

YIFANFENGSHUN

一帆风顺

丛书主编 李瑞坤

高考一轮复习

数学

学生用书

[文]



Y F F S

海南出版社

G A O K A O Y I L U N F U X I



Y F F S

一帆风顺

学生用书

高考一轮复习

丛书主编 李瑞坤

数 学 [文]

本册主编	陈 峰		
副 主 编	李生根	李建刚	毛 水
编 委	董 凰	陈 峰	李生根
	毛 水	李建刚	姜海平
	张志忠	潘意志	

海南出版社

图书在版编目(CIP)数据

一帆风顺. 高考一轮复习. 数学. 文科/李瑞坤主编.

—海口:海南出版社,2006.3

学生用书

ISBN7-5443-1658-0

I.一... II.李... III.数学课—高中—升学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 020876 号

一帆风顺·高考一轮复习

学生用书·数 学(文)

丛书主编 李瑞坤

本册主编 陈 锋

责任编辑 崔修彬

海南出版社 出版发行

海口市金盘开发区建设三横路2号

邮编:570216

湘潭市风帆印务有限公司印刷

各地新华书店经销

2006年4月第1版第1次印刷

开本:850×1168 1/16 印张:216 字数:622万

ISBN 7-5443-1658-0/G·687

全套定价:399.00元

(本书如有印装质量问题,影响阅读,请直接向承印厂调换)



高中新课程标准的实行,教育部高考命题自主权的进一步下放,要求我们必须重新思考高考备考中教与学的模式方略,并拿出行之有效的方法对策,以期获得高考复习的最佳效益。在此大背景下,我们特地组织一批知名高考研究专家和重点中学名师,以 2006 年全国高考《考试大纲》为指导,从培养学生创新思维,提高综合运用知识的能力入手,按照高三第一轮复习课堂教学的基本模式,精心编撰了《一帆风顺》高考数学复习策一轮用书。

本书以教材内容为主线,以章节为单元,按新高考《考试大纲》考点设计课时,全面系统地复习基本知识、基本技能和基本方法,梳理知识要点,编织知识网络;着眼于策一轮复习用书的特点,突出基础性,每个考点从问题设置到能力训练,始终贯彻思维上起低点、多台阶,面向全体学生的原则;选题注重把综合性与创新性相结合,达到培养学生的综合素质与能力的目的。每一章开头分知识体系、考试要求、复习指南,从这三方面对本章知识结构、考试要求及考试方向进行简要叙述。

知识体系 以科学、直观、简明的网络结构勾画出本章各考点主干知识及其相互间联系,纲目分明,犹如一张导游图,引导考生从整体上把握知识脉络。

考试要求 依据 2006 年全国高考《考试大纲》,直击该章所包括的考点,从知识的掌握到考试能力的要求上解读各考点,让考生迎考复习有一个明确的方向与目标。

复习指南 指明该章复习的要领和方向,同时预测 2007 年高考的命题趋势,指导考生在抓住各考点的重点,突破难点的基础上,加强应试复习,以达事半功倍的效果。

根据考试要求,结合教学实际,我们按考点整合设计教学,每个课时分设复习目标、课前练习、知识归纳、互动平台、方法点拨、考题点悟、能力检测等栏目。

复习目标 分条叙述,把该课时须完成考点的复习任务分列,指明重、难点,明晰考试能力目标。

课前练习 4 个小题引路,选题注重基础,让学生从问题出发,通过训练回顾已学知识和基本方法。

知识归纳 按考点建构知识网络,并以填空的形式出现,让学生在课前练习后结合阅读教材填写,充分利用好教材的基础作用,夯实基本概念和基本理论,过好知识关。

互动平台 是课堂教学的核心,按照基础性和综合性兼顾,典型性和创新性相结合的原则,精当选例,三个例题,三个层次,讲练结合,通过现场评价及反馈,引导学生挖掘知识中蕴含的数学思维方法,对典型问题适时拓展,培养学生的思维批判性和广阔性。

方法点拨 课堂结尾时对课对训练内容分条归纳总结,提升解题方法,提炼解题规律,逐步形成数学思想。

考点点悟 通过对本考点近两年全国各地高考试题的解析,引导学生按《考试大纲》所考查的能力要求领会试题,让学生经历解高考题的全过程,感受解题中所运用的数学方法与思想,增强训练的针对性和实战性。

能力检测 针对考点能力要求,按 60 分钟时量配置习题,做到与课堂训练题形成“互补性”,并保证有适量“难、新、活、宽”题,做到了难而不怪,新而不奇,活而不峭,宽而不偏,背景新颖的梯级训练,重在拓展学生思维视野,引导正确的训练方向,过好训练关。

本书第九章《直线、平面、简单几何体》按 A、B 两种教材设点,方便选择不同版本的考生使用,每一单元设置了单元综合测试卷,命题上既注意了梯度,又体现了高考命题思想和原则,注重原创性、新颖性及综合性,并标明分值、活页装订,便于实战演练或自测自检。

本书采用“1+1”模式配备了《教师用书》,编者身处高三教学第一线,潜心研究近几年的高考,按自己的教学理念精心设计,希望能给广大高三师生的第一轮复习提供有益的参考。限于编者水平,加之时间仓促,书中错误在所难免,敬请广大读者批评指正(电子信箱:editor@csxhsy.com),以便我们在再版时修订参考。

编 者

2006 年 4 月



目录

一帆风顺

CONTENTS

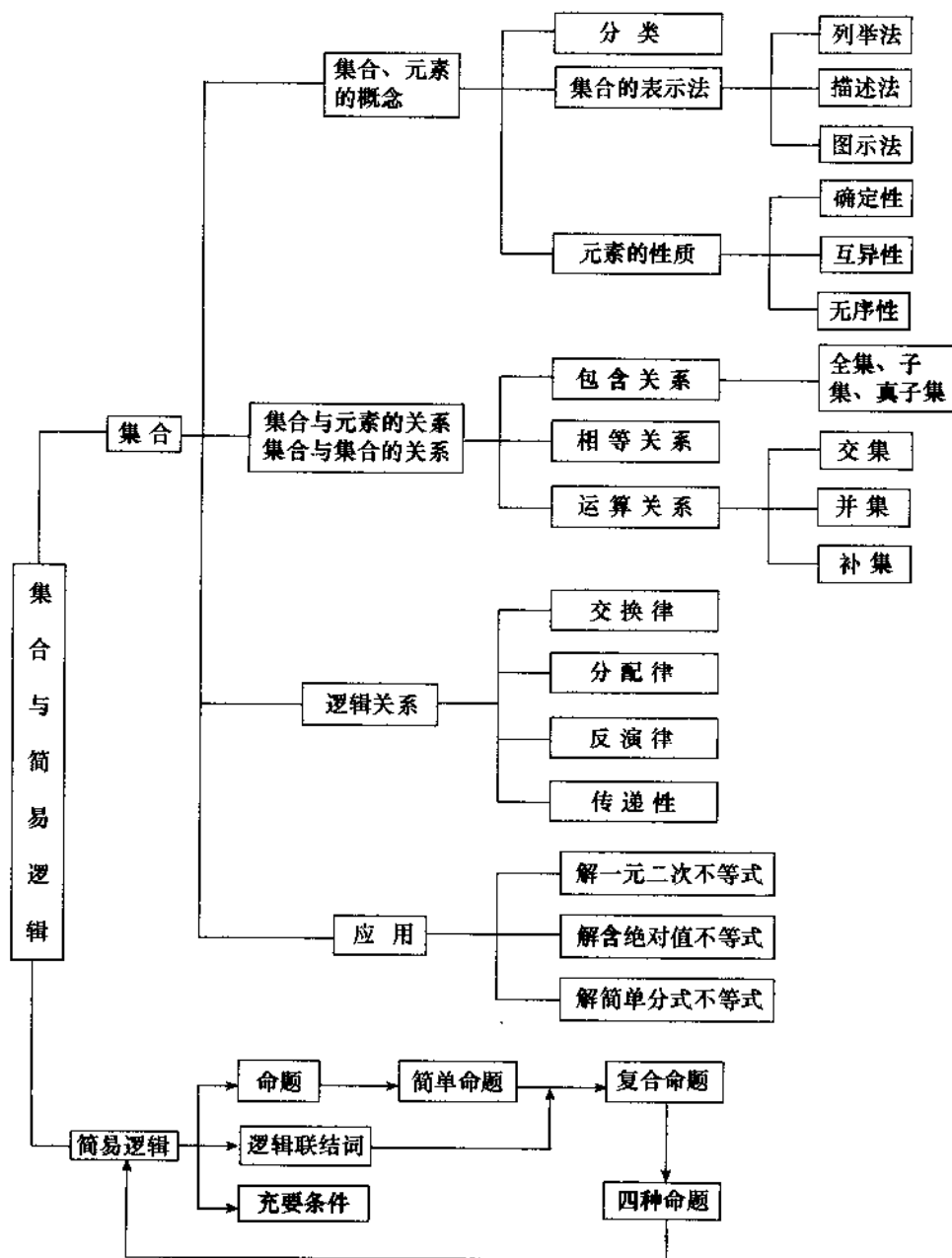
第一章 集合与简易逻辑	1	§ 4.3 和、差、倍、半角的三角函数	88
§ 1.1 集合的概念	2	§ 4.4 三角函数式的化简与求值	91
§ 1.2 集合的运算	5	§ 4.5 三角恒等式与条件等式的证明	94
§ 1.3 含绝对值的不等式和一元二次不等式	8	§ 4.6 三角函数的图象和性质	97
§ 1.4 简易逻辑与充要条件	10	§ 4.7 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	100
第二章 函数	14	§ 4.8 三角函数的最值问题	105
§ 2.1 映射与函数	15	第五章 平面向量	108
§ 2.2 函数的定义域	18	§ 5.1 向量及其性质	109
§ 2.3 函数的值域	21	§ 5.2 向量的运算	112
§ 2.4 函数的奇偶性、周期性	24	§ 5.3 向量平行、垂直、夹角与长度	115
§ 2.5 函数的单调性	28	§ 5.4 定比分点和平移	118
§ 2.6 反函数	32	§ 5.5 平面向量的应用	121
§ 2.7 二次函数与一元二次方程	36	§ 5.6 解斜三角形	124
§ 2.8 指数式与对数式	40	§ 5.7 三角形中的三角函数问题	127
§ 2.9 指数函数与对数函数	43	第六章 不等式	131
§ 2.10 函数的图象	47	§ 6.1 不等式的性质	132
§ 2.11 函数的应用	51	§ 6.2 重要不等式及其应用	134
§ 2.12 函数综合	56	§ 6.3 不等式的证明(1)	137
第三章 数列	60	§ 6.4 不等式的证明(2)	139
§ 3.1 数列的概念	61	§ 6.5 不等式的解法	142
§ 3.2 等差数列	65	§ 6.6 含绝对值的不等式	145
§ 3.3 等比数列	69	§ 6.7 不等式的应用	148
§ 3.4 数列求和	72	第七章 直线和圆的方程	152
§ 3.5 数列应用问题	76	§ 7.1 直线方程	153
第四章 三角函数	80	§ 7.2 两直线的位置关系	157
§ 4.1 任意角的三角函数	81	§ 7.3 有关对称问题	162
§ 4.2 同角三角函数的基本关系式与诱导公式	85	§ 7.4 简单的线性规划	165
		§ 7.5 曲线和方程	170
		§ 7.6 圆的方程	174

§ 7.7 直线与圆、圆与圆的位置关系	178	第十章 排列、组合和概率	290
§ 7.8 与圆有关的轨迹与最值问题	182	§ 10.1 两个基本原理	291
第八章 圆锥曲线方程	185	§ 10.2 排列应用题	294
§ 8.1 椭圆	186	§ 10.3 组合应用题	296
§ 8.2 双曲线	189	§ 10.4 排列组合综合应用题	299
§ 8.3 抛物线	194	§ 10.5 二项式定理	302
§ 8.4 直线与圆锥曲线的位置关系(1)	198	§ 10.6 二项式定理的应用	305
§ 8.5 直线与圆锥曲线的位置关系(2)	202	§ 10.7 随机事件的概率	308
§ 8.6 圆锥曲线的最值与定值问题	206	§ 10.8 互斥事件有一个发生的概率	311
§ 8.7 轨迹问题	210	§ 10.9 相互独立事件同时发生的概率	314
§ 8.8 圆锥曲线综合问题	213	第十一章 统计与导数	318
第九章 直线、平面、简单几何体	218	§ 11.1 统计	318
§ 9.1 平面及其基本性质	219	§ 11.2 导数的概念及常见函数的导数	322
§ 9.2 空间直线	223	§ 11.3 导数的应用(1)	325
§ 9.3 直线与平面平行和垂直	227	§ 11.4 导数的应用(2)	328
§ 9.4 三垂线定理及其逆定理	231		
§ 9.5 两个平面的平行和垂直	235		
§ 9(B).6 空间向量及其运算	239		
§ 9(B).7 空间向量的坐标运算	243		
§ 9(A).8 空间的角	246		
§ 9(B).8 空间的角	250		
§ 9(A).9 空间的距离	255		
§ 9(B).9 空间的距离	259		
§ 9(A).10 棱柱	263		
§ 9(B).10 棱柱	267		
§ 9(A).11 棱锥	271		
§ 9(B).11 棱锥	275		
§ 9.12 多面体与正多面体	279		
§ 9.13 球	282		
§ 9.14 折叠与展开问题	285		



第一章 集合与简易逻辑

☆ 知识体系 ☆



☆ 考试要求 ☆

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念. 了解空集和全集的意义, 了解属于、包含、相等关系的意义. 掌握有关的术语符号, 并会用它们正确表示一些简单的集合.
2. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义. 理解四种命题及其相互关系. 掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义.

☆ 复习指南 ☆

高考命题规律与命题趋势:

- (1) 集合语言是现代数学的基本语言, 集合的基本知识是每年高考的必考内容之一, 高考命题中仍以考查概念与计算为主, 题型主要是选择题、填空题, 单纯的集合问题以解答题的形式出现的几率不大.
- (2) 高考对集合知识的考查重点是集合与集合的关系, 近年试题加强了对集合的计算化简的考查, 并向无限集发展, 考查抽象思维能力. 另外, 在集合考查中定义新运算是一个新的命题背景.
- (3) 高考对“充分条件”、“必要条件”、“充要条件”的考查题型主要是选择题和填空题, 以这些知识为工具, 以其它知识为载体考查学生对概念的深层次理解.
- (4) 高考对简易逻辑的考查以四种命题和逻辑联结词等知识为主, 考查函数、三角、立体几何、解析几何中的知识, 以较容易的选择题、填空题出现.
- (5) 含绝对值不等式和一元二次不等式亦为高考的必考内容, 它们或单独地直接以选择题、填空题出现, 或以含有参数形式作为简单解答题出现. 而有时也以解题工具的角色出现在以其他知识为背景的大小综合题中.

§ 1.1 集合的概念

复习目标

1. 理解集合、子集、真子集的概念. 了解空集和全集的意义.
2. 了解属于、包含、相等关系的意义. 会把数学语言与集合语言相互转化.

课前练习

1. 已知集合 $M = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } \frac{12}{10-x} \in \mathbb{N}\}$, 则 M 的非空真子集的个数是 ()
A. 30 B. 32
C. 62 D. 64
2. 同时满足 $|1| \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数为 ()
A. 5 个 B. 6 个
C. 7 个 D. 8 个
3. 已知集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{a, a^2\}$, 则使 $M \cap N = N$ 成立的 a 值为 _____.
4. 已知 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, 定义集合 A, B 之间的运算: $A * B = \{x | x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B\}$, 则集

合 $A * B$ 中最大的元素为 _____, 集合 $A * B$ 的所有子集的个数为 _____ 个.

知识归纳

1. 集合是一个不能定义的原始概念, 其描述定义为: 某些确定的对象 _____ 就成为一个集合, 简称 _____, 集合中每一个对象叫做这个集合的 _____.
2. 集合中的元素具有三个特性: (1) _____; (2) _____; (3) _____.
3. 常用的集合表示法有 _____、_____ 和图示法三种. 有限集常用 _____ 表示, 无限集常用 _____ 表示, 图示法常用于表示集合之间的相互关系.
4. 元素与集合是属于和不属于的从属关系, 若元素 a 是集合 A 的元素, 记作 _____, 若元素 a 不是集合 A 的元素, 记作 _____.
5. 子集: 若集合 A 中的 _____ 都是集合 B 的元素, 则称集合 A 是集合 B 的子集, 记作 _____, 读作 _____.
6. 集合相等: 若集合 A 中的 _____ 都是集合 B 的元素, 并且集合 B 中的 _____, 则称集合 A 等于集合 B , 记作 _____.
7. 真子集: 若集合 A 是集合 B 的子集, 且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A (即 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$), 则称



集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 _____.

8. 若集合 A 中有 n 个元素, 则 A 的子集有 _____ 个, 真子集有 _____ 个, 非空真子集有 _____ 个.

9. 空集用 _____ 表示, 它不含任何元素, 它是任何集合的 _____, 是任何非空集合的 _____.



【例 1】下面每组中各个元素集合的意义是否相同? 为什么?

(1) $\{x|x=0\}$, $\{x=0\}$; (2) $\{x|x^2-ax-1=0\}$, $\{a|$ 方程 $x^2-ax-1=0$ 有实根 $\}$; (3) $\{y|y=x^2\}$, $\{(x,y)|y=x^2\}$; (4) $\{x|x^2-2x-3=0\}$, $\{3, -1\}$.

【例 2】已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$, 集合 $B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$, 集合 $C=\{x|3^{x^2-2x-8}=1\}$, 满足 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求实数 a 的值.

【例 3】设 m, n 是整数, 集合 $A=\{(x,y)|(x-m)^2+3n \leq 6y\}$ 包含点 $(2,1)$, 但不包含点 $(1,0)$ 与 $(3,2)$, 求 m 及 n 的值.

【例 4】已知集合 $P=\{x|x^2-5x+4 \leq 0\}$, $Q=\{x|x^2-2bx+b+2 \leq 0\}$ 满足 $Q \subseteq P$, 求实数 b 的取值范围.

解.

2. 研究两集合关系时, 若其中一个集合未定, 注意到它是否为空集, 因为空集是任何一个集合的子集, 使问题产生讨论.

3. 有关的集合综合题, 要善于弄清集合间的隶属关系, 准确地把集合语言与其它数学语言等价转化, 化生为熟.



(2004·江苏卷) 设函数 $f(x) = -\frac{x}{1+|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$), 区间 $M=[a,b]$ ($a < b$), 集合 $N=\{y|y=f(x), x \in M\}$, 则使 $M=N$ 成立的实数对 (a,b) 有 (A)

- A. 0 个 B. 1 个
C. 2 个 D. 无数个

解: $f(x) = -\frac{x}{1+|x|}$ 为奇函数.

$x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$, 易知它在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上递减,

$\therefore$ 若存在 a, b , 使 $M=N$, 则有

$$\begin{cases} f(a) = b \\ f(b) = a \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{-a}{1+|a|} = b & \text{①} \\ \frac{-b}{1+|b|} = a & \text{②} \end{cases}$$

①, ②相乘 $\frac{ab}{(1+|a|)(1+|b|)} = ab$,

$\therefore ab=0$ 或 $(1+|a|)(1+|b|)=1$.

若 $ab=0$, 则 $a=0$ 或 $b=0$. $a=0$ 时, 由①知 $b=0$, 这与 $a < b$ 矛盾. 同理 $b=0$ 时, $a=0$ 矛盾.

若 $(1+|a|)(1+|b|)=1$, 则必有 $a=b=0$, 与 $b > a$ 矛盾.

$\therefore$ 满足条件的 a, b 不存在.

点评: 本题重点考查函数基础知识, 通过研究函数的单调性使问题获解.



一、选择题

1. 设 P, Q 是两个集合, 定义集合 $P \times Q = \{(a,b)|a \in P \text{ 且 } b \in Q\}$. 若 $P=\{1,2,3,4,5\}$, $Q=\{3,4,5,6\}$, 则集合 $P \times Q$ 中元素个数为 ()

- A. 5^4 个 B. 4^5 个
C. 20 个 D. 9 个

2. 已知集合 $A=\{0,1\}$, $B=\{x|x \subseteq A\}$, 则集合 B 中的



1. 集合的三要素: 确定性、互异性、无序性是集合的三个特性, 解题时注意对结果互异性的检验, 去掉多余的

元素个数是

()

- A. 1个 B. 2个
C. 3个 D. 4个

3. 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为

M 和 N , 那么 " $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ " 是 " $M = N$ " 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 集合 $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, A 是 S 的一个子集, 当 $x \in A$ 时, 若 $x-1 \notin A$, 且 $x+1 \notin A$, 则称 x 为 A 的一个“孤立元素”, 那么 S 中无“孤立元素”的 4 元子集的个数是 ()

- A. 4个 B. 5个
C. 6个 D. 7个

二、填空题

5. 设 $M = \{(x, y) | mx + ny = 4\}$, 且 $\{(2, 1), (-2, 5)\} \subseteq M$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 若 $A = \{x | x = a^2 + 2a + 4, a \in \mathbb{R}\}$, $B = \{y | y = b^2 - 4b + 3, b \in \mathbb{R}\}$. 则 A 与 B 的关系为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 已知 $A = \{x | x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

8. 已知集合 $A = \{a, a+b, a+2b\}$, $B = \{a, ac, ac^2\}$, $a \neq 0$, 若 $A = B$, 求 c 值.

9. 设 $M = \{x | ax^2 + (a-2)x + 1 < 0\}$, 已知 $M \neq \emptyset$ 且 $M \subseteq (0, +\infty)$, 求实数 a 的范围.

10. 已知集合 $S = \{a \in \mathbb{R} | a \text{ 使方程 } \frac{ax-2}{2x-1} = x \text{ 有实根}\}$,

集合 $A = \{a \in \mathbb{R} | a \text{ 使方程 } \frac{ax-2}{2x-1} = x \text{ 有两个不等实根}\}$. 求 $\complement_S A$.



§ 1.2 集合的运算

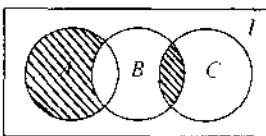
复习目标

1. 理解交、并、补等概念,会运用交、并、补运算法则进行计算.

2. 会把集合语言与数学语言等价转化,并能准确运用集合的思想解答其他数学问题.

课前练习

1. 设 I 为全集,集合 A, B, C 都是其子集,则图中阴影部分表示的集合为



- ()
- A. $(A \cap \complement_I B) \cup (B \cap C)$
- B. $(A \cup \complement_I B) \cap (B \cap C)$
- C. $(A \cap \complement_I B) \cup (C \cap \complement_I B)$
- D. $(C \cap \complement_I C) \cup (B \cap C)$
2. 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为 ()
- A. 1 个 B. 2 个
- C. 3 个 D. 4 个
3. 若集合 $A = \{x | x^2 - x - 12 < 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = x + 1, x \in A\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$ _____.
4. 若集合 $M = \{y | y = 2^x\}$, $N = \{y | y = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x^2 + 1}\}$, 则 $M \cup N$ 等于 _____.

知识归纳

1. 交集: 由所有属于 A _____ 属于 B 的元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 _____, 即交集 _____ = _____.
2. 并集: 由所有属于 A _____ 属于 B 的元素组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 _____, 即并集 _____ = _____.
3. 补集: 集合 A 是集合 I 的子集, 由 _____ 的元素组成的集合, 叫做 I 中集合 A 的补

集, 记作 $\complement_I A =$ _____.

4. 集合的常用运算性质:

(1) $A \cap A =$ _____, $A \cap \emptyset =$ _____, $A \cap B =$ _____; $A \cup A =$ _____, $A \cup \emptyset =$ _____, $A \cup B =$ _____, $B \cup A =$ _____.

(2) $A \cap (\complement_I A) =$ _____, $A \cup (\complement_I A) =$ _____,

$\complement_I (\complement_I A) =$ _____, 其中 U 为全集, $A \subseteq U, B \subseteq U$.

(3) $\complement_S (A \cup B) =$ _____, $\complement_S (A \cap B) =$ _____, 其中 S 为全集, $A \subseteq S, B \subseteq S$.

(4) $A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A \Leftrightarrow A \supseteq B \Leftrightarrow \complement_S A \subseteq \complement_S B$.

(5) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

互动平台

【例 1】(1) 集合 $M = \{(x, y) | x = \cos \theta, y = \sin \theta, (0 < \theta < \pi)\}$, $N = \{(x, y) | y = x + b\}$, 且 $M \cap N = \emptyset$, 求 b 的范围.

(2) 集合 $A = \{x | y = \sqrt{3 + 2x - x^2}\}$, $B = \{y | y = m - 2x - x^2\}$, 若 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \mathbf{R}$, 求 m 的范围.

【例 2】函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P \\ -x, & x \in M \end{cases}$ 其中 P, M 为实数

集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y | y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y | y = f(x), x \in M\}$, 给出下列四个命题:

- ① 若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$;
- ② 若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$;
- ③ 若 $P \cup M = \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$;
- ④ 若 $P \cup M \neq \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$.

其中正确命题的序号是 _____ (请把正确命题序号全都填上).

【例3】对于点集 $A = \{(x, y) | x = m, y = -3m + 2, m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{(x, y) | x = n, y = a(n^2 - n + 1), n \in \mathbb{Z}\}$, 问是否存在正整数 a , 使得 $A \cap B \neq \emptyset$?

$$\text{解法 1: } A = \{x | \frac{x-1}{x+1} < 0\} = \{x | -1 < x < 1\}.$$

$$B = \{x | |x-b| < a\} = \{x | b-a < x < b+a\}$$

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, } B = \{x | b-1 < x < b+1\}$$

$$\therefore A \cap B \neq \emptyset, \therefore \begin{cases} b-1 < 1 \\ b+1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < b < 2.$$

又 $\because$ 只要求充分条件, $\therefore$ 只需找 $(-2, 2)$ 的子集即可, 故 D 符合要求.

解法 2: 特值法, 将 $b=0$ 代入满足题目条件, 故选 D.

点评: 解法 1 采用先求充要条件, 再从选择支中寻找必要条件; 解法 2 是特值法, 这也是解高考数学选择题的一重要手段.



一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x | |x-a| < 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$, 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 2]$ B. $(-1, 2)$
C. $[-2, 1]$ D. $(-2, 1)$

2. 设集合 $U = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, $A = \{(x, y) | x + y > m\}$, $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq n\}$, 那么点 $M(1, 2) \in (\complement_U A) \cap B$ 的充要条件是 ()

- A. $m \geq 3$ 且 $n \geq 5$ B. $m \leq 3$ 且 $n \geq 5$
C. $m \geq 3$ 且 $n \leq 5$ D. $m \leq 3$ 且 $n \leq 5$

3. 设 A, B 是非空集合, 定义 $A \times B = \{x | x \in A \cup B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 已知: $A = \{x | y = \sqrt{2x - x^2}\}$, $B = \{y | y = 2^x (x > 0)\}$, 则 $A \times B$ 等于 ()

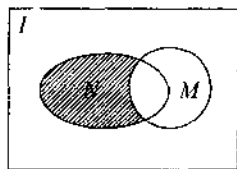
- A. $[0, 1] \cup (2, +\infty)$ B. $[0, 1) \cup (2, +\infty)$
C. $[0, 1]$ D. $[0, 2]$

4. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 A, B 都是 U 的子集, 若 $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ 则称 A, B 为“理想配集”, 记作 (A, B) , 这样的“理想配集” (A, B) 共有 ()

- A. 7 个 B. 8 个
C. 27 个 D. 28 个

二、填空题

5. 设全集 I 是实数集 $\mathbb{R}$, $M = \{x | x^2 > 4\}$ 与 $N = \{x | \frac{2}{x-1} \geq 1\}$ 都是 I 的子集 (如右图所示), 则阴影部分所表示的集合为_____.



6. 已知 a 为不等于零的实数, 那么集合 $M = \{x | x^2 -$

【例4】设集合 $A = \{(x, y) | ax + y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + y = a\}$, $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, 问:

(1) 当 a 为何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为含有两个元素的集合?

(2) 当 a 为何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为含有三个元素的集合?



1. 讨论集合的运算时, 注意集合语言与其它数学语言等价转化, 同时注意数形结合, 分类讨论等数学思想的运用.

2. 集合是近代数学的基础, 它与高等数学紧密相关, 因此命题常把一些高等数学问题初等化, 即用初等数学方法去解决高等数学等问题, 其关键是集合的语言向数学语言的转化.



(2005·湖南卷) 集合 $A = \{x | \frac{x-1}{x+1} < 0\}$, $B = \{x | |x-b| < a\}$. 若“ $a=1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分条件, 则 b 的取值范围是 ()

- A. $-2 \leq b < 0$ B. $0 < b \leq 2$
C. $-3 < b < -1$ D. $-1 \leq b < 2$



$2(a+1)x+1=0, x \in \mathbf{R}$ 的子集的个数为 _____.

7. 已知 $A = \{(x, y) \mid \begin{cases} x = -2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \theta \in [0, \pi]\}$, $B =$

$\{(x, y) \mid y = kx + k + 1\}$, 若 $A \cap B$ 含有两个元素, 则 k 满足 _____.

三、解答题

8. 在 1~100 的自然数中有多少个能被 3 或 2 整除的数?

9. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + (2m-3)x - 3m = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m = 0\}$, 且 $A \neq B$, 是否存在非零实数 a 满足条件 $a \in A \cap B$? 若存在, 求对应实数 m 的值和 $A \cup B$; 若不存在, 请说明理由.

10. 已知全集 $I = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2ax + a \leq 0, a \in \mathbf{R}\}$, 且 $A \cap B = B$, 求实数 a 的范围.



§ 1.3 含绝对值的不等式和一元二次不等式



1. 了解不等式的性质, 掌握含绝对值不等式的基本解法.

2. 会解一元二次不等式, 及运用数轴标根法解高次不等式及简单的分式不等式.



1. 若不等式 $|x+b| \leq c$ 的解集为 $|x-4| \leq 6$, 则 b, c 的值分别为 ()

- A. -1, 5 B. 1, -5
C. 1, 5 D. -1, -5

2. (2004·北京) 函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充要条件是 ()

- A. $a \in (-\infty, 1]$
B. $a \in [2, +\infty)$
C. $a \in [1, 2]$
D. $a \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

3. 不等式 $\frac{|x-2|}{2x-5} < 0$ 的解集是_____.

4. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $x \otimes y = x(1-y)$, 若不等式 $(x-a) \otimes (x+a) < 1$ 对任意实数 x 均成立, 则 a 的取值范围是_____.



1. 绝对值的意义是: $|a| =$ _____.

2. $|x| < a (a > 0)$ 的解集是_____.

$|x| > a (a > 0)$ 的解集是_____.

3. 当 $a > 0$ 时, 不等式 $ax + b > 0$ 的解集为_____; 当 $a < 0$ 时, 不等式 $ax + b > 0$ 的解集为_____.

4. 当 $a > 0$ 时, 若方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为_____, 不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解集为_____.

5. 若 $a > 0$, 且方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, 则不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为_____, 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为_____.

6. 若 $a > 0$, 且方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 无实根, 则不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为_____, 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为_____.



【例1】设 $a > 0, b > 0$, 解关于 x 的不等式 $|ax - 2| \geq bx$.

【例2】设 $|x-2| < a$ 时, 不等式 $|x^2 - 4| < 1$ 成立, 求正数 a 的取值范围.

【例3】解关于 x 的不等式 $\frac{1}{x} > 2a - x (a > 0)$.

【例4】设 $f(x) = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数), 方程 $f(x) - x = 0$ 的两实根为 x_1, x_2 , 且满足 $x_1 > 0, x_2 - x_1 > 1$.

(1) 求证: $b^2 > 2(b+2c)$;

(2) 设 $0 < t < x_1$, 比较 $f(t)$ 与 x_1 之大小.



方法点拨

1. 解绝对值不等式的基本思想就是利用绝对值概念分类讨论, 转化为不含绝对值的不等式后求解.

2. 有关一元二次不等式的问题, 注意与二次函数及二次方程有机联系起来, 尤其是利用二次函数的图象, 帮助求解.

3. 分式不等式可等价转化为整式不等式(组), 然后运用数轴标根去求解.

考题点悟

(2005·浙江卷) 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称, 且 $f(x) = x^2 + 2x$.

(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式;

(2) 解不等式 $g(x) \geq f(x) - |x-1|$;

(3) 若 $h(x) = g(x) - \lambda f(x) + 1$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数, 求实数 λ 的取值范围.

解: (1) 设函数 $y = f(x)$ 的图象上任一点 $Q(x_0, y_0)$ 关于原点的对称点为 $P(x, y)$.

$$\text{则} \begin{cases} \frac{x_0+x}{2} = 0 \\ \frac{y_0+y}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -x \\ y_0 = -y \end{cases}$$

$\therefore$ 点 $Q(x_0, y_0)$ 在函数 $y = f(x)$ 的图象上.

$$\therefore -y = x^2 - 2x \text{ 即 } y = -x^2 + 2x$$

$$\text{故 } g(x) = -x^2 + 2x$$

(2) 由 $g(x) \geq f(x) - |x-1|$ 可得,

$$2x^2 - |x-1| \leq 0.$$

当 $x \geq 1$ 时, $2x^2 - x + 1 \leq 0$ 此不等式无解.

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } 2x^2 + x - 1 \leq 0, \therefore -1 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

因此, 原不等式的解集为 $[-1, \frac{1}{2}]$

$$(3) h(x) = -(1+\lambda)x^2 + 2(1-\lambda)x + 1$$

① $\lambda = -1$ 时, $h(x) = 4x + 1$ 在 $[-1, 1]$ 上为增函数,

$$\therefore \lambda = -1.$$

$$\text{② } \lambda \neq -1 \text{ 时, 对称轴方程为 } x = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

$$\text{当 } \lambda < -1 \text{ 时, } \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \leq -1 \Rightarrow \lambda < -1,$$

$$\text{当 } \lambda > -1 \text{ 时, } \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \geq 1 \Rightarrow -1 < \lambda \leq 0.$$

综上所述, $\lambda \leq 0$.

能力检测

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x | |x-a| \leq 1\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()
- A. $(0, 1)$ B. $(-\infty, 1)$
C. $(0, +\infty)$ D. $[0, 1]$

2. 不等式 $|\frac{ax-1}{x}| > a$ 的解集为 M , 且 $2 \notin M$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $[\frac{1}{4}, +\infty)$

C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(0, \frac{1}{2}]$

3. 不等式 $|x|(1-2x) > 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{2})$

4. 对于 $x \in [0, 1]$ 的一切值, $a+2b > 0$ 是使 $ax+b > 0$ 恒成立的 ()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

5. 不等式 $|x^2-9| \leq |x+3|$ 的解集为 _____.

6. 已知不等式 $|2x-t| + t - 1 < 0$ 的解集为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 则 $t =$ _____.

7. 已知适合不等式 $|x^2-4x+a| + |x-3| \leq 5$ 的最大值为 3, 则实数 $a =$ _____.

三、解答题

8. 解关于 x 的不等式 $|x^2-1| > a+2 (a < 0)$.

9. 解关于 x 的不等式 $\frac{a(x-1)}{x-2} > 1 (a > 0)$.

10. a 取哪些值时, 方程 $x^2 + a^2 = 4$ 的较小的解满足不等式 $x^2 + 2ax - 2a - 1 < 0$?

§ 1.4 简易逻辑与充要条件



1. 命题的真假识别与命题的等价转化, 理解逻辑联结词的含义, 并会用它们构造复合命题.

2. 四种命题的关系, 理解充分必要条件并能运用判定与证明.



1. 给出下列三个命题: ①若 $a \geq b > -1$, 则 $\frac{a}{1+a} \geq$

$\frac{b}{1+b}$; ②若正整数 m 和 n 满足 $m \leq n$, 则

$\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{n}{2}$; ③设 $P(x_1, y_1)$ 为圆 $O_1: x^2 + y^2$

$= 9$ 上任一点, 圆 O_2 以 $Q(a, b)$ 为圆心且半径为 1, 当 $(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 = 1$ 时, 圆 O_1 与圆 O_2 相切, 其中假命题个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 公比为 q , 则“ $a_1 > 0$, 且 $q > 1$ ”是“对于任意自然数 n , 都有 $a_{n-1} > a_n$ ”的 ()

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

3. 命题“ $x > 0$, 且 $y > 0$, 则 $xy > 0$ ”及其逆命题、否命题、逆否命题, 这四个命题中, 正确的个数有 _____ 个.

4. (2004·湖北卷) 设 A, B 为两个集合, 下列四个命题:

① $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \in B$; ② $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$; ③ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \supseteq B$; ④ $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \notin B$.

其中真命题的序号是 _____ (把符合要求的命题序号都填上).



1. _____ 叫做命题.

2. _____ 叫逻辑联结词.