文科高等数学

李佐锋 王淑琴 编著

高等教育出版社

文科高等数学

李佐锋　王淑琴　编著

高等教育出版社

内容简介

本书是为各类综合性大专院校文科学生编写的高等数学教材。与以往的同类教材不同，本书采用了“问题解决”式的撰写模式，以人们生产、生活中常见的实际问题作为出发点，尝试通过解决这些问题来介绍高等数学的基本知识、基本方法和基本思想。本书使用通俗易懂的语言阐明用数学方法处理一些实际问题的思路，达到引发学生学习高等数学的兴趣，从而掌握基本数学内容，提高基本数学应用能力的目的，这也使本书更具吸引性和可读性。

本书涉及的数学内容有图论、差分方程、概率统计中的最基本模型以及一元微积分模型的初步知识。本书知识面较宽，但内容相对较浅，各章内容相对独立，更适合文科学生选用，同时使教学有相当的灵活性，又有一定的余地。为使读者选用方便，本书还选编了音乐、美术、体育、文学和语言学等学科中的数学问题作为附录。与本书配套的电子课件也将出版发行。

本书对涉及文科各专业的广大社会工作者来说也是一本很好的学习参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

文科高等数学/李佐锋，王淑琴编著. —北京：高等教育出版社，2007.7
ISBN 978-7-04-021444-4

Ⅰ.文… Ⅱ.①李…②王… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 071190 号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 张海雁 **封面设计** 王凌波
责任绘图 尹 莉 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 姜国萍
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京铭成印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×960 1/16	版　次	2007年7月第1版
印　张	17.5	印　次	2007年7月第1次印刷
字　数	320 000	定　价	18.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 21444-00

前　言

本书是为全国各高校文科专业广泛开设高等数学课程的需要而编写的，主要内容是以微积分、概率论、差分方程和图模型等几个数学分支为载体，介绍高等数学的基本内容、基本思想和基本方法。

如何在文科专业开设高等数学是全国各高校都要面对的一个全新事物。其开设的必要性是不言自明的，问题是，如何向文科学生进行高等数学教育，以达到有效提高其数学素质的目的？高等数学的内容十分丰富，那么对文科专业应该开设哪些内容？又该怎样开设？

目前，文科数学教材大致有三种常见模式：数学源与流、美与理探讨类，传统理工科高等数学的简单压缩类，纯汉字叙述类。认真阅读和研究了以上几种模式后，编者认为纯汉字叙述很难达到进行数学思想与方法教育的目的，因为没有必要的数学知识基础，就无法领会其精神实质，不能领会其精神实质，则难以提高数学素养；对传统理工科数学进行简单压缩的做法则不易脱离理工科教学模式的影响，难以达到对文科学生进行数学素质教育的初衷。

以张顺燕教授为代表的国内高校名师撰写的《数学的源与流》、《数学的美与理》、《数学文化》等优秀著作，都是难得的文科数学教材。编者认为，不仅对于文科专业，对于理工科专业学生也都应该讲授这些揭示数学本质的知识。但是我们又不得不承认这样一个事实，向文科学生传授数学文化的教师绝大部分都是中青年教师，其数学素养很难与这些名师相比。这就产生了一个问题，必须选定某些数学知识作为有效载体，使得普通教师也能够借助这个载体讲出数学的基本思想和基本方法，达到提高文科学生数学素质的目的。

在上述分析基础上，编者进行了创新性研究。主要论点是：第一，必须充分考虑文科学生的数学基础、偏好和接受能力，使得教学内容具有可接受性；第二，根据编者多年的教学经验以及大量调查研究结果，很多学生之所以选择文科专业，其主要原因是对抽象的数学理论产生了较强的逆反心理，而对于应用数学解决实际问题却颇有兴趣。

于是，编者遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，首先结合数学建模思想，把通过建立实际问题的数学模型解决实际问题的思想方法和思路巧妙地融合到教学内容中，使得教学内容具有了很强的吸引力；其次，将传统教学内容中没有的，但别具特色和兴趣、具有很强应用价值的图模型、差分方程模型引入教学内容，达到引发文科学生渴求数学知识、探究其应用的目的，增强了教学

内容的可接受性；最后，在写法上破天荒地采用了“问题解决”模式，即：问题提出、知识储备、问题解决和进一步研究的问题的四步撰写模式。几轮的教学实践表明，这些做法较好地达到了对文科学生进行数学素质教育的预期效果。

本书所有内容的引进都是从人们生产、生活中的数学问题入手，本着由简到繁，逐步引发学习兴趣的原则，从简单实际问题的数学模型引入知识点，不求过分深究，但求说明用数学解决实际问题的过程、思想和方法，将基本的逻辑思维与直观的数学推理思想贯穿整个教学过程。不再片面追求数学的严密性、连续性和抽象性，以增强学生的学习信心和兴趣为目的，使之在愉悦的环境中接受高等数学教育。

为了充分结合与数学有关的文科专业内容进行讲授，编者将数学与文学、数学与语言学、数学与音乐、体育、美术等内容作为附录放在全书的最后，供教师和学生选用。

本书的知识面较宽，但内容相对较浅，各章内容相对独立，更适合文科学生选用。对不同学时要求的课程，本书提供了不同的教学模块以供选择参考，使教师教学有相当的灵活性和一定的余地。本书主要内容讲授大约需要56学时。

2006年10月在西安举行的全国高等学校文科数学教育高级研讨会上，本书初稿得到了南开大学顾沛教授、北京航空航天大学李尚志教授和徐州师范大学周明儒教授等知名专家的充分肯定，并得到20余所高校参会教师的一致好评。

本书的整体思路设计、内容安排均由李佐锋完成。王淑琴老师参与了部分工作，并配合本书完成了电子教案的设计制作工作。孙静懿老师做了大量的相关资料查阅和部分文字稿件的打印工作。

本书在编撰过程中，得到我校校长史宁中教授，教务处处长、校长助理高夯教授，院长潘家齐教授的大力支持和帮助，在此谨向他们致以诚挚的谢意！

北京理工大学叶其孝教授仔细审阅了本书初稿，提出了极其宝贵的意见，在此谨向他致以最真挚的感谢！

本书虽然在我校历经多次使用和修改，但由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

东北师范大学　李佐锋
2007年1月于长春

本书所用的主要符号

为了课程主体内容的叙述简洁和学生学习方便,本课程将使用下列知识和符号。

1. 常用集合及其符号

$\mathbb{R}$——全体实数集.$\mathbb{R}$的常用子集:自然数集$\mathbb{N}$,整数集$\mathbb{Z}$,有理数集$\mathbb{Q}$,且有

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

2. 特殊的集合——邻域

设$a\in\mathbb{R}$,$\delta>0$(正实数),称集合

$$U(a;\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

为**点a的δ邻域**,简记为$U(a)$;称集合

$$\overset{\circ}{U}(a;\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

为**点a的去心δ邻域**,简记为$\overset{\circ}{U}(a)$,其中a称为邻域的中心,δ为邻域的半径。

容易看出,这两个集合实际上是一个开区间或不包括邻域中心的开区间。一般地,δ都很小,因此如果讨论问题是在这样的邻域中进行的话,意味着我们只关心点a及其附近点对应的函数性质。也就是说,当我们只关心函数的局部性质,譬如函数在点a是否具有极值这个局部性质时,就将要用到邻域概念。

3. 逻辑符号

符号“$\forall$”表示“任意一个”或“所有的”;

符号“$\exists$”表示“存在一个”或“至少有一个”.

譬如,$\forall x\in\mathbb{R}$,有$x^2\geqslant 0$;$\exists x\in\mathbb{R}$,使得$x^2+x-1=0$.这样,可以使我们的表述简洁化。

4. 其他符号

符号“max”和“min”分别表示“最大”和“最小”.譬如,$\max\{1,2,3\}=3$,$\min\{1,2,3\}=1$.

符号“$n!$”表示“所有不超过 n 的正整数的连乘积”,读作“n 的阶乘”,即

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 2\cdot 1,$$

规定:$0! = 1$.

符号“$n!!$”表示“不超过 n 且与 n 有相同奇偶性的所有正整数的连乘积”,读作“n 的双阶乘”,即

$$(2n)!! = 2n\cdot(2n-2)\cdot \cdots \cdot 6\cdot 4\cdot 2,$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot \cdots \cdot 5\cdot 3\cdot 1.$$

符号“$\sum$”和“$\prod$”分别表示“连加”和“连乘”,譬如

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$$

目　录

第1章

研究对象——函数关系与数学模型

在中学数学中,我们对于函数关系已经有了一定的了解.但作为高等数学研究的主要对象,还需要我们对函数关系有进一步较为深刻的认识.文科高等数学更注重数学在实际中的应用,为了使用数学解决实际问题,必须首先将实际问题转化为数学模型,而数学模型常常表现为函数关系.因此,作为全书的基础,这一章将在中学函数概念基础上,对于函数关系和数学模型进行回顾和适当的扩展.

1.1 函数关系的地位与作用

1.1.1 关系与函数关系

说到关系,人们在生产生活中处处可见.譬如,人与人之间有关系:同学关系、师生关系、上下级关系、敌对关系等.事物之间也有关系:长春位于东北地区——地理关系,文科高等数学以高中数学为基础——相依关系,贷款要支付利息——金钱关系.2 008能被2整除,这是数与数之间关系.直线与圆的相交、相离和相切,这是几何图形间的关系,等等.随便哪位同学都可以列举出几个这类我们处处都能碰到的关系的实例,因为我们的生活处处离不开这些关系.

譬如,贷款是要支付利息的,那么,如果你因买房或购车而不得不贷款20万,将要支付多少利息?每个月要还贷款,如果每个月要还银行3 000元,你能承受吗?如果承受不了,你就得增加贷款年限.假如你每个月的还贷能力只是1 500元,需要多少年才能还清?但有一点,如果你的年龄较大,人家是不会同意你任意增加贷款年限的……贷款是有学问的,贷款年限、方式、利息、还贷金额等都要你亲自算算.那么,要想算一算,就要给出那个"金钱关系"!

要想学好数学就要做题,因为做题量与成绩有关系.要是能够确定做题量与成绩的关系,那是很有用的.你能确定这个做题量与成绩的关系吗?

根据《中华人民共和国个人所得税法》的规定,个人工资、薪金所得应缴纳个

人所得税，而且收入越多，纳税额也就越大，因此收入额与纳税额有关系.要想知道自己应缴纳多少税额，需要知道这个收入额与纳税额的关系.你能确定这个关系吗？……

以上这些关系自然都是人们想确定的，因为它们一旦被确定下来，就可以利用它们解决我们的问题.但并非所有关系都能被完全确定下来的.一个实际问题中的未知量和已知量可能具有关系，但仅有关系还不够，还得有确定性的关系——制约关系，这才可能从已知量通过这个确定的关系得出未知量.譬如长方形的周长和面积有关系，但其周长与面积这两个变量没有直接的制约关系，除非另加制约条件.正方形的周长 l 与面积 S 两个变量就不仅有关系，而且具有确定性的制约关系

$$S=\left(\frac{l}{4}\right)^2,$$

其中变量 l 就可以制约变量 S，而且对于每一个给定的 l，通过这个确定的关系都有唯一确定的 S 与之对应.这时两个变量的关系就是我们所说的“函数”关系，其中的变量 l 与 S 分别称为这个函数关系的自变量和因变量.这个关系也常常被说成“S 是 l 的函数”，记作 $S=f(l)$.

这既是函数概念的直观性解释，也是一个人们生产和生活需要的确定性关系的准确刻画.其关键特征是，对每一个给定的 l，通过对应关系 f 都有唯一确定的 S 与之对应.

函数关系也称为所论实际问题的数学模型，建立这个函数关系也常常称之为建立其数学模型.

1.1.2 研究函数关系的方法

文科高等数学研究的主要对象仍然是函数，但高等数学研究函数是与中学数学研究函数有所区别的，这个区别主要体现在两个方面：其一是更注重其实际应用，因而其讨论的范围被拓展了；其二便是在研究方法上的区别，中学数学是以研究函数的静态性质为主，高等数学则更注重研究函数的动态性质.分别简述如下.

1. 更注重函数的实际应用——建立数学模型

不论学习什么知识，其最终目的只有一个，那就是应用它们解决实际问题，学习数学知识的目的也不该脱离这个主要目的.要想利用数学知识解决实际问题，首先就是建立问题的数学模型，否则用数学知识解决问题便是一纸空谈.那么怎样建立实际问题的数学模型？我们从最简单的实例说起.

实例1 选择什么样的服务计划

在现代社会，利用手机或传呼服务等通信方式进行沟通和联系是人人不可避免的事情. 为了招揽顾客，通信部门常常要推出一些优惠措施和计划，以供用户选择. 下面就是一个类似的实例[3].

某通信公司的广告提出，“为配合客户不同的需求，对于即时通话与自动数字传呼服务，我们设有如表所示优惠计划，以供阁下选择”.

项目 \ 计划	A	B
每月基本服务费	98 元	168 元
免费通话时间	首 60 分钟	首 500 分钟
以后每分钟收费	0.38 元	0.38 元
留言信箱服务	30 元	30 元

仔细观察即可见，两个计划的主要差别就在于：

(1) 每个月的基本服务费，计划 A 是 98 元，计划 B 是 168 元，前者比后者少了 70 元；

(2) 免费通话时间，后者比前者多了 440 分钟.

那么你怎样选择？从表面上看，对于此项服务使用比较多的客户会认为，选择计划 B 有较大的优惠，但稍微深入想一想，仍然觉得不是很有把握. 至少有以下两个问题需要解决：

① 究竟通话时间超过多少分钟，计划 B 才会较计划 A 更优？

② 如果你决定选择计划 B，最多可以比采用计划 A 节省多少？

要想解决这两个问题，我们看能否通过建立数学模型来说清楚.

假设 t(分钟)为通话时间，C(元)为所需付出的费用，则显然有函数关系：$C = f(t)$. 如果没有“免费通话时间”的优惠，并且不考虑“每月基本服务费”，两种计划均可以用 $C = 0.38t$ 表示. 在此基础上再来考虑优惠条件，并假设客户使用该服务都超过免费通话的时限，则对于计划 A 来说，就有

$$C = 0.38t - 0.38\times 60 + 98 = 0.38(t-60) + 98.$$

完全相同地有计划 B 的表达式为

$$C = 0.38(t-500) + 168.$$

当然，若未超过免费通话的时限，采用计划 A 的客户只需付出 98 元，而采用计划 B 的客户则要付出 168 元. 综上所述，我们就有两种计划的数学模型：

$$C_A = \begin{cases} 98, & 0 \leqslant t \leqslant 60, \\ 0.38(t-60)+98, & t > 60; \end{cases}$$

$$C_B=\begin{cases}168, & 0\leqslant t\leqslant 500,\\ 0.38(t-500)+168, & t>500.\end{cases}$$

有了上述数学模型,我们就可以来讨论解决我们的问题了.

要解决问题①,我们需要知道当客户用了多少通话时间,两个计划都能同时提供相同的优惠.当通话时间均为 $t=60$ 时,选择计划 A 的客户会比采用计划 B 的客户便宜 $70=168-98$;当通话时间均为 $t=500$ 时,选择计划 B 的客户较计划 A 的客户便宜量达 $97.2=[0.38(500-60)+98]-168$,其中,中括号内是计划 A 的客户使用了 500 分钟时所需要支付的费用,而此时的计划 B 客户只是付出 168 元.这正是问题②所要找的答案.

由此我们可以推断,问题①的答案应该介乎 $t=60\sim500$ 之间.那么,从以下的运算即可找到问题①的答案:

$$C=0.38(t-60)+98=168\Rightarrow t=244.21.$$

这就是说,如果客户可能使用该种服务的时间超过 244 分钟,便应该选择计划 B.以上讨论可以用相应的图像更加直观、清楚地去理解我们的做法的正确性,见图 1.1.

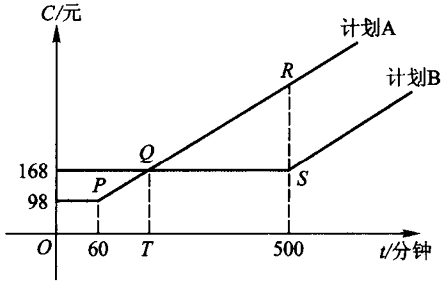

图 1.1

由图可见,当 $0\leqslant t\leqslant 60$ 时,计划 A 比计划 B 便宜 70 元;当使用时间超过 60 分钟后,两者的差别开始缩小;到了 Q 点,两者已经没有差别,即两种计划都给予相同的优惠;更明显地,当通话时间到达 Q 点后,比计划 B 便会明显地比较计划 A 优惠得多,而“RS”显示的正好是采用计划 B,最多比采用计划 A 所获得的便宜量:97 元多.

试想,假如没有数学模型,我们只能是盲目地进行选择,而一旦掌握了实际问题的数学模型,问题便迎刃而解.

实例2 穿高跟鞋的作用

从古至今,追求美是人类生活的永恒话题.美是一种感觉,本应没有什么客观的标准.但在自然界里,物体形状的比例却为我们提供了在匀称与协调方面的

一种美感的重要参考.反映在数学上,这个比例就是众所周知的“黄金分割”(golden section).关于黄金分割数的来历及其更多领域的应用请见第3章(差分方程模型).

如今,穿高跟鞋不再仅是女孩的专利.那么你知道为什么要穿高跟鞋?仅仅是为了提高“个头”?其实不然,很多个头稍矮的人,就是不穿高跟鞋看起来也是很匀称、协调而漂亮,而许多个头很高的人,即便穿上高跟鞋也未必使之看起来更匀称、协调.问题就产生在这个“匀称、协调”与否上.

据绘画大师达·芬奇的说法,在人体躯干(由脚底至肚脐的长度)与身高的比例上,肚脐是理想的黄金分割点.也就是说,这个比值越接近0.618,就越给人以一种美的感觉(详见附录1).很可惜,一般人的躯干与身高比都低于此数值,大约只有0.58~0.60.

设躯干长为 x,身高为 l.为了说明穿高跟鞋所产生的美的效应,我们针对一个原本躯干与身高之比 $x:l=0.60$ 的女士做些说明.若其所穿的高跟鞋高度为 d(单位与 x、l 相同),则新的比值为

$$\frac{x+d}{l+d}=\frac{0.6l+d}{l+d}.$$

如果该女士的身高为1.60 m,通过上面的模型即可计算出,高跟鞋是怎样改善她的匀称性和协调性的.

原来躯干与身高比值($x:l$)	身高 l/cm	高跟鞋高度 d/cm	穿了高跟鞋后的新比值 $(0.6l+d)/(l+d)$
0.60	160	2.54	0.606
0.60	160	5.08	0.612
0.60	160	7.54	0.618

通过数学模型可见,相信穿高跟鞋使得人们感觉更美确实是有数学根据的,而这个事实早在1519年就被达·芬奇发现.

我们仅从身边的生活中提出以上建立数学模型的两个实例,更多的实例见本章最后一节.但这已经足以说明我们在高等数学中研究函数——数学模型的原则:我们更注重函数的实际应用.当然,要想成功地应用数学解决实际问题,首先要学会建立数学模型的基本方法.我们将在本章第四节简单介绍建立数学模型的基本思路.

2. 更注重函数的动态性质

我们在中学研究函数大多是研究它的静态性质.但作为数学模型的函数是