成人自学高等数学

复习指南

李毓芳　杜虎才　编

新疆大学出版社

成 人 自 学

高等数学复习指南

李毓芳　　杜虎才　编

成 人 自 学

高 等 数 学 复 习 指 南

李毓芳　　杜虎才　编

新疆大学出版社出版发行
（乌鲁木齐市胜利路14号　邮编：830046）
新疆建工印刷厂印刷
787×1092毫米　1/32　280千字　10.375印张
1990年6月第1版　　1990年6月第1次印刷
印数：1—3 200册

ISBN7-5631-0141-1/G·75　定价：3.90元

序

本书的出版问世，是我厂成人自学教育事业发展的一大硕果。

编者以饱满的教学热情，深厚的数学功力，运用丰富的资料，积累了多方面的数学教学经验，在多年深入研究成人自学高等数学的基础上，在本书中简明扼要地阐述了掌握自学高等数学入门的技能和方法。以期引导广大自学成才者树立起打开自学高等数学之门的信心和勇气，启动自学者勇敢地去跨跃深奥莫测的高等数学的门栏，帮助自学者在刻苦攻克数学难关中从必然王国走向自由王国。为祖国的现代化建设勇于攀登数学的高峰。

本书内容精练，重点突出，解题思路、方法、技巧寓于例题分析之中；书中备有大量的自测题，便于自学者自我测试。该书向自学者、岗位培训、专业教育、成人大中专学习者推出了新的参考资料。

编者志立于数学教学，出自自觉的企业教育责任感和教育工作的使命感，作出了值得称道的努力。

1990年4月21日

前　　言

自学考试开考以来，为广大考生开辟了一条广阔的成才之路。但高等数学这门课却成了前进路上的一只拦路虎，使广大考生望而生畏。究其原因，主要有两个方面：一是考生数学基础差，学习不得要领。二是数学本身比较抽象，解题灵活、变化多端。这就使得自学者感到难得入门，渴望多有几本符合成人学习特点，便于自学的复习指导书。根据读者的这一需求，我们结合多年的教学实践，编写了这本书。

该书以中国人民大学出版社出版的《微积分》（修订本）为蓝本。并参考了电大、职大等成人院校的有关数学教材，博众家之长，按照《高等数学》(一)自学考试大纲的要求，对每章的重点内容都作了总结归纳，指出了解题的方法和步骤。对自学者将起着积极的指导作用。该书也可作为岗位培训、专业教育、成人大中专学员的学习参考资料。

书中备有一定数量的自测题和总复习题，便于自学者自我考核。

乌鲁木齐石油化工总厂厂长、总工程师袁名遂同志对本书的定稿出版给予了热情的指导和极大的支持，并写了序。

乌鲁木齐石油化工总厂的科学技术协会、总厂工会、教培中心等单位对该书的出版也给予了极大的支持和帮助。在此我们表示衷心的感谢！

编　者

1990年4月20日

目　　录

第一章　一元微分学

§1.1　预备知识

一　集合与对应

1　集合

（1）集合的概念及其表示法

1）集合：把具有某种属性的一些对象看做一个整体便形成一个集合.

2）集合元素的构成具有确定性和互异性.

确定性：对任一对象都能确定是否属于某一集合；

互异性：在同一集合中不能重复出现同一个元素.

3）集合的表示法：

1°　列举法：把集合的元素一一列举出来，写在大括号内.

2°　描述法：把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内.

3°　元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；元素 a 不属于 A 记作 $a\overline{\in} A$.

4°　不等式和区间，可以用来表示由实数构成的集合.

（2）子集：

1）如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$．任一集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

2）如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集．记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

3）如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么，集合 A 和集合 B 就叫做相等，记作 $A=B$。

4）不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$．空集是任何集合的子集．

（3）差集、交集与并集

1）差集：设有集合 A 和 B，属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\overline{\in} B\}$$

2）交集：由同时属于 A 和 B 的一切元素所组成的集合．叫做集合 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$.

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

对于任何集合 A，有

$$A\cap A=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

3）并集：由属于 A 或属于 B 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$.

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{或} x\in B\}.$$

对任何集合 A，有

$$A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A.$$

（4）全集与补集：

1）全集：在研究集合与集合之间的关系时，如果所有

集合都是某个给定集合的子集，那么这个给定集合叫做全集，记作 I．

2）补集：已知全集 I，$A\subseteq I$，由 I 中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A的补集（或叫余集），记作$\overline{A}$，即$\overline{A}=\{x\mid x\in I,\ x\overline{\in}A\}$．

2　对应

（1）单值对应：设两个集合A和B，如果按照某种对应关系，使A的任何一个元素，在B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应关系叫做集合A到集合B的单值对应或集合A到集合B的映射．

如果f是A到B的一个映射，那么，记作f：$A\to B$．

如果$a\in A$，$b\in B$，f使a映射到b，记作f：$a\to b$，或$b=f(a)$，其中b叫做a在映射f之下的象，a叫做b在映射f之下的原象，A叫做映射f的定义区域．

（2）一一对应：f是从集合A到集合B的单值对应，如果对于集合A的不同元素，在B中有不同的象，而且B中的每一个元素都有原象，这个单值对应就叫做从A到B的一一对应．

（3）逆对应：设f是从集合A到集合B的一一对应，如果对于B中的每一个元素b，使在A中的b的原象a和它对应，那么所得的对应叫做对应f的逆对应，记作f^{-1}，即f与f^{-1}互为逆对应．只有一一对应才研究它的逆对应．

例 1　设$I=\{0,1,2,3,4,5\}$，$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{0\}$

指出下列式子是否正确．

（1）$0\in A$；　（2）$\{0\}\in A$；　（3）$\{0\}\subset A$；

(4) $0 \subset C$；　(5) $B \subsetneqq A$；　(6) $\varnothing \in A$；

(7) $\varnothing \subset B$；　(8) $\varnothing = C$；　(9) $\overline{A} \in \overline{B}$；

(10) $C \subset \overline{B}$；　(11) $A \cup B = A$；　(12) $A \cap B = C$.

解　(1)正确；(2)不正确，应是 $\{0\} \subset A$；

(3)正确；(4)不正确，应是 $0 \in C$；

(5)正确；(6)不正确，应是 $\varnothing \subset A$；

(7)正确；(8)不正确，因为 $\varnothing$ 中不含任何元素，而 C 中含有元素 0；(9)不正确，应是 $\overline{A} \subset \overline{B}$；(10)正确；(11)正确；(12)不正确.

例2　设 I = {不大于10的非负整数}，$A = \{2, 5, 8\}$，$B = \{3, 4, 5, 9\}$，$C = \{0, 1, 6, 7\}$

求：$\overline{A}$；$\overline{A} \cup C$；$B \cap C$；$\overline{A} \cap \overline{B}$；$(A \cup B) \cap \overline{C}$.

解　∵ I = {不大于10的非负整数}

$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

∴　$\overline{A} = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$；

$\overline{B} = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 10\}$；

$\overline{C} = \{2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}$；

$\overline{A} \cup C = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\} = A$

$B \cap C = \varnothing$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{0, 1, 6, 7, 10\}$

又　$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$；

∴　$(A \cup B) \cap \overline{C} = \{2, 3, 4, 5, 8, 9\} \cap \{2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$

例 3 调查了某地区100个乡，其中70个乡小麦亩产量在250公斤以上，以集合 A 表示这些乡，40个乡棉花亩产量在60公斤以上，以集合 B 表示这些乡，小麦亩产量在250公斤以上而棉花亩产在60公斤以下的有55个乡，试用集合关系表示下列各类乡，并计算出各类型乡的数目：

（1）麦、棉两项亩产量均达到上述指标的乡；

（2）小麦亩产量未达到250公斤以上而棉花亩产量在60公斤以上的乡；

（3）麦、棉中至少有一项达到上述指标的乡；

（4）麦、棉两项均未达到上述指标的乡．

解 （1）麦、棉两项亩产量均达到上述指标的乡为 $A\cap B$，其乡数目为：

$$70-55=15$$

（2）小麦亩产量未达到250公斤以上，而棉花亩产量在60公斤以上的乡为 $B-A$，乡数目为：

$$40-15=25$$

（3）麦、棉中至少有一项达到上述指标的乡为 $A\cup B$．

乡数目为：$55+15+25=95$

或 $70+40-15=95$

（4）麦、棉两项均未达到上述指标的乡为（$\overline{A\cup B}$）

乡数目为：$100-95=5$

例 4 设 X 是平面上所有三角形的集合，Y 是所有圆的集合，它们之间存在着这样一种对应关系，即任何三角形都有它唯一确定的内切圆，因而在 X 和 Y 之间存在映射 f．

二 实数与数轴

实数可分为有理数和无理数．有理数是形如 q/p 这一类

的数，其中 p 和 q 为互质的整数，$p\neq 0$，有理数又可分为正、负整数，零以及分数。

将数轴上的所有点与全体实数建立一一对应，每一实数在数轴上对应一个点，数轴上每一点也对应一个实数。称有理数对应的点为有理点，无理数对应的点为无理点。

三　区间、邻域

区间是指界于某两个实数之间的全体实数，而那两个实数叫做区间的端点。区间可分为下面几种类型：

设　$a, b\in R$，且 $a<b$

1°　满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的开区间。记作 (a, b)，即

$$(a, b)=\{x\mid a<x<b\}$$

2°　满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 为所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的闭区间。记作 $[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

3°　满足不等式 $a<x\leqslant b$（或 $a\leqslant x<b$）的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的半开区间。记作 $(a, b]$，或 $[a, b)$，即

$$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

$$[a, b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

以上三类区间为有限区间，有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$，称为区间的长。

还有下面几类无限区间：

4°　$(a, +\infty)=\{x\mid a<x\}$

$[a, +\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$

5°　$(-\infty, b)\{x\mid x<b\}$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$$

6° $(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in R\}$，即全体实数的集合.

设 a 与 δ 是两个实数，对满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域，点 a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径。

在微积分中还常常用到集合

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, \ \delta>0\}$$

这是在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0，其余点组成的集合，即集合 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x+\delta)$.

四 运用充分条件、必要条件、充要条件表示命题的条件和结论之间的结构关系.

如果条件 A 具备，那么结论 B 成立，即 $A \Longrightarrow B$，这就是条件 A 是结论 B 成立的充分条件，也就是说为了使 B 成立，具备条件 A 就足够了.

如果 B 成立，那么 A 也成立，即 $B \Rightarrow A$，这就是条件 A 是结论 B 成立的必要条件，也就是说，要使 B 成立，就必须 A 成立，没有 A 成立，那么 B 一定不成立.

在判断解题时，首先要注意审题，弄清谁是条件，谁是结论，然后判别究竟是向哪一边推证才能成立，如有 A 推出 B，那么 A 是 B 成立的充分条件. 如有 B 推出 A，那么 A 是 B 成立的必要条件. 值得注意的是我们判断的仍然是 A 是 B 的什么条件，而不是考察 B 是 A 的什么条件.

若 $A \Rightarrow B$ 成立，又有 $B \Rightarrow A$ 成立，那么 A 是 B 成立的充分必要条件.

五　零点区分法

此方法是根据绝对值的概念和实数乘法运算的符号法则归纳总结出的一种判别方法。常用在解含有绝对值的方程、不等式以及讨论函数的性质等内容之中．举例如下：

例1　求适合$\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=5$的实数$x$．

解　原式为$\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-3)^2}=5$

即　　$|x+2|-|x-3|=5$

由　　$x+2=0$，得$x_1=-2$

由　　$x-3=0$，得$x_2=3$

∴有两个零点　$x_1=-2$，$x_2=3$

这两个零点把$(-\infty,+\infty)$分成三部分、$(-\infty,-2)$、$[-2,3]$、$(3,+\infty)$．而每一个一次式的值在它所对应的零点左方为负、右方为正．

因为当$x<-2$时，两个一次式$(x+2)$，$(x-3)$都在零点$x_1=-2$，$x_2=3$的左方取值．

所以　　$x+2<0$，　　$x-3<0$

则　　$|x+2|=-(x+2)$，　　$|x-3|=-(x-3)$

原方程为　$-(x+2)+(x-3)=5$

即　　$-5=5$，原式不能成立．

当$-2\leqslant x\leqslant 3$时　一次式$(x+2)$在零点$x_1=-2$的右方取值，所以$x+2>0$，一次式$(x-3)$在零点$x_2=3$的左方取值，所以$x-3<0$．

则　　$|x+2|=x+2$，　　$|x-3|=-(x-3)$

原式为　$(x+2)+(x-3)=5$

得　　$x=3$

当　$x>3$时，两个一次式$(x+2)$、$(x-3)$都在零点$x_1=-2$，　$x_2=3$　的右方取值

所以　　$x+2>0$，　$x-3>0$

则　　$|x+2|=x+2$，　　$|x-3|=x-3$

原式为　$(x+2)-(x-3)=5$

即　　$5=5$

$\therefore$　　$x>3$

根据以上讨论，当$x\geqslant3$时原等式成立。

例2　设$y=(x^2-1)(5x-1)$，问当x为何值时，(1)$y>0$，　(2)$y<0$

解　令$y=0$得零点

$$x_1=-1,\quad x_2=\frac{1}{5},\quad x_3=1$$

这三个点将$(-\infty,+\infty)$分成四个部分：

$$(-\infty,-1),\ (-1,\frac{1}{5}),\ (\frac{1}{5},1),\ (1,+\infty)$$

当$x\in(-\infty,-1)$时，三个因式都在三个零点的左方取值。

所以　　$x-1<0$，$x+1<0$，$5x-1<0$

则　　$y=(x-1)(x+1)(5x-1)<0$

当$x\in(-1,\frac{1}{5})$时，因式$(5x-1)$，$(x-1)$在零点$x_2=\frac{1}{5}$，$x_3=1$的左方取值．因式$(x+1)$在零点$x_1=-1$的右方取值。

所以　　$x+1>0$，$5x-1<0$，$x-1<0$

则 $y=(x+1)(5x-1)(x-1)>0$

当 $x\in(\frac{1}{5}, 1)$ 时，因式 $(x+1)$，$(5x-1)$ 都在零点 $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{5}$ 的右方取值，因式 $(x-1)$ 在零点 $x_3=1$ 的左方取值.

所以 $x+1>0$，$5x-1>0$，$x-1<0$

则 $y=(x+1)(5x-1)(x-1)<0$

当 $x\in(1, +\infty)$ 时，三个因式都在三个零点右方取值.

所以 $x+1>0$，$5x-1>0$，$x-1>0$

则 $y=(x+1)(5x-1)(x-1)>0$

所以 当 x 在区间 $(-1, \frac{1}{5})\cup(1, +\infty)$ 取值时 $y>0$

当 x 在区间 $(-\infty, -1)\cup(\frac{1}{5}, 1)$ 取值时，$y<0$.

§1.2 函数

函数是微积分学研究的主要对象，必须深刻理解函数的有关概念以及复合函数，初等函数的概念；掌握函数记号 $y=f(x)$ 的丰富含义；熟练地掌握基本初等函数的定义和特性；能正确地求出并能确切地表示函数的定义域；能熟练地分析复合函数的复合层次；掌握函数的简单性质；会求直接函数的反函数.

一 函数的概念

函数定义：在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对