

2008

全国硕士研究生入学考试用书

数学最后冲刺

解题思维定势与技巧

编著 陈文灯 陈启浩

(新)
魁

考研数学系列

新 华 出 版 社

013/410

:2

2007

2008

全国硕士研究生入学考试用书

数学最后冲刺

解题思维定势与技巧

编著 陈文灯 陈启浩

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学最后冲刺解题思维定势与技巧/陈文灯,陈启浩编著

北京:新华出版社,2007.10

全国硕士研究生入学考试用书

ISBN 978-7-5011-8136-0

I. 数… II. ①陈… ②陈… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 156423 号

数学最后冲刺解题思维定势与技巧

策 划:白云罩

责任编辑:韩 刚

装帧设计:金榜图文设计室

出版发行:新华出版社

网 址:<http://www.xinhupub.com> <http://press.xinhuanet.com>

地 址:北京石景山区京原路 8 号

邮 编:100040

经 销:新华书店

印 刷:北京云浩印刷有限责任公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:16.25

字 数:400 千字

版 次:2007 年 11 月第 1 版

印 次:2007 年 11 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5011-8136-0

定 价:30.00 元

本社购书热线:(010)63077122 中国新闻书店电话:(010)63072012

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换 电话:(010)82570560

前 言

针对考研数学试卷——大题量、大计算量,概念性、综合性强,技巧性高等特点,我们编写了“数学最后冲刺解题思维定势与技巧”一书。这是一本继复习完《数学复习指南》、《数学题型集粹与练习题集》之后,临考前可助同学们一臂之力,夺取高分的书。

本书特点:

(1)针对性、实用性强。将常考题型归纳成思维定势,使同学们遇到类似题型可快速找到解题突破口。

(2)方法巧妙,具有普遍性、规律性,易于掌握。变量替换、辅助函数作法是数学解题中的高难度、高技巧。通过我们的讲解可以化难为易,轻轻松松地掌握中值定理证明中以及不等式证明中辅助函数的作法。

(3)介绍许多快速解题型。数学要考高分,会做是不够的,还要求有速度。我们归纳总结了許多其他书所没有的方法和技巧,可以大大提高解题速度和减少失分率。

(4)精选了许多综合题。由于篇幅所限没有作分析,但同学们通过看详细解答过程完全可以达到触类旁通的境地。

作者:陈文灯,陈启浩

2007年10月

目 录

第一篇 高等数学串讲	(1)
第一讲 高等数学解题的五种思维定势	(1)
第二讲 快速解题型	(7)
第三讲 常用的变量替换	(35)
第四讲 辅助函数作法技巧综述	(50)
第五讲 函数方程的求解与不等式证明综述	(66)
第六讲 高等数学重点题型	(84)
第七讲 高等数学中的应用题	(105)
第二篇 线性代数串讲	(118)
第一讲 线性代数解题的七种思维定势	(118)
第二讲 快速解题型	(125)
第三讲 行列式	(147)
第四讲 矩 阵	(149)
第五讲 向量组的线性相关与线性无关	(154)
第六讲 线性方程组	(161)
第七讲 特征值与特征向量	(168)
第八讲 二次型	(173)
第三篇* 概率论与数理统计串讲	(175)
第一讲 概率论与数理统计解题的九种思维定势	(175)
第二讲 快速解题型	(183)
第三讲 事件的概率	(190)
第四讲 随机变量及其分布	(194)
第五讲 随机变量的数字特征	(204)
第六讲 大数定律与中心极限定理	(211)
第七讲 数理统计	(213)
第四篇 单项选择题解题方法	(219)
第五篇 综合题	(229)
第一讲 高等数学中的综合题	(229)
第二讲 线性代数中的综合题	(240)
第三讲* 概率论中的综合题	(244)
第四讲 高数与线性代数的综合题	(248)
第五讲* 高数与概率论的综合题	(251)
第六讲 线性代数与概率论的综合题	(254)

注:带*号对数二考生不要求

第一篇 高等数学串讲

第一讲 高等数学解题的五种思维定势

第一句话:在题设条件中给出一个函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导时,“不管三七二十一”,把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】 设 C 为实数,三阶可导函数 $f(x)$ 满足等式: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0$. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0.$$

【证明】 由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \xi_1 \in (x, x+1), \quad ①$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \xi_2 \in (x-1, x). \quad ②$$

$$① + ② \text{ 得, } f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1). \quad ③$$

$$① - ② \text{ 得, } 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2). \quad ④$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi_1 \rightarrow \infty, \xi_2 \rightarrow \infty$, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续的二阶导数, $f(0) = f(1) = 0$, 并且当 $x \in [0, 1]$ 时, $|f''(x)| \leq A$, 求证: $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0, 1]$.

【证明】 由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, 则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2, \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间.}$$

取 $x = 0, x_0 = x$, 则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1) \frac{(0 - x)^2}{2!}, 0 < \xi_1 < x \leq 1, \quad ①$$

取 $x = 1, x_0 = x$, 则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2) \cdot \frac{(1-x)^2}{2!}, 0 < x < \xi_2 < 1. \quad ②$$

$$② - ① \text{ 得 } f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\frac{f(0) = f(1) = 0}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

由 $|f''(x)| \leq A, x \in [0, 1]$, 得 $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}[x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1) \leq \frac{A}{2}$ (因为当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $2x^2 - 2x + 1 \leq 1$).

【例 3】 试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数, 且 $f(0) = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(\frac{1}{n}) - 1]$ 绝对收敛.

【证明】 因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(0) = 0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + o(x^2),$$

$$f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{f''(0)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}),$$

$$\text{故 } u_n = f(\frac{1}{n}) - 1 = \frac{f''(0)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}),$$

$$\text{从而 } |u_n| = \left| f(\frac{1}{n}) - 1 \right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2} (n \rightarrow \infty).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(\frac{1}{n}) - 1]$ 绝对收敛.

【例 4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 u 在区间 $[0, a]$ ($a > 0$) 上连续, 证明: $\frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt]$.

【证明】 令 $x_0 = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt$, 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geq 0$, 所以由上式得 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. 令 $x = u(t)$, 则

$$f[u(t)] \geq f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0].$$

上式两边在 $[0, a]$ 上对 t 积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^a f[u(t)] dt &\geq \int_0^a f(x_0) dt + \int_0^a f'(x_0)[u(t) - x_0] dt \\ &= af(x_0) + f'(x_0) \left[\int_0^a u(t) dt - ax_0 \right] = af(x_0). \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt].$$

第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时, 则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = f(2)$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

【证明】 $f(2) = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2 \times (1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta)$, $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足罗尔定理条件, 所以存在 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使得 $f'(\xi_1) = 0$. ①

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理条件, 于是存在 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使得 $f'(\xi_2) = 0$. ②

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

于是对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用罗尔定理, 证得存在 $\xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数, 且 $0 < a < b < 1$, 证明:

$$\int_0^a f(x)dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x)dx.$$

【证明】 由积分中值定理知

$$\int_0^a f(x)dx = af(\xi_1) \geq af(a), \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \xi_2 \in [a, b].$$

于是 $\frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx > \frac{1}{b} \int_a^b f(x)dx$.

即 $\int_0^a f(x)dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x)dx$.

【另证】 $\int_0^a f(x)dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x)dx \geq a \int_a^b f(x)dx$.

记 $F(x) = b \int_0^x f(t)dt - x \int_x^b f(t)dt$, 则 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上可导, 且

$$\begin{aligned} F'(x) &= bf(x) - \int_x^b f(t)dt + xf(x) \\ &= \int_x^b f(x)dt - \int_x^b f(t)dt + 2xf(x) \\ &= \int_x^b [f(x) - f(t)]dt + 2xf(x) \geq 0 \quad (\text{由于 } f(x) - f(t) \geq 0, f(x) \geq 0). \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调递增, 又 $F(0) = 0$, 故

$$F(a) > F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x)dx - a \int_a^b f(x)dx > 0. \text{ 由此证得 } \int_0^a f(x)dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x)dx.$$

第三句话: 在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $M =$

$\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证: $\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \leq M$.

【证明】 对于 $x \in [a, b]$ 有 $f(x) \xrightarrow{f(a)=0} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1)$, $a < \xi_1 < x$,

所以

$$|f(x)| = (x-a) |f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$$

同样由 $f(b) = 0$ 可得 $|f(x)| \leq (b-x)M$.

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4}M. \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4}M, \text{ 即 } \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【例 8】 已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证明】 由题设知存在 $c \in (0, a)$, 使得 $f(c) = \max_{0 \leq x \leq a} f(x)$, 于是由费马定理知 $f'(c) = 0$.

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别应用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), c < \xi_2 < a.$$

$$\text{于是} \quad |f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$$

$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

$$\text{故} \quad |f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$$

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0$, $f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证明】 由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数(图形上凸); 由凹函数性质知, $y = f(x) (x \in (a, b))$ 的图形位于连接 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 线段之上, 而此线段所在直线为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 由此可知, 存在点 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. 由拉格朗日中值定理知,

$$f(c) - f(a) = f'(\xi_1)(c-a), \text{ 即 } f'(\xi_1) = \frac{f(c)}{c-a}, \xi_1 \in (a, c),$$

$$f(b) - f(c) = f'(\xi_2)(b-c), \text{ 即 } f'(\xi_2) = -\frac{f(c)}{b-c}, \xi_2 \in (c, b).$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &> \frac{1}{f(c)} \int_a^b |f''(x)| dx > \frac{1}{f(c)} \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)| dx \\ &= -\frac{1}{f(c)} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x) dx = \frac{1}{f(c)} [f'(\xi_1) - f'(\xi_2)] \\ &= \frac{1}{f(c)} \left[\frac{f(c)}{c-a} + \frac{f(c)}{b-c} \right] = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} \\ &= \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} \geq (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}. \end{aligned}$$

第四句话: 对定限或变限积分, 若被积函数或其主要部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

(1) $F(y) = \int_0^y f(x-y)dx$, 求 $F'(y)$;

(2) $F(x) = \int_0^{x^2} tf(x-t)dt$, 求 $F'(x)$;

(3) $F(x) = \int_0^1 f(te^x)dt$, 求 $F'(x)$;

(4) $F(x) = \int_0^{x^2} xf(x+t)dt$, 求 $F'(x)$.

【解】(1) 由 $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u=x-y} \int_{-y}^0 f(u)du$ 得 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.

(2) 由 $F(x) \xrightarrow{\text{令 } u=x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du) = -x \int_x^{x-x^2} f(u)du + \int_x^{x-x^2} uf(u)du$ 得

$$F'(x) = -\int_x^{x-x^2} f(u)du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)] + (x-x^2)f(x-x^2)(1-2x) - xf(x)$$

$$= \int_{x-x^2}^x f(u)du + x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

(3) 由 $F(x) \xrightarrow{\text{令 } u=te^x} e^{-x} \int_0^{e^x} f(u)du$ 得

$$F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u)du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u)du.$$

(4) 由 $F(x) \xrightarrow{\text{令 } u=x+t} x \int_x^{x+x^2} f(u)du$ 得

$$F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u)du + x[f(x+x^2) \cdot (1+2x) - f(x)].$$

【例 11】设 $f(x)$ 二阶可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x)dt \xrightarrow{\text{令 } u=t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u)du$

$$= -\int_0^{-x} uf(u)du - x \int_0^{-x} f(u)du.$$

于是所给等式变为 $x = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{-x} uf(u)du - x \int_0^{-x} f(u)du.$

两边对 x 求导, 得 $1 = f(x) - (-x)f(-x) \cdot (-1) - \int_0^{-x} f(u)du - xf(-x) \cdot (-1).$

即 $1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u)du.$

上式两边对 x 求导, 得 $0 = f'(x) - f(-x) \cdot (-1),$

即 $f'(x) = -f(-x).$ ①

上式两边对 x 求导, 得 $f''(x) = f'(-x).$ ②

由 ①② 得 $f''(x) = -f(x)$, 即 $f''(x) + f(x) = 0.$

解此方程得 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 故 $f(x) = \cos x - \sin x.$

第五句话:在证明文字不等式时,“不管三七二十一”,将出现两次或两次以上的某个文字或数字改写成变量 x , 转化成函数不等式再说.

【例 12】 当 $e < a < b < e^2$ 时, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$ 成立.

【解】 将 b 改写成变量 x , 得到函数不等式:

$$\ln^2 x - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(x-a) \quad (a < x < e^2).$$

为此作辅助函数 $F(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x-a),$

则 $F(x)$ 在 $[a, e^2]$ 上可导, 且 $F'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}.$

显然 $F'(x)$ 在 $[a, e^2]$ 上可导, 且

$$F''(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2} < 0, F'(e^2) = 0.$$

所以 $F'(x) > 0 (x \in [a, e^2])$, 于是对于 $e < a < b < e^2$ 有

$$F(b) > F(a), \text{即 } \ln^2 b - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(b-a) > 0. \text{由此证得 } \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

【例 13】 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 则对任意 $a \in [0, 1]$ 有

$$\int_0^a g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \geq f(a) g(1).$$

【解】 将 a 改写成变量 t 得到函数不等式:

$$\int_0^t g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \geq f(t) g(1). \quad ①$$

为此作辅助函数

$$F(t) = \int_0^t g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx - f(t) g(1),$$

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且

$$F'(t) = g(t) f'(t) - f'(t) g(1) = f'(t) [g(t) - g(1)] \leq 0,$$

所以, 对于 $a \in [0, 1]$ 有 $F(a) \geq F(1)$, 即

$$\begin{aligned} & \int_0^a g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx - f(a) g(1) \\ & \geq \int_0^1 g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx - f(1) g(1) \\ & = \int_0^1 [f(x) g(x)]' dx - f(1) g(1) \\ & = f(1) g(1) - f(0) g(0) - f(1) g(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{由此证得 } \int_0^a g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \geq f(a) g(1).$$

第二讲 快速解题型

§ 1 函数极限运算中的快速解题型

一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式快速算法

【解题提示】 利用等价无穷代替可快速求得 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限. 下列等价无穷小是常用的: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$(1) \sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x;$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax (a \neq 0), 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

$$(2) \int_0^x \cos t dt \sim x, \int_0^x \sin t dt \sim \frac{1}{2}x^2, \int_0^x \tan t dt \sim \frac{1}{2}x^2, \int_0^x \arctan t dt \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$\int_0^x \arcsin t dt \sim \frac{1}{2}x^2, \int_0^x \ln(1+t) dt \sim \frac{1}{2}x^2, \int_0^x (e^t - 1) dt \sim \frac{1}{2}x^2.$$

注意: 乘除运算可用等价无穷小代替, 加减运算不宜使用.

【例 1】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \arctan 5x}{\ln(1+2x) \cdot \arcsin x}.$

【解】 原式 $\frac{\sin 3x \sim 3x, \arctan 5x \sim 5x}{\ln(1+2x) \sim 2x, \arcsin x \sim x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot 5x}{2x \cdot x} = \frac{15}{2}.$

【例 2】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x \arcsin t dt)^2}{\int_0^x \arctan t dt \cdot \int_0^x \sin t dt}.$

【解】 原式 $\frac{\int_0^x \arcsin t dt \sim \frac{x^2}{2}}{\int_0^x \arctan t dt \sim \frac{x^2}{2}, \int_0^x \sin t dt \sim \frac{x^2}{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{\frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2} = 1.$

【例 3】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{(\arcsin x)^3}.$

【解】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$, 分子中的 $\arcsin x$ 不能用其等价无穷小 x 代替.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

二、 1^∞ 型未定式快速算法

【解题提示】 设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim [1 + f(x)]^{g(x)}$ 是 1^∞ 型未定式.

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 + f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \ln[1 + f(x)]} \stackrel{\ln[1 + f(x)] \sim f(x)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) f(x)}$, 所以 1^∞ 型未定式的极限型是, 其底为 e , 其幂等于括号中 1 后的变量 $f(x)$ (包括符号) 与括号右上角的方幂 $g(x)$ 乘积的极限.

【例 4】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{2}{\tan x}}$.

【解】 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x) \cdot \frac{2}{\tan x} \stackrel{\sin x \sim x}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} (-x) \cdot \frac{2}{x} = -2$, 所以原极限 $= e^{-2}$.

【例 5】 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{x^2}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{x^2 + 3} \right)^{x^2} = e^{-6}$ (因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{6}{x^2 + 3} \right) x^2 = -6$)

【例 6】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$, 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x \cdot (1 + \sin x)} \cdot \frac{1}{x^3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{(1 + \sin x) \cos x} \right] = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故原极限 $= e^{\frac{1}{2}}$.

三、 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的快速算法

【解题提示】 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 若 $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) \text{ 中 } x \text{ 的最高次幂项}}{g(x) \text{ 中 } x \text{ 的最高次幂项}} \quad (\text{所谓“抓大头”法})$$

【例 7】 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(100x^{50} - 2x^2 + 5)}{\ln(2x^{10} + x^3 - 1)}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(100x^{50})}{\ln(2x^{10})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 100 + 50 \ln x}{\ln 2 + 10 \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{50 \ln x}{10 \ln x} = 5$.

【例 8】 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} [(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})]$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} - \frac{x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} (-2)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot (-2)}{8x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

§ 2 数列极限计算中的快速解题型

一、用夹逼定理来计算数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$

【解题提示】适当缩小、放大 $\sum_{k=1}^n x_k$, 使得 $y_n \leq \sum_{k=1}^n x_k \leq z_n (n = 1, 2, \dots)$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则由夹逼定理得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = A$.

【例 9】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

【解】由于

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n + \frac{1}{k}} < \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+1} (n = 1, 2, \dots).$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = 1 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi},$$

所以由夹逼定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

【例 10】设 $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} (n = 1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】对 x_n 作适当缩小与放大, 然后利用夹逼定理, 为此记

$$f_n(x) = \frac{1}{(n^x+1)^{\frac{1}{x}}},$$

则当 $x > 0$ 时,

$$f'_n(x) = f_n(x) \left[\frac{1}{x^2} \ln(n^x+1) - \frac{1}{x} \cdot \frac{n^x \ln n}{n^x+1} \right] > f_n(x) \left(\frac{1}{x^2} \ln n^x - \frac{1}{x} \ln n \right) = 0,$$

即 $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加, 所以 x_n 和式的各项中, 第一项 $\frac{1}{n+1}$ 最小, 第 n 项 $\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}$

最大, 因此有

$$\frac{n}{n+1} < x_n < \frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} (n = 1, 2, \dots),$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}}} = 1$, 所以由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

二、用单调有界定理计算由递推式定义的数列极限

【解题提示】 设数列 $\{x_n\}, x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n) (n = 0, 1, 2, \dots)$, 它的极限往往先用单调有界定理判别其存在性, 然后对递推式令 $n \rightarrow \infty$ 取极限得一个方程, 解此方程即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的值, 在判断 $\{x_n\}$ 的单调性时可使用以下结论:

将递推式中的 x_n 改为 x 得函数 $f(x)$, 如果 $f'(x) \geq 0$, 则当 $x_0 \geq x_1$ 时, $\{x_n\}$ 单调不减; 当 $x_0 \leq x_1$ 时, $\{x_n\}$ 单调不减.

【例 11】 设 $x_0 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} (n = 0, 1, 2, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 由题设知 $x_n > 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$, 所以 $\{x_n\}$ 有下界, 记

$$f(x) = \sqrt{6+x} (x > 0),$$

则 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0$, 此外, $x_0 = 10, x_1 = 4$, 即 $x_0 > x_1$, 所以 $\{x_n\}$ 单调减少. 因此由“单调减少有下界数列有极限”知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记为 a . 在递推式两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限得

$$a = \sqrt{6+a}, \text{解此方程得 } a = 3, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3.$$

【例 12】 设 $x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n} (n = 0, 1, 2, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 由题设知 $x_n > 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$, 此外

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2+x_n} < 2 (n = 0, 1, \dots),$$

所以 $\{x_n\}$ 有界(即既有下界, 也有上界).

记 $f(x) = \frac{2(1+x)}{2+x} (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{2}{(2+x)^2} > 0$, 此外

$$x_1 - x_0 = \frac{2(1+x_0)}{2+x_0} - x_0 = \frac{2-x_0^2}{2+x_0} \begin{cases} \geq 0, & 0 < x_0 \leq \sqrt{2}, \\ < 0, & x_0 > \sqrt{2}, \end{cases}$$

所以, 当 $x_0 \in (0, \sqrt{2}]$ 时, $x_0 \leq x_1$, 从而 $\{x_n\}$ 单调不减; 当 $x_0 \in (\sqrt{2}, +\infty)$ 时, $x_0 > x_1$, 从而 $\{x_0\}$ 单调减少.

于是, 对于 $x_0 > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记为 a , 在递推式两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限得 $a = \frac{2(1+a)}{2+a}$,

解此方程得 $a = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (不合题意, 舍去), 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

【例 13】 设 $F(x, y) = \frac{1}{2}f(y-x), F(1, y) = \frac{y^2}{2} - y + 5, x_0 > 0, x_{n+1} = F(x_n, 2x_n) (n = 0, 1, 2, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 先求数列 $\{x_n\}$ 的递推式.

由题设知 $\frac{1}{2}f(y-1) = \frac{y^2}{2} - y + 5 = \frac{1}{2}[(y-1)^2 + 9]$, 即 $f(u) = u^2 + 9$, 所以

$F(x, y) = \frac{1}{2x}f(y-x) = \frac{1}{2x}[(y-x)^2 + 9]$, 从而, 数列 $\{x_n\}$ 的递推式为

$$x_0 > 0, x_{n+1} = F(x_n, 2x_n) = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 9) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{9}{x_n}\right) (n = 0, 1, 2, \dots).$$

由递推式可知, $x_{n+1} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{9}{x_n}} = 3 (n = 0, 1, 2, \dots)$.

记 $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{x}\right) (x \geq 3)$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 9}{2x^2} \geq 0$,

此外, $x_2 - x_1 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{9}{x_1}\right) - x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{x_1} - x_1\right) = \frac{9 - x_1^2}{2x_1} \leq 0$. 因此 $\{x_n\}$ 单调不增, 有下界, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记值为 a , 对递推式两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限得

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{9}{a}\right), \text{ 即 } a = 3, -3 (\text{不合题意, 舍去}), \text{ 所以, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3.$$

§ 3 导数运算中的快速解题型

一、利用导数的定义求极限

【解题提示】 导数的定义:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ 或 } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

设 $f'(x_0)$ 存在, 如果分子的“被减式”的对应符号内的式子减去“减式”的对应符号内的式子恰等于分母, 则极限就等于 $f'(x_0)$; 如果以上条件不满足, 则凑分母使之满足. 例如: 设 $f'(x_0)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = x_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[\varphi(x)] - f(x_0)}{\varphi(x) - x_0} = f'(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[\varphi(x)] - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[\varphi(x)] - f(x_0)}{\varphi(x) - x_0} \cdot \frac{\varphi(x) - x_0}{x - x_0} = f'(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - x_0}{x - x_0}.$$

【例 14】 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 + h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0) - f(x_0 + x)} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (设 } f'(x_0) \neq 0 \text{)}.$$

【解】 (1) 原式 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 + h)}{-2h} \cdot (-2) = -2f'(x_0)$;

$$(2) \text{ 原式 } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

【例 15】 设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 令 $F(x) = f[\varphi(x)]$,

求 $F'(0)$.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】 } F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3 \cos \frac{1}{x}) - f(0)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3 \cos \frac{1}{x}) - f(0)}{x^3 \cos \frac{1}{x}} \cdot \frac{x^3 \cos \frac{1}{x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3 \cos \frac{1}{x}) - f(0)}{x^3 \cos \frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos \frac{1}{x}) = f'(0) \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

【例 16】 设函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在, 求极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

【解】 当 $h \rightarrow 0$ 时, $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \rightarrow 0$, 且分子、分母(视为 h 的函数)都有导数, 又注意到分母的导数 $2h \neq 0 (h \rightarrow 0, \text{但 } h \neq 0)$, 故由洛必达法则得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = f''(x).$$

【注意】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = f''(x)$ 是由导数快算法得到的, 而不是由洛必达法则得到的.

二、利用导数定义求函数的某点处的导数

【解题提示】 要计算函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的导数时, 有时利用导数定义可以快速地求得.

【例 17】 求下列函数在指定点处的导数:

(1) 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$, 求 $f'(-2)$;

(2) 设 $f(x) = \varphi(a+bx) - \varphi(a-bx)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 求 $f'(0)$.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】 } (1) f'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+100)}{x+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} x(x+1)(x+3)\cdots(x+100) = 2 \cdot 98!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+bx) - \varphi(a-bx)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(a+bx) - \varphi(a-bx)}{2bx} \cdot 2b = 2b\varphi'(a).
 \end{aligned}$$

三、由同一中间变量构成的复合函数的微分法

【解题提示】 令该中间变量为 u , 然后用复合函数求导的连锁法则求导.

【例 18】 求下列函数的导数:

$$(1) y = \frac{1}{2} \arctan \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$$