$\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\qquad ①$$

因系数行列式 $\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}\neq 0$,从而方程组 ① 只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_l=0$.

因此,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 线性无关.

(22) **分析**:求解本题,可以利用卷积公式,此时要正确定出积分限;也可以先求出 Z 的分布函数,再求得 Z 的概率密度.

解:解法一 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

由于 X 与 Y 相互独立,利用卷积公式可得 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

当 $0<z-y<1$ 时，$f_X(z-y)=1$；当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=e^{-y}$. 由此可知，当 $0<y<z<y+1$（如图 1—1—1 中阴影区域）时，有

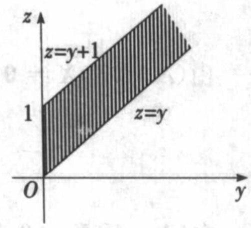

图 1—1—1

$$f_X(z-y)f_Y(y)=e^{-y},$$

在其他点处有

$$f_X(z-y)f_Y(y)=0.$$

因此当 $z\leqslant 0$ 时，有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}y=0;$$

当 $0<z<1$ 时，有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}y+\int_{0}^{z}e^{-y}\mathrm{d}y+\int_{z}^{+\infty}0\mathrm{d}y=1-e^{-z};$$

当 $z\geqslant 1$ 时，有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z-1}0\mathrm{d}y+\int_{z-1}^{z}e^{-y}\mathrm{d}y+\int_{z}^{+\infty}0\mathrm{d}y=(e-1)e^{-z}.$$

即随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ (e-1)e^{-z}, & z\geqslant 1,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

解法二　由于 X 与 Y 相互独立，因此二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

随机变量 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如图 1—1—2 所示，当 $z\leqslant 0$ 时，有

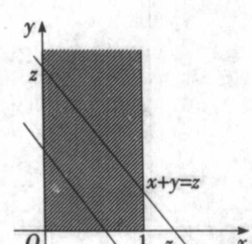

图 1—1—2

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0;$$

当 $0<z<1$ 时，有

$$F_Z(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}e^{-y}\mathrm{d}y=z+e^{-z}-1;$$

当 $z\geqslant 1$ 时，有

$$F_Z(z)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-x}e^{-y}\mathrm{d}y=e^{-z}-e^{1-z}+1,$$

即

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ z+e^{-z}-1, & 0<z<1,\\ e^{-z}-e^{1-z}+1, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

由此得 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ (e-1)e^{-z}, & z\geqslant 1,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

(23) **分析**：由题设可知 $X\sim B(5,p)$. 根据已知的样本值，写出似然函数 $L(p)$，求出 p 的最大似然估计值

$\hat{p}$. 利用最大似然估计的性质，可求得 $\hat{q}=C_5^2\hat{p}^2(1-\hat{p})^3$.

解：由于总体 X 服从参数为 $5,p(0<p<1)$ 的二项分布 $B(5,p)$，即

$$P\{X=x\}=C_5^x p^x(1-p)^{5-x}, x=0,1,2,3,4,5,$$

因此，对于已知的样本值 $x_1=3,x_2=1,x_3=2,x_4=4,x_5=3,x_6=5$，似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{6}C_5^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{5-x_i}=\prod_{i=1}^{6}C_5^{x_i}p^{\sum_{i=1}^{6}x_i}(1-p)^{30-\sum_{i=1}^{6}x_i}$$
$$=C_5^3C_5^1C_5^2C_5^4C_5^3C_5^5p^{18}(1-p)^{12}.$$

取对数，得

$$\ln L(p)=\ln(C_5^3C_5^1C_5^2C_5^4C_5^3C_5^5)+18\ln p+12\ln(1-p),$$

将 $\ln L(p)$ 对 p 求导数并令其等于零，得

$$\frac{18}{p}-\frac{12}{1-p}=0,$$

解得 p 的最大似然估计值为

$$\hat{p}=\frac{18}{30}=0.6.$$

因为概率

$$q=P\{X=2\}=C_5^2p^2(1-p)^3,$$

所以根据最大似然估计的性质，得 q 的最大似然估计值为

$$\hat{q}=C_5^2\hat{p}^2(1-\hat{p})^3=\frac{5\times 4}{2!}\times 0.6^2\times(1-0.6)^3=0.230\ 4.$$

2008 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一　　模拟试卷(2)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 在下列已知级数中,收敛的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-1}{n^{2}+n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{\pi}{n}$.

[　　]

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的两个偏导数 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的

(A) 必要条件而非充分条件.

(B) 充分条件而非必要条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非必要条件又非充分条件.

[　　]

(3) 下列论断正确的是

(A) 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导,则 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 必可导.

(B) 设 $f(x)$ 在点 a 的某邻域 $U(a,\delta)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 存在,则 $f'(a)$ 必存在.

(C) 设 $|a_n|\leqslant|b_n|$ $(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

(D) 设 $|a_n|\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

[　　]

(4) 设 $f(x)$ 连续,$x\in(-\infty,+\infty)$,则下述论断错误的是

(A) $\forall a>0$, $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

(B) $\forall a>0$, $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数.

(C) $\forall a>0$, 常数 T, $\int_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关 $\Leftrightarrow f(x)$ 有周期 T.

(D) $f(x+T)=f(x)$, $\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 有周期 $T \Leftrightarrow \int_{0}^{T}f(t)\mathrm{d}t=0$.

[　　]

(5) 设 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 皆为整数,则方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=\dfrac{1}{2}x_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=\dfrac{1}{2}x_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\dfrac{1}{2}x_3\end{cases}$$

(A) 无解.　　　　(B) 有唯一解.

(C) 有无穷多解.　　　　(D) 解不定.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 中

(A) 任一行向量是其余各行向量的线性组合.

(B) 必有一行向量是其余各行向量的线性组合.

(C) 必有一行元素全为零.

(D) 必有两行元素对应成比例.

[　　]

(7) 设 $X\sim N(\mu_1,1)$，$Y\sim N(\mu_2,2)$，$p_1=P\{|X-\mu_1|>1\}$，$p_2=P\{|Y-\mu_2|>2\}$，则有

(A) $p_1>p_2$.　　(B) $p_1<p_2$.　　(C) $p_1=p_2$.　　(D) p_1,p_2 的大小与 μ_1,μ_2 有关.

[　　]

(8) 设事件 A,B,C 两两独立，则事件 A,B,C 相互独立的充分必要条件是

(A) A 与 BC 相互独立.　　　　(B) AB 与 $A\cup C$ 相互独立.

(C) AB 与 AC 相互独立.　　　　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 相互独立.

[　　]

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(mh)-f(-nh)}{h}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(10) 设 $z=f(x,y)$ 可微，且 $f(x,e^x)=a$(常数)，$f'_1(x,e^x)=-2e^x$，则 $f'_2(x,e^x)=\_\_\_\_\_\_\_\_$.

(11) 设有级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{x+1}{3}\right)^n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$，则该级数的收敛半径 $R=\_\_\_\_\_\_\_\_$.

(12) 设 l 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的右半部分，则 $\int_l(x+y)\mathrm{d}l=\_\_\_\_\_\_\_\_$.

(13) 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3，则 $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为________.

(14) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 为已知，μ 为未知参数. 从总体 X 中抽取样本容量为 16 的样本值，算得 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间中的最小长度为 0.588，则 $\sigma^2=\_\_\_\_\_\_\_\_$.

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，$f(0)=0$，试证：

当 $x>0$，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 是单调增加的.

(16)(本题满分 10 分)

设 $u=z(x^2+3)$，求向量场 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}u$ 通过上半球面 $S:x^2+y^2+z^2=1(z>0)$ 的上侧的流量.

(17)(本题满分 10 分)

试在曲线族 $y=a(1-x^2)(a>0)$ 中选一条曲线，使这条曲线与其在 $(-1,0)$ 及 $(1,0)$ 两点处的法线所围成图形的面积，比这族曲线中其他曲线以同样方法围成图形的面积都小.

(18)(本题满分 10 分)

设在半平面 $x>0$ 中，有力 $\boldsymbol{F}=-\frac{k}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成的力场，其中 k 为常数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中，场力所做的功与所取路径无关，而只与起点、终点有关，并计算由点 $(1,1)$ 到点 $(2,2)$ 场力所做的功.