

GAOKAO

2007年

高考试题

天津市教育招生考试院 组编

2007 NIAN

GAO KAO SHI TI

HUI GU

天津人民出版社
TIANJIN PUBLISHERS

(含参考答案)
答案
萃

数学

(理工类)

图书在版编目 (CIP) 数据

2007年高考试题(含参考答案) 数学、理工类 /
天津市教育招生考试院组编. —天津: 天津人民出版社,
2007. 9

ISBN 978-7-201-05104-8

I. 2... II. 天... III. 数学课—高中—试题—升学参考

资料 IV. G632.479

中国版本图书馆CIP数据核字 (2007) 第136295号

2007年高考试题(含参考答案) 荟萃

数 学

(理工类)

天津市教育招生考试院 组编

天津人民出版社出版、发行

出版人: 刘敬群

(天津市西康路35号 邮政编码: 300051)

网址: <http://www.tjrm.com.cn>

电子邮箱: tjrmshb@public.ptt.cn

天津新华印刷有限公司印刷

*

2007年10月第1版 2007年10月第1次印刷

787×1092毫米 8开本 11印张

字数: 274千字

定价: 14.00元

天津人民出版社

前言

目 录

普通高等学校招生全国统一考试是选拔性考试,其目的是为普通高等学校选拔新生提供依据。根据教育部的决定,目前,北京、天津、上海、重庆、辽宁、江苏、浙江、安徽、福建、江西、山东、湖南、湖北、广东、四川、陕西 16 个省市实行“全国统一考试,分省自行命题”的高考命题组织方式。

为了展现高考试题的全貌,天津市教育招生考试院将 2007 年高考全国卷和各省市试卷汇编成册,编写了《2007 年高考试题(含参考答案)荟萃丛书》。该丛书包括语文、数学(文史类)、数学(理工类)、英语、文科综合、理科综合六册。

本丛书有助于参加 2008 年高考的考生全方位、多角度地了解高考试题的特点,提高能力,开拓视野。同时,对中学教研人员提高教学水平、命题研究人员提高命题质量亦有借鉴。

在试卷汇编的过程中,我们得到了分省自行命题的省市招生办公室(考试院、考试中心)的大力支持,在此特别表示感谢。

编 者
2007 年 7 月

试 题 答 案

2007 年普通高等学校招生全国统一考试(全国一)	(1)(105)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(全国二)	(7)(108)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)	(13)(110)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)	(19)(113)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)	(25)(118)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(重庆卷)	(31)(120)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(辽宁卷)	(37)(125)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)	(43)(129)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(浙江卷)	(47)(132)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(安徽卷)	(51)(135)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(福建卷)	(57)(138)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(江西卷)	(63)(141)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)	(69)(145)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)	(75)(150)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(湖北卷)	(81)(155)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(广东卷)	(87)(160)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(四川卷)	(93)(165)
2007 年普通高等学校招生全国统一考试(陕西卷)	(99)(169)

2007 年普通高等学校招生全国统一考试试卷(全国一)

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p , 那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_k(n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

$$P_k(n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

如果事件 A, B 互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p , 那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_k(n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

$$P_k(n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

如果事件 A, B 互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p , 那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_k(n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的).

(1) α 是第四象限角, $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$, 则 $\sin \alpha =$ ().

- (A) $\frac{5}{13}$ (B) $-\frac{5}{13}$ (C) $\frac{5}{13}$ (D) $-\frac{5}{13}$

(2) 设 a 是实数, $\frac{a}{1+i} + \frac{1+i}{2}$ 是实数, 则 $a =$ ().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

(3) 已知向量 $a = (-5, 6)$, $b = (6, 5)$, 则 a 与 b ().

- (A) 垂直 (B) 不垂直也不平行 (C) 平行且反向 (D) 平行且同向

(4) 已知双曲线的离心率为 2, 焦点是 $(-4, 0)$, $(4, 0)$, 则双曲线方程为 ().

- (A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ (B) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ (C) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{10} = 1$ (D) $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$

(5) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b-a =$ ().

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

(6) 下面给出的四个点中, 到直线 $x-y+1=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且位于 $|x+y-1| < 0$ 表示的平面区域内的点是 ().

- (A) (1, 1) (B) (-1, 1) (C) (-1, -1) (D) (1, -1)

(7) 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB$, 则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 ().

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

(8) 设 $a > 1$, 函数 $f(x) = \log_a x$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$, 则 $a =$ ().

- (A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4

(9) $f(x), g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, $h(x) = f(x) + g(x)$, 则“ $f(x), g(x)$ 均为偶函数”是“ $h(x)$ 为偶函数”的 ().

- (A) 充要条件 (B) 充分而不必要的条件 (C) 必要而不充分的条件 (D) 既不充分也不必要的条件

(10) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中, 常数项为 15, 则 $n =$ ().

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 5

(11) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A , $AK \perp l$, 垂足为 K , 则 $\triangle AKF$ 的面积是 ().

- (A) 4 (B) $3\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 8

(12) 函数 $f(x) = \cos^2 x - 2\cos^2 \frac{x}{2}$ 的一个单调增区间是 ().

- (A) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ (D) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

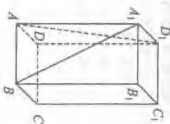
二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

(13) 从班委会 5 名成员中选出 3 名, 分别担任班委学习委员、文娱委员与体育委员, 其中甲、乙二人不能担任文娱委员, 则不同的选法共有 种.(用数字作答)

(14) 函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = \log_2 x (x > 0)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则 $f(x) =$

(15) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_1, 2S_2, S_3$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为

(16) 一个等腰直角三角形的三个顶点分别在正三棱柱的三条侧棱上, 已知正三棱柱的底面边长为 2, 则该三角形的斜边长为



三、解答题(本大题共6小题,共70分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17) (本小题满分10分)

设锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, a = 2\sin A$.

(1) 求 B 的大小;

(2) 求 $\cos A + \sin C$ 的取值范围.

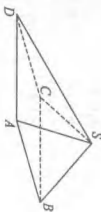
(19) (本小题满分12分)

四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形,侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$. 已知

$\angle ABC = 45^\circ, AB = 2, BC = 2\sqrt{2}, SA = SB = \sqrt{3}$.

(1) 证明 $SA \perp BC$;

(2) 求直线 SD 与平面 SAB 所成角的大小.



(18) (本小题满分12分)

某商场经销某商品,根据以往资料统计,顾客采用的付款期数 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

商场经销一件该商品,采用1期付款,其利润为200元;分2期或3期付款,其利润为250元;分4期或5期付款,其利润为300元. η 表示经销一件该商品的利润.

(1) 求事件 A :“购买该商品的3位顾客中,至少有1位采用1期付款”的概率 $P(A)$;

(2) 求 η 的分布列及期望 $E\eta$.

(20) (本小题满分12分)

设函数 $f(x) = e^x - e^{-x}$.

(1) 证明: $f(x)$ 的导数 $f'(x) \geq 2$;

(2) 若对所有 $x \geq 0$ 都有 $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.

(21) (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线交椭圆于 B, D 两点, 过 F_2 的直线交椭圆于 A, C 两点, 且 $AC \perp BD$, 垂足为 P .

(1) 设 P 点的坐标为 (x_0, y_0) , 证明: $\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} < 1$;

(1) 求四边形 $ABCD$ 的面积的最小值.

(22) (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 2, a_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)(a_n + 2), n = 1, 2, 3, \dots$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(1) 若数列 $\{b_n\}$ 中 $b_1 = 2, b_{n+1} = 2b_n + 3, n = 1, 2, 3, \dots$, 证明:

$$\sqrt{2} < b_n \leq a_{n+3}, n = 1, 2, 3, \dots$$

2007年普通高等学校招生全国统一考试试卷(全国二)

第 I 卷

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果将 n 个球放入 k 个盒子中, 那么至少有一个盒子中球的个数为 k 的概率

$$P(k) = 1 - C_k^n (1-p)^k (1-p)^{n-k}$$

其中 k 表示球的个数

$$P(k) = 1 - C_k^n (1-p)^k (1-p)^{n-k}$$

一、选择题

(1) $\sin 210^\circ =$ ()

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $-\frac{1}{2}$

(2) 函数 $y = |\sin x|$ 的一个单调增区间是 ()

(A) $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

(B) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

(C) $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

(D) $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

(3) 设复数 z 满足 $\frac{1+z}{z} = i$, 则 $z =$ ()

(A) $-2+i$

(B) $-2-i$

(C) $2-i$

(D) $2+i$

(4) 下列四个数中最大的是 ()

(A) $(\ln 2)^2$

(B) $\ln(\ln 2)$

(C) $\ln \sqrt{2}$

(D) $\ln 2$

(5) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda =$ ()

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $-\frac{1}{3}$

(D) $-\frac{2}{3}$

(6) 不等式 $\frac{x-1}{x-4} > 0$ 的解集是 ()

(A) $(-2, 1)$

(B) $(1, +\infty)$

(C) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

(D) $(-2, 1) \cup (1, +\infty)$

(7) 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等, 则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦值等于 ()

(A) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(8) 已知曲线 $y = \frac{x^2}{4} - 3\ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 ()

(A) 3

(B) 2

(C) 1

(D) $\frac{1}{2}$

(9) 把函数 $y = e^x$ 的图象按向量 $a = (2, 3)$ 平移, 得到 $y = f(x)$ 的图象, 则 $f(x) =$ ()

(A) $e^{x-3} + 2$

(B) $e^{x+2} - 2$

(C) $e^{x+3} + 3$

(D) $e^{x-3} - 3$

(10) 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期日有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有 ()

(A) 40 种

(B) 60 种

(C) 100 种

(D) 120 种

(11) 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 若双曲线上存在点 A , 使 $\angle F_1 A F_2 = 90^\circ$ 且 $|AF_1| = 3|AF_2|$, 则双曲线的离心率为 ()

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(12) 设 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, A, B, C 为该抛物线上三点, 若 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = 0$, 则 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| =$ ()

(A) 9

(B) 6

(C) 4

(D) 3

第 II 卷

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 把答案填在题中横线上)

(13) $(1+2x^2)^n$ 的展开式中常数项为 _____, (用数字作答)

(14) 在某项测量中, 测量结果 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 若 ξ 在 $(0, 1)$ 内取值的概率为 0.4, 则 ξ 在 $(1, 2)$ 内取值的概率为 _____

(15) 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2 cm 的球面上, 如果正四棱柱的底面边长为 1 cm, 那么该棱柱的表面积为 _____ cm^2 .

(16) 已知数列的通项 $a_n = -5n + 2$, 其前 n 项和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} =$ _____

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17) (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中,已知内角 $A = \frac{\pi}{3}$,边 $BC = 2\sqrt{3}$.设内角 $B = x$,周长为 y .

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式和定义域;

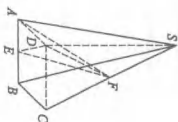
(2) 求 y 的最大值.

(19) (本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,侧棱 $SD \perp$ 底面 $ABCD$, E, F 分别为 AB, SC 的中点.

(1) 证明 $EF \parallel$ 平面 SAD ;

(2) 设 $SD = 2DC$,求二面角 $A-EF-D$ 的大小.



(18) (本小题满分 12 分)

从某批产品中,有放回地抽取产品二次,每次随机抽取 1 件.假设事件 A_i : “取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率 $P(A_i) = 0.96$.

(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p_1 ;

(2) 若该批产品共 100 件,从中任意抽取 2 件, ξ 表示取出的 2 件产品中二等品的件数,求 ξ 的分布列.

(20) (本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中,以 O 为圆心的圆与直线 $x - \sqrt{3}y = 4$ 相切.

(1) 求圆 O 的方程;

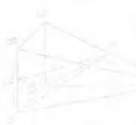
(2) 圆 O 与 x 轴相交于 A, B 两点,圆内的动点 P 使 $|PA|, |PO|, |PB|$ 成等比数列,求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

(21) (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \in (0, 1)$, $a_n = \frac{3-a_{n-1}}{2}$, $n=2, 3, 4, \dots$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n \sqrt{3-2a_n}$, 证明 $b_n < b_{n+1}$, 其中 n 为正整数.



(22) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(a, f(a))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a > 0$, 如果过点 (a, b) 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 证明: $-a < b < f(a)$.

2007 年普通高等学校招生全国统一考试 (北京卷)

第 I 卷 (选择题 共 40 分)

一、本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

- (1) 已知 $\cos \theta \cdot \tan \theta < 0$, 那么角 θ 是 ()。
 - (A) 第一或第二象限角
 - (C) 第三或第四象限角
 - (B) 第二或第三象限角
 - (D) 第一或第四象限角
- (2) 函数 $f(x) = 3^x (0 < x \leq 2)$ 的反函数的定义域为 ()。
 - (A) $(0, +\infty)$
 - (B) $(1, 9]$
 - (C) $(0, 1)$
 - (D) $[9, +\infty)$
- (3) 平面 $\alpha //$ 平面 β 的一个充分条件是 ()。
 - (A) 存在一条直线 $a, a \subset \alpha, a // \beta$
 - (B) 存在一条直线 $a, a \subset \alpha, a // \beta$
 - (C) 存在两条平行直线 $a, b, a \subset \alpha, b \subset \beta, a // \beta, b // \alpha$
 - (D) 存在两条异面直线 $a, b, a \subset \alpha, b \subset \beta, a // \beta, b // \alpha$
- (4) 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, D 为 BC 边中点, 且 $2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$, 那么 ()。
 - (A) $\vec{AO} = 3\vec{OD}$
 - (B) $\vec{AO} = 2\vec{OD}$
 - (C) $\vec{AO} = 3\vec{OD}$
 - (D) $2\vec{AO} = \vec{OD}$
- (5) 记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照, 要求排成一排, 2 位老人相邻但不排在两端, 不同的排法共有 ()。
 - (A) 1440 种
 - (B) 960 种
 - (C) 720 种
 - (D) 480 种
- (6) 若不等式组 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ 2x+y \leq 2, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值范围是 ()。
 - (A) $a \geq \frac{4}{3}$
 - (B) $0 < a \leq 1$
 - (C) $1 \leq a \leq \frac{4}{3}$
 - (D) $0 < a \leq \frac{4}{3}$ 或 $a \geq \frac{4}{3}$
- (7) 如果正数 a, b, c, d 满足 $a+b+c+d=4$, 那么 ()。
 - (A) $ab \leq c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一
 - (B) $ab \geq c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一
 - (C) $ab \leq c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一
 - (D) $ab \geq c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

(8) 对于函数 ① $f(x) = |x-2|+1$, ② $f(x) = (x-2)^2$, ③ $f(x) = \cos(x+2)$, 判断如下三个命题的真假:

命题甲: $f(x+2)$ 是偶函数;

命题乙: $f(x+2)$ 是减函数, 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数;

命题丙: $f(x+2) - f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数。

能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是 ()。

- (A) ①③
- (B) ①②
- (C) ③
- (D) ②

第 II 卷 (共 110 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。把答案填在题中横线上。

(9) $\frac{2}{(1+i)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 10n (n=1, 2, 3, \dots)$, 则此数列的通项公式为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 数列 $\{a_n\}$ 中数值最小的项是第 $\underline{\hspace{2cm}}$ 项。

(11) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A = \frac{1}{3}$, $C = 150^\circ$, $BC = 1$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 已知集合 $A = \{x | |x-a| \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 2002 年在北京召开的国际数学大会, 会标是我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的。弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形 (如图)。如果小正方形的面积为 1, 大正方形的面积为 25, 直角三角形中较小的锐角为 θ , 那么 $\cos 2\theta$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 满足 $f[g(x)] > g[f(x)]$ 的 x 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + n$ (n 是常数, $n=1, 2, 3, \dots$), 且 a_1, a_2, a_3 成公比不为 1 的等比数列。

(1) 求 c 的值;

(2) 求 a_n 的通项公式。



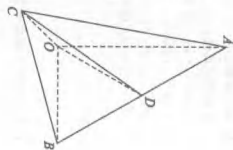
(16) (本小题共 14 分)

如图, 在 $Rt\triangle AOB$ 中, $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$, 斜边 $AB = 4$, $Rt\triangle AOC$ 可以通过 $Rt\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到, 且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角, 动点 D 在斜边 AB 上.

(1) 求证: 平面 $COD \perp$ 平面 AOB ;

(2) 当 D 为 AB 的中点时, 求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小;

(3) 求 CD 与平面 AOB 所成角的最大值.



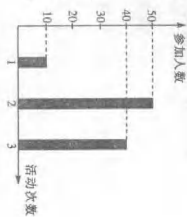
(18) (本小题共 13 分)

某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益劳动(以下简称活动). 该校合唱团共有 100 名学生, 他们参加活动的次数统计如图所示.

(1) 求合唱团学生参加活动的平均次数;

(2) 从合唱团中任选两名学生, 求他们参加活动次数恰好相等的概率;

(3) 从合唱团中任选两名学生, 用 ξ 表示这两人参加活动次数之差的绝对值, 求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.



(17) (本小题共 14 分)

矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2, 0)$, AB 边所在直线的方程为 $x - 3y - 6 = 0$, 点 $T(-1, 1)$ 在 AD 边所在直线上.

(1) 求 AD 边所在直线的方程;

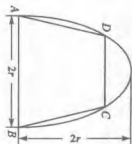
(2) 求矩形 $ABCD$ 外接圆的方程;

(3) 若动圆 P 过点 $N(-2, 0)$, 且与矩形 $ABCD$ 的外接圆外切, 求动圆 P 的圆心的轨迹方程.

(19) (本小题共 13 分)

如图, 有一块半圆形钢板, 其长半轴长为 $2r$, 短半轴长为 r , 计划将此钢板切割成等腰梯形的形状, 下底 AB 是半圆形的短轴, 上底 CD 的端点在圆周上, 记 $CD=2x$, 将面积为 S .

- (1) 求面积 S 以 x 为自变量的函数式, 并写出其定义域;
(2) 求面积 S 的最大值.



(20) (本小题共 13 分)

已知集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} (k \geq 2)$, 其中 $a_i \in \mathbb{N}^+ (i=1, 2, \dots, k)$, 由 A 中的元素构成两个相应的集合:

$S = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a+b \in A\}$, $T = \{(a, b) | a \in A, b \in A, a-b \in A\}$, 其中 (a, b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n .

若对于任意的 $a \in A$, 总有一 $-a \in A$, 则称集合 A 具有性质 P .

- (1) 检验集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 与 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P , 并对其中具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T ;

(2) 对任何具有性质 P 的集合 A , 证明 $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$;

(3) 判断 m 和 n 的大小关系, 并证明你的结论.

2007 年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

第 I 卷

参考公式:

- 如果事件 A, B 互斥, 那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$.
- 球的表面积公式 $S = 4\pi R^2$.
- 如果事件 A, B 相互独立, 那么 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.
- 其中 R 表示球的半径.

一、选择题: 在每小题列出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- (1) i 是虚数单位, $\frac{2-i}{1-i} = ()$.
 (A) $1+i$
 (B) $-1+i$
 (C) $1-i$
 (D) $-1-i$

- (2) 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 1, \\ 3x-y \leq 3, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 4x+y$ 的最大值为 $()$.
 (A) 4
 (B) 11
 (C) 12
 (D) 14

- (3) $-\theta = \frac{2\pi}{3}$ 是 $\tan \theta = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 的 $()$.
 (A) 充分而不必要条件
 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件
 (D) 既不充分也不必要条件

- (4) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 且它的一条渐近线与抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线重合, 则此双曲线的方程为 $()$.
 (A) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1$
 (B) $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{96} = 1$
 (C) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{24} = 1$
 (D) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

- (5) 函数 $y = \log_6(\sqrt{x+4} + 2)$ ($x > 0$) 的反函数是 $()$.
 (A) $y = 4^x - 2^{x+1} (x > 2)$
 (B) $y = 4^x - 2^{x+1} (x > 1)$
 (C) $y = 4^x - 2^{x+1} (x > 2)$
 (D) $y = 4^x - 2^{x+1} (x > 1)$

- (6) 设 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面, 下列四个命题中, 正确的命题是 $()$.
 (A) 若 a, b 与 α 所成的角相等, 则 $a \parallel b$
 (B) 若 $a \parallel \alpha, b \parallel \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $a \parallel b$
 (C) 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel b$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 (D) 若 $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \perp \beta$, 则 $a \perp b$

- (7) 在 $\mathbf{R}$ 上定义的函数 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x) = f(2-x)$, 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 则 $f(x)$ 在 $()$.
 (A) 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是增函数
 (B) 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是减函数

- (C) 在区间 $[-2, -1]$ 上是减函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是增函数
 (D) 在区间 $[-2, -1]$ 上是减函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是减函数

- (8) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, $a_1 = 9d$. 若 a_k 是 a_1 与 a_{10} 的等比中项, 则 $k = ()$.
 (A) 2
 (B) 4
 (C) 6
 (D) 8

- (9) 设 a, b, c 均为正数, 且 $2^a = \log_2 a, \frac{1}{2}^b = \log_2 b, \frac{1}{2}^c = \log_2 c$, 则 $()$.
 (A) $a < b < c$
 (B) $c < b < a$
 (C) $c < a < b$
 (D) $b < c < a$

- (10) 设两个向量 $a = (k+2, k^2 - \cos^2 \alpha)$ 和 $b = \left(m, \frac{m}{2} + \sin \alpha\right)$, 其中 λ, m, α 为实数. 若 $a = 2b$, 则 $\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围是 $()$.
 (A) $[-6, 1]$
 (B) $[4, 8]$
 (C) $[-\infty, 1]$
 (D) $[-1, 8]$

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

- (11) 若 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ 的二项展开式中 x^2 的系数为 $\frac{5}{2}$, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ (用数字作答).

- (12) 一个长方体的各顶点都在同一球的球面上, 且一个顶点上的三条棱的长分别为 1, 2, 3, 则此球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (13) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 是 2, 前 n 项的和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - n^2}{S_n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (14) 已知两圆 $x^2 + y^2 = 10$ 和 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 40$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- (15) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ, AB = 2, AC = 1, D$ 是边 BC

- 上一点, $AD = 2BD$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.
 (16) 如图, 用 6 种不同的颜色给图中的 4 个格子染色, 每个格子涂一种颜色. 要求最多使用 3 种颜色且相邻的两个格子颜色不同, 则不同的染色方法共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种 (用数字作答).



三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\cos x(\sin x - \cos x) + 1, x \in \mathbb{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最小值和最大值.

(18) (本小题满分 12 分)

已知甲盒内有大小相同的 1 个红球和 3 个黑球，乙盒内有大小相同的 2 个红球和 4 个黑球，现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球.

(1) 求取出的 4 个球均为黑球的概率；

(2) 求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率；

(3) 设 ξ 为取出的 4 个球中红球的个数，求 ξ 的分布列和数学期望.

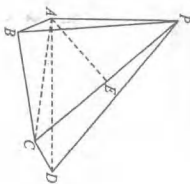
(19) (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \perp AD$ ， $AC \perp CD$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $PA = AB = BC$ ， E 是 PC 的中点.

(1) 证明 $CD \perp AE$ ；

(2) 证明 $PD \perp$ 平面 ABE ；

(3) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



(20) (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \frac{2ax - a^2 + 1}{x^2 + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$), 其中 $a \in \mathbb{R}$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;
(2) 当 $a \neq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

(21) (本小题满分14分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2, a_{n+1}=ka_n + n^{n+1} + (2-\lambda)2^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 其中 $k > 0$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;
(3) 证明存在 $k \in \mathbb{N}^+$, 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$ 均成立.

(22) (本小题满分14分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 是椭圆上的一点, $AF_1 \perp F_1F_2$, 原点 O 到直线 AF_2 的距离为 $\frac{1}{3}|OF_1|$.

- (1) 证明 $a = \sqrt{2}b$;
(2) 设 Q_1, Q_2 为椭圆上的两个动点, $OQ_1 \perp OQ_2$, 过原点 O 作直线 Q_1Q_2 的垂线 OD , 垂足为 D , 求点 D 的轨迹方程.

2007 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)

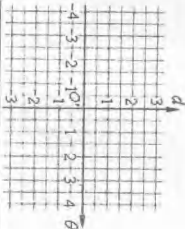
一、填空题(本大题满分 44 分)本大题共有 11 题,只要要求直接填写结果,每个空格填对得 4 分,否则一律得零分.

- (1) 函数 $y = \frac{\ln(x-3)}{x-3}$ 的定义域是 _____.
- (2) 若直线 $l: 2x+my+1=0$ 与直线 $l_1: y=3x-1$ 平行,则 $m =$ _____.
- (3) 函数 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.
- (4) 方程 $x^2 - 6x + 3 - \gamma = 0$ 的解是 _____.
- (5) 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 且 $x+4y=1$,则 $x \cdot y$ 的最大值是 _____.
- (6) 函数 $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{3}\right| + \sin\left|x + \frac{\pi}{2}\right|$ 的最小正周期是 _____.
- (7) 在五个数字 1, 2, 3, 4, 5 中,若随机取出三个数字,则剩下两个数字都是奇数的概率是 _____ (结果用数值表示).

- (8) 以双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的中心为焦点,且以该双曲线的左焦点为顶点的椭圆方程是 _____.
- (9) 对于非零实数 a, b ,以下四个命题都成立:
 - ① $a + \frac{1}{a} \neq 0$;
 - ② 若 $|a| = |b|$, 则 $a = \pm b$;
 - ③ 若 $|a| = |b|$, 则 $a = \pm b$;
 - ④ 若 $a^2 = ab$, 则 $a = b$.
 那么,对于非零实数 a, b ,仍然成立的所有序号是 _____.

- (10) 在平面上,两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种.已知 α, β 是两个相交平面,空间两条直线 l, l_1 在 α 上的射影是直线 s, s_1 ,在 β 上的射影是直线 t, t_1 ,用 s 与 s_1 和 t_1 的位置关系,写出一个总能确定 l 与 l_1 是异面直线的充分条件: _____.

- (11) 已知 P 为圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 上任意一点(原点 O 除外),直线 OP 的倾斜角为 θ 弧度,记 $d = |OP|$.在右侧的坐标系中,画出以 (θ, d) 为坐标的点的轨迹的大致图形为 _____.
- (12) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$,且 $2+ai, b-i$ 是虚数单位,是实数,一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根,那么 p, q 的值分别是 _____.



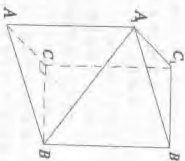
- (A) $p = -4, q = 5$
- (C) $p = 4, q = 5$

- (B) $p = -4, q = 3$
- (D) $p = 4, q = 3$

- (13) 设 a, b 是非零实数,若 $a < b$,则下列不等式成立的是 ().
 - (A) $a^2 < b^2$
 - (B) $ab^2 < a^2b$
 - (C) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
 - (D) $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$
- (14) 直角坐标系 xOy 中, i, j 分别是与 x, y 轴正方向同向的单位向量.在直角三角形 ABC 中,若 $\overrightarrow{AB} = 2i + j, \overrightarrow{AC} = 3i + k\hat{j}$,则 k 的可能值个数是 ().
 - (A) 1
 - (B) 2
 - (C) 3
 - (D) 4
- (15) 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数,且 $f(x)$ 满足:“当 $f(k) \geq k^2$ 成立时,总可推出 $f(k+1) \geq (k+1)^2$ 成立”.那么,下列命题总成立的是 ().
 - (A) 若 $f(3) \geq 9$ 成立,则当 $k \geq 1$ 时,均有 $f(k) \geq k^2$ 成立.
 - (B) 若 $f(5) \geq 25$ 成立,则当 $k \leq 5$ 时,均有 $f(k) \geq k^2$ 成立.
 - (C) 若 $f(7) < 49$ 成立,则当 $k \geq 8$ 时,均有 $f(k) < k^2$ 成立.
 - (D) 若 $f(4) = 25$ 成立,则当 $k \geq 4$ 时,均有 $f(k) \geq k^2$ 成立.

- 三、解答题(本大题满分 90 分)本大题共有 6 题,解答下列各题必须写出必要的步骤.
- (16) (本题满分 12 分)

如图,在体积为 1 的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, AC = BC = 1$.求直线 A_1B 与平面 B_1BC_1 所成角的大小(结果用反三角函数值表示).



(17) (本题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中 a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边, 若 $a=2, C=\frac{\pi}{4}, \cos \frac{B}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

(19) (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 7 分, 第 2 小题满分 7 分.

已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ ($x \neq 0$, 常数 $a \in \mathbf{R}$).

① 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

② 若函数 $f(x)$ 在 $x \in [2, +\infty)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.

(18) (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

近年来, 太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002 年全球太阳能电池的年生产量达到 570 兆瓦, 年生产量的增长率为 34%. 以后四年中, 年生产量的增长率逐年递增 2% (如, 2003 年的年生产量的增长率为 36%).

① 求 2006 年全球太阳能电池的年生产量 (结果精确到 0.1 兆瓦);

② 目前太阳能电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量. 2006 年的实际安装量为 1420 兆瓦. 假设以后若干年内太阳能电池的年生产量的增长率保持在 42%, 到 2010 年, 要使年安装量与年生产量基本持平 (即年安装量不少于年生产量的 95%), 这四年中太阳能电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少 (结果精确到 0.1%)?