

普通高中新课程

高考复习指导丛书

2008年山东省高考第一轮复习使用

数学

山东省
教学研究室 编

Mathematics

[理科]

山东教育出版社

普通高中新课程

高考复习指导丛书

2008年山东省高考第一轮复习使用

数学

山东省
教学研究室 编

[理科]

山东教育出版社

普通高中新课程高考复习指导丛书

数 学 (理科)

山东省教学研究室 编

主 管: 山东出版集团

出版者: 山东教育出版社

(济南市纬一路321号 邮编:250001)

电 话: (0531)82092663 传真: (0531)82092661

网 址: <http://www.sjs.com.cn>

发行者: 山东教育出版社

印 刷: 山东新华印刷厂

版 次: 2007年9月第2版第2次印刷

规 格: 880mm×1230mm 16开本

印 张: 24.75印张

字 数: 812千字

书 号: ISBN 978-7-5328-5595-7

定 价: 33.00元

(如印装质量有问题,请与印刷厂联系调换)

前言

普通高中新课程开始实施以来,新课程下的高考问题备受社会瞩目。2007 年的高考已经结束。我省高考试题依据《2007 年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)考试说明》(以下简称《考试说明》)的命题要求,在考试内容和形式上进行了改革,体现了新课程理念,较好地发挥了高考试题的选拔功能以及对高中教学的反拨作用。

根据省教育厅的统一安排,省教学研究室于 2007 年组织我省高考方案研制组的专家、部分优秀教研员和高中教师编写了这套《普通高中新课程高考复习指导》丛书,对于正确引领高中学校实施新课程和 2007 年高考学生复习备考发挥了重要的作用,受到广大师生的欢迎。为了帮助高中学校师生进一步深入理解《考试说明》,正确分析 2007 年高考试题的特点,有针对性地做好 2008 年高考复习备考工作,本书编委会重新组织有关专家、优秀教师和教研人员对本丛书进行了修订。

该丛书以《考试说明》为编写依据,贯彻落实高中新课程方案和各科课程标准,分析 2007 年我省高考试题特点和今后考试趋向;结合高中新课程教学实际,帮助考生梳理教学内容,准确把握 2008 年考试内容和要求;通过“解题指导”、“案例点评”、“复习建议”等栏目,引领考生复习备考策略;提供典型案例和模拟试题,帮助考生进行高考适应性训练。

丛书文字简明,体现《考试说明》的指导思想,突出学科教学特点,案例有针对性和典型性,反映教学和复习备考的实际需要,力求为参加 2008 年高考的考生奉献一套高质量的复习指导读物。

本丛书包括语文、数学(文、理)、英语、思想政治、历史、地理、物理、化学、生物 10 个分册,英语分册配有听力光盘。基本能力测试不编写复习指导用书。欢迎广大师生在使用中提出改进意见。

编者

2007 年 7 月

普通高中新课程高考复习指导丛书

编 委

主 编 王景华

副主编 戴培良 尚志平 胡振华 高洪德

编 委 (以姓氏笔画为序)

王怀兴 孔令鹏 厉复东 宋树杰

杜德昌 张可柱 周家亮 姜建春

韩际清

目 录

第 1 单元 集 合	(1)	第 6 单元 数 列	(89)
第 1 节 集合、集合间的基本关系	(1)	第 1 节 数列的概念	(89)
第 2 节 集合的基本运算	(3)	第 2 节 等差数列	(93)
单元达标	(6)	第 3 节 等比数列	(96)
第 2 单元 常用逻辑用语	(7)	第 4 节 数列应用题	(99)
第 1 节 命题及其关系	(7)	单元达标	(103)
第 2 节 充分条件与必要条件	(10)	第 7 单元 基本初等函数 II (三角函数)	(105)
第 3 节 简单的逻辑联结词	(13)	第 1 节 任意角的概念与弧度制	(105)
第 4 节 全称量词和存在量词	(15)	第 2 节 三角函数的定义及单位圆中的三角函数线	(107)
单元达标	(17)	第 3 节 同角三角函数的基本关系式、诱导公式	(110)
第 3 单元 函数概念与基本初等函数 I	(19)	第 4 节 三角函数的图象	(112)
第 1 节 函数的概念	(19)	第 5 节 三角函数的性质	(115)
第 2 节 函数的单调性与最大(小)值	(22)	第 6 节 已知三角函数值求角	(117)
第 3 节 函数的奇偶性	(25)	第 7 节 和角公式	(120)
第 4 节 函数的图象	(28)	第 8 节 倍角与半角、积化和差与和差化积公式	(123)
单元达标(一)	(33)	第 9 节 解三角形	(126)
第 5 节 根式、指数式、对数式	(34)	第 10 节 解三角形的应用	(129)
第 6 节 指数函数、对数函数	(37)	单元达标	(131)
第 7 节 幂函数	(40)	第 8 单元 平面向量	(133)
单元达标(二)	(43)	第 1 节 向量的线性运算	(133)
第 8 节 函数与方程	(45)	第 2 节 向量的分解与向量的坐标运算	(136)
第 9 节 函数模型及其应用	(48)	第 3 节 平面向量的数量积	(139)
单元达标(三)	(51)	第 4 节 向量的应用	(142)
第 4 单元 不等式	(53)	单元达标	(145)
第 1 节 不等关系与不等式	(53)	第 9 单元 立体几何	(147)
第 2 节 一元二次不等式及其解法	(55)	第 1 节 空间几何体	(147)
第 3 节 二元一次不等式(组)与平面区域	(60)	单元达标(一)	(151)
第 4 节 简单的线性规划问题	(64)	第 2 节 点、直线、平面之间的位置关系	(153)
第 5 节 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$	(68)	单元达标(二)	(160)
单元达标	(71)	第 3 节 空间向量与立体几何	(162)
第 5 单元 导数及其应用	(73)	单元达标(三)	(169)
第 1 节 导数的概念及其运算	(73)	第 10 单元 推理与证明	(172)
第 2 节 函数的单调性与导数	(77)	第 1 节 合情推理与演绎推理	(172)
第 3 节 函数的极值、最值及优化问题	(80)		
第 4 节 定积分、微积分基本定理及简单应用	(83)		

第2节 直接证明与间接证明	(175)	第4节 离散型随机变量及其分布列	(240)
第3节 数学归纳法	(178)	第5节 二项分布及其应用	(243)
单元达标	(181)	第6节 离散型随机变量的均值、方差及正态分布	(246)
第11单元 解析几何	(183)	单元达标(二)	(250)
第1节 直线与方程	(183)	第14单元 统计	(253)
第2节 圆与方程	(187)	第1节 随机抽样	(253)
第3节 直线与圆的位置关系	(190)	第2节 总体估计	(256)
第4节 空间直角坐标系	(193)	第3节 变量的相关性	(262)
单元达标(一)	(195)	单元达标(一)	(265)
第5节 椭圆	(196)	第4节 统计案例	(267)
第6节 双曲线	(201)	单元达标(二)	(271)
第7节 抛物线	(204)	第15单元 复数	(274)
第8节 直线与圆锥曲线的位置关系	(209)	第1节 数系的扩充和复数的概念	(274)
第9节 曲线与方程	(213)	第2节 复数代数形式的四则运算	(276)
单元达标(二)	(217)	单元达标	(279)
第12单元 计数原理	(219)	第16单元 算法	(281)
第1节 分类加法计数原理、分步乘法计数原理	(219)	第1节 算法与程序框图	(281)
第2节 排列与组合	(221)	第2节 基本算法语句	(287)
第3节 二项式定理	(225)	第3节 算法规则	(293)
单元达标	(227)	单元达标	(296)
第13单元 概 率	(230)	2008年高考数学模拟试题(一)	(300)
第1节 事件与概率	(230)	2008年高考数学模拟试题(二)	(303)
第2节 古典概型	(233)	2008年高考数学模拟试题(三)	(306)
第3节 随机数与几何概型	(236)	后 记	(309)
单元达标(一)	(239)	参 考 答 案	

第 1 单元

集合

第 1 节 集合、集合间的基本关系

目标要求

1. 集合的含义与表示

(1) 了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系。

(2) 能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题。

2. 集合间的基本关系

(1) 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集。

(2) 在具体情境中,了解全集与空集的含义。

考点诠释

1. 考点归纳解析

(1) 集合的概念

一般地,我们把研究对象统称为元素,如 1~20 以内的所有质数,包括 2,3,5,7,11,13,17,19,则 13 是我们所要研究的对象,它是其中的一个元素,把一些元素组成的总体叫做集合,如上述 2,3,5,7,11,13,17,19 就组成了一个集合。

元素与集合的关系有且仅有两种:属于(用符号“ $\in$ ”表示)和不属于(用符号“ $\notin$ ”表示)。如 $a \in A$, $a \notin B$ 等。

(2) 集合中元素的特征

① 确定性:作为一个集合的元素,必须是确定的。这就是说不确定的对象就不能构成集合。

② 互异性:对于一个给定的集合,集合中的元素一定是不同的(或说是互异的),即集合中的任何两个元素都是不同的对象,相同的对象归入同一集合时只能算作集合的一个元素。

③ 无序性:组成集合的元素没有次序,如集合 {1,2,3} 和 {3,2,1} 等表示同一个集合。

(3) 集合的分类

集合可根据它含有的元素个数的多少分为两类:

有限集:

含有有限个元素的集合。

无限集:含有无限个元素的集合。

特别地,我们把不含有任何元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$ 。空集归入有限集。

(4) 子集的概念是由讨论集合与集合间的关系引出的。两个集合 A 与 B 之间的关系如下:

$$\begin{cases} A \subseteq B & \begin{cases} A=B \Rightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A; \\ A \neq B \Rightarrow A \subsetneq B; \\ A \subsetneq B. \end{cases} \end{cases}$$

其中记号 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$) 表示集合 A 不包含于集合 B (或集合 B 不包含集合 A)。

(5) 子集具有的性质

① $A \subseteq A$, 即任何一个集合都是它本身的子集。

② 如果 $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, 那么 $A=B$ 。

③ 如果 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$ 。

④ 如果 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$ 。

(6) 包含的定义也可以表述成:如果由任一 $x \in A$, 可以推出 $x \in B$, 那么 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$)。

不包含的定义也可以表述:成对的两个集合 A 与 B , 如果集合 A 中存在至少一个元素不是集合 B 的元素, 那么 $A \not\subseteq B$ (或 $B \not\supseteq A$)。

(7) 有限集合的子集个数

① n 个元素的集合有 2^n 个子集。

② n 个元素的集合有 $2^n - 1$ 个真子集。

③ n 个元素的集合有 $2^n - 1$ 个非空子集。

④ n 个元素的集合有 $2^n - 2$ 个非空真子集。

2. 疑难点突破

(1) 准确理解集合的概念是解答集合问题的前提,特别是集合中元素的三要素。对于用描述法表示的集合,要紧紧抓住代表元素以及它所具有的性质。

如集合 $A = \{(x, y) | y = x^2 + 1\}$, $B = \{x | y = x^2 + 1\}$, $C = \{y | y = x^2 + 1\}$, 这是三个不同的集合, A 表示点集, B, C 表示函数 $y = x^2 + 1$ 的定义域和值域, 是数集. 认清集合元素是突破解题难点的关键所在.

(2) 两个集合相等, 主要是两个集合的元素相同, 不考虑元素的顺序, 但不能违背集合元素的互异性.

(3) 元素和集合的从属关系 (" $\in$ " 属于, " $\notin$ " 不属于); 集合与集合之间的包含关系, 如: $P \in A$ 与 $P \subseteq A$ 意义是不同的, 注意弄清 $A \subseteq B$ 与 $A \subset B$, $A \subseteq B$ 与 $A = B$ 的关系与区别.

(4) 集合 $\{\emptyset\}$ 与空集 $\emptyset$ 的区别和联系: $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \not\subseteq \{\emptyset\}$.

命题题題

集合是数学中最基本的概念, 集合语言是现代数学的基本语言, 是每年高考必考内容. 关于集合的概念和关系的考查, 常为具体的或抽象的集合关系的判断, 以及集合语言和集合思想的运用, 也就是把集合作为工具来考查.

这类题目一般是容易题, 题型为选择题或填空题, 考查集合的基础知识, 主要应用一些基本的概念和定义进行推断分析.

范例精析

例 1 设集合 $A = \{a | a = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}^*\}$, 集合 $B = \{b | b = k^2 - 4k + 5, k \in \mathbb{N}^*\}$, 若 $a \in A$, 试判断 a 与集合 B 的关系及集合 A 与 B 的关系.

解答 $\because a \in A, \therefore a = n_0^2 + 1 (n_0 \in \mathbb{N}^*)$.
 $n_0^2 + 1 = n_0^2 + 4n_0 + 4 - 4(n_0 + 2) + 5 = (n_0 + 2)^2 - 4(n_0 + 2) + 5$.

设 $n_0 + 2 = k_0$, 则 $k_0 \in \mathbb{N}^*$,

$\therefore a = k_0^2 - 4k_0 + 5 (k_0 \in \mathbb{N}^*)$.

$\therefore a \in B$.

又 $1 \in B$, 但 $1 \notin A$,

$\therefore A \subsetneq B$.

评析 判断一个元素是否属于一个集合, 首先要看该元素是否具有该集合中元素的共同特征. 本题集合 B 中元素的共同特征是: 所有元素都有 $k^2 - 4k + 5 (k \in \mathbb{N}^*)$ 的形式. 判断两个集合间的关系要转化为分析其中一个集合中的元素与另一个集合的关系.

本题也可先将集合 B 化为 $\{b | b = (k-2)^2 + 1, k \in \mathbb{N}^*\} = \{b | b = m^2 + 1, m \in \mathbb{N}\}$ 后与 A 对照解答, 或者用列举法表示为 $A = \{2, 5, 10, 15, 26, \dots\}$, $B = \{1, 2, 5, 10, 15, 26, \dots\}$, 然后比较得出 A 与 B 的关系.

例 2 用适当的方法表示下列集合:

(1) 被 3 除余 1 的自然数组成的集合;

(2) 由所有小于 20 的既是奇数又是质数的正

整数组成的集合;

(3) 平面直角坐标系中, 直线 $y = x$ 上的所有点组成的集合;

(4) 设 a, b 是非零实数, 求 $y = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} +$

$\frac{ab}{|ab|}$ 的所有值组成的集合.

解答 (1) $\{x | x = 3n + 1, n \in \mathbb{N}\}$;

(2) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$;

(3) $\{(x, y) | y = x\}$;

(4) $\{-1, 3\}$.

评析 一般情况下, 对元素较少的有限集宜采用列举法, 如 (2) (4); 对无限集或元素较多的有限集宜采用描述法, 如 (1) (3).

例 3 已知集合 $M = \{x | x^2 + x - 6 < 0\}$, $N = \{x | ax = 1\}$, 若 $N \subseteq M$, 求 a 的取值范围.

解答 $M = \{x | -3 < x < 2\}$.

若 $a = 0$, 则 $N = \emptyset$, 此时 $N \subseteq M$ 成立;

若 $a \neq 0$, 则 $N = \{\frac{1}{a}\}$. $\because N \subseteq M, \therefore -3 < \frac{1}{a} < 2$.

$\therefore a > \frac{1}{2}$ 或 $a < -\frac{1}{3}$.

综上, 符合题意的 a 的取值范围是 $\{a | a < -\frac{1}{3} \text{ 或 } a = 0 \text{ 或 } a > \frac{1}{2}\}$.

评析 求解 $ax = 1$ 中 x 的值, 需讨论 a 是否为零. 当 $a = 0$ 时, 集合 N 为 $\emptyset$, 这是容易忽视的情形. 因此, 解决有关子集问题时, 要先考虑 $\emptyset$ 的存在与否.

闯关演练

一、选择题

1. 下列关系中正确的是 ().

(A) $0 \in \{(0, 1)\}$ (B) $1 \in \{(0, 1)\}$

(C) $0 \in \mathbb{N}$ (D) $0 \in \mathbb{N}^*$

2. 以下集合 A 与 B 中, 是不同的集合的是 ().

(A) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 2, 1\}$

(B) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} | n \leq 4\}$

(C) $A = \{1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$

(D) $A = \{1, -1\}$, $B = \{x | x = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$

3. 已知 $x \in \{1, 2, x^2\}$, 则 ().

(A) $x = 1$ (B) $x = 1$ 或 2

(C) $x = 0$ 或 2 (D) $x = 0$ 或 1 或 2

4. 设集合 $A = \{x | x = \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}\}$, 若 $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, 则必有 ().

(A) $x_1 + x_2 \in A$ (B) $x_1 \cdot x_2 \in A$

(C) $x_1 - x_2 \in A$ (D) $\frac{x_1}{x_2} \in A$

5. 已知集合 $A \subseteq \{2, 3, 7\}$, 且 A 中至多有一个

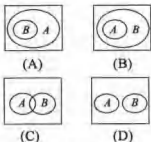
奇数,则这样的集合 A 有().

- (A) 3个 (B) 4个
(C) 5个 (D) 6个

6. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x | x = a \cdot b, a, b \in A\}$, 则 B 的子集的个数是().

- (A) 32 (B) 16
(C) 8 (D) 4

7. 设集合 $A = \{x | x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$, 则下列图中能表示 A, B 关系的是().



第7题图

8. 设集合 $P = \{x | x \leq 2\}$, $Q = \{x | x^2 - 2x + a < 0\}$, 且 $Q \subseteq P$, 则实数 a 的取值范围是().

- (A) $a > 0$ (B) $a \geq 0$
(C) $a \leq 1$ (D) $0 \leq a \leq 1$

9. 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则().

- (A) $M = N$ (B) $M \subseteq N$
(C) $M \supseteq N$ (D) $M \cap N = \emptyset$

(10) 已知集合 $M = \{x | -2 \leq x \leq a\}$ 是非空集合, 集合 $P = \{y | y = 2x + 3, x \in M\}$, 集合 $T = \{z | z$

$= x^2, x \in M\}$, 若 $T \subseteq P$, 则实数 a 的取值范围是().

- (A) $\frac{1}{2} \leq a \leq 3$ (B) $-2 < a \leq 3$
(C) $2 \leq a \leq 3$ (D) $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$

二、填空题

11. (2005 年上海) 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m - 1\}$, 集合 $B = \{3, m^2\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$.

12. 数集 $\{2a, a^2 - a\}$ 中, a 的取值范围是 .

13. 集合 $\left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{3}, \frac{27}{4}, \frac{81}{5}, \frac{243}{6}\right\}$ 用描述法可表示为 .

14. 集合 $M = \{x | x = 3m - 2, m \in \mathbf{Z}\}$, $P = \{y | y = 3m + 1, m \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{z | z = 6m + 1, m \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 M, P, Q 的关系是 .

三、解答题

15. 已知集合 $M = \{2, a, b\}$, $N = \{2a, b^2, 2\}$, 若 $M = N$, 求实数 a, b 的值.

16. 设集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

17. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 3x - 4 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

18. 设 S 为满足下列条件的实数构成的集合.

① S 内不含 1;

② 若 $a \in S$, 则 $\frac{1}{1-a} \in S$.

解答下列问题:

(1) 若 $2 \in S$, 则 S 必有其他两个元素, 求出这两个元素;

(2) 求证: 若 $a \in S$, 则 $1 - \frac{1}{a} \in S$;

(3) 在集合 S 中元素的个数能否只有一个? 为什么?

第2节 集合的基本运算

目标要求

1. 理解两个集合的并集与交集的含义, 会求两个简单集合的并集与交集.

2. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,

会求给定子集的补集.

3. 能使用韦恩(Venn)图表达集合的关系及运算.

考点诠释

1. 考点归纳解析

(1) 用定义求两个集合的交集与并集时,要注意“或”、“且”的意义。“或”是两者皆可的意思,“且”是两者都有的意思,在使用时不要混淆。

(2) 用韦恩图表示交集与并集

已知集合 A 与 B , 用阴影部分表示 $A \cap B, A \cup B$, 如图所示:

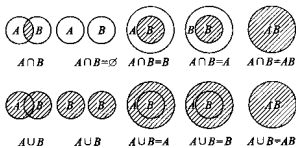


图 1.2-1

(3) 关于交集、并集的有关性质及结论

① $A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = (B \cap A) \subseteq A$ (或 B);

$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = (B \cup A) \supseteq A$ (或 B);

② $A \cap (\complement_U A) = \emptyset; A \cup (\complement_U A) = U$.

③ 摩根定律: $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B); (\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U (A \cap B)$.

④ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

(4) 全集与补集

它们是相互依存不可分离的两个概念,把我们研究的各个集合的全部元素看成是一个集合,则称之为全集,而补集则是在 $A \subseteq S$ 时,由所有不属于 A 但属于 S 的元素组成的集合,记作 $\complement_S A$. 数学表达式:若 $A \subseteq S$,则 S 中子集 A 的补集为 $\complement_S A = \{x | x \in S \text{ 且 } x \notin A\}$.

(5) 补集与全集的性质

① $\complement_U (\complement_U A) = A$.

② $A \subseteq U, \complement_U A \subseteq U$.

③ $\complement_U U = \emptyset, \complement_U \emptyset = U$.

2. 疑难点突破

(1) 对于集合问题,要确定属于哪一类集合(数集、点集或图形集),然后再确定处理此类问题的方法。

(2) 关于集合的运算,一般应把参与运算的集合化到最简形式,再进行运算。

(3) 含参数的集合问题,多根据集合中元素的互异性处理,有时需要用到分类讨论、数形结合的思想。

(4) 集合问题多与函数、方程、不等式有关,要注意各类知识的融会贯通。

命题题组

集合的运算是考查集合内容的重点,考查时以选择题为主,一般难度不大,其热点有三:一是考查具体的集合关系的判断和集合的运算;二是考查抽象的集合关系的判断和运算;三是考查集合语言和集合思想的运用,也就是把集合作为工具来考查。

1. 考查集合间基本运算的命题

这类题目一般为中档题,或者穿插在某个解答题里面,主要涉及集合的相等、子集、交集、并集的基本运算,也是考试说明对本专题知识要求的重点。

(1) 子集与真子集的区别与联系:集合 A 的真子集一定是其子集,而集合 A 的子集不一定是其真子集;若集合 A 有 n 个元素,则其子集个数为 2^n ,真子集个数为 $2^n - 1$.

(2) 全集是一个相对概念,一个全集又可以是另一个集合的子集或真子集,是我们为研究集合关系临时选定的一个集合。

(3) 补集(余集)与集合 A 的区别:两者元素没有相同的;两者的所有元素合在一起,就是全集。

2. 考查集合运算与其他知识交汇的题目

这类题目一般为中档或高档题,综合性很强,一般是以集合为载体,结合其他知识共同组成一个题目,要求熟练掌握集合的运算关系,并能与其他知识灵活转化。

(1) 若集合表示点集,在分析集合的运算关系时,可以转化为集合表示的图形,根据“数形结合”的思想方法求解。

(2) 集合作为工具,渗透在其他知识点里面时,需认真分析其他知识,而集合仅是一种载体。

(3) 此类题目难度较大,对集合的考查不是很难,关键是其他方面的知识点的问题,需认真分析,等价转化。

范例分析



(1) (2006 年上海春考卷)若集合 $A = \{y | y = x^2, -1 \leq x \leq 1\}, B = \{y | y = 2 - \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}$, 则 $A \cap B$ 等于().

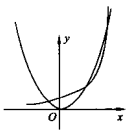
(A) $(-\infty, 1]$

(B) $[-1, 1]$

(C) $\emptyset$

(D) $\{1\}$

(2) 若集合 $A = \{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbb{R}\}, B = \{(x, y) | y = 2x, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A \cap B$ 的元素



例 1(2)图

的个数为().

(A) 1个

(B) 2个

(C) 3个

(D) 无数个

解析 (1) $\because$ 函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[-1,1]$ 上递增, $\therefore A=[-1,1]$. 又函数 $y=2-\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上递增, $\therefore B=(-\infty,1]$.

$\therefore A \cap B = [-1,1]$, 选 B.

(2) 作出函数 $y=x^2$ 与 $y=2^x$ 的图象, 根据图象可知, 两函数图象有 3 个交点, $\therefore A \cap B$ 中有 3 个元素, 选 C.

评析 求解集合的运算问题, 要先看清楚集合中元素的特征. 在(1)中, 集合的元素是函数值; 在(2)中, 集合的元素是点, 两者有本质不同.

例 2 已知集合 $A=\{x|-2 < x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$, 集合 B 满足 $A \cup B = \{x|x > -2\}$, 且 $A \cap B = \{x|1 < x \leq 5\}$, 试求集合 B .

解法 由 $A \cap B = \{x|1 < x \leq 5\}$

5), 借助数轴可知: $\{1, 5\} \subseteq B$, 而 $(-2, -1) \cup (5, +\infty) \cap B = \emptyset$;

由 $A \cup B = \{x|x > -2\}$, 借助图可知: $[-1, 1] \subseteq B$, 而 $(-\infty, -2) \cap B = \emptyset$.

综合以上各式有 $B = \{x|-1 \leq x \leq 5\}$.

评析 在解有关不等式求解一类集合问题时, 应注意应用数形结合的方法, 作出数轴来求解.

变式训练:

若 $A = \{x|-4 < x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$, $B = \{x|x^2 + ax + b \leq 0\}$, 已知 $A \cup B = \{x|x > -4\}$, $A \cap B = \emptyset$, 求 a, b .

例 3 已知全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{x|x^2 - 5x + q = 0\}$, $B = \{x|x^2 + px + 12 = 0\}$, 且 $(\complement_I A) \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$. 求 p, q 的值, 并求 $(\complement_I A) \cap (\complement_I B)$.



例 3 图

解法 $\because (\complement_I A) \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$,

$\therefore 2 \in A$, 即 $2^2 - 5 \times 2 + q = 0$,

$\therefore q = 6$;

$\therefore A = \{x|x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$, $\therefore \complement_I A = \{1, 4, 5\}$.

又 $(\complement_I A) \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$, $\therefore 3 \in B$, 即 $3^2 + 3p + 12 = 0$,

$\therefore p = -7$.

$\therefore B = \{x|x^2 - 7x + 12 = 0\} = \{3, 4\}$, $\complement_I B = \{1, 2, 5\}$,

$\therefore (\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{1, 5\}$.

评析 在集合运算中, Venn 图是辅助运算的优良工具. 借助它, 很多交、并、补集的运算显得非常直观, 分析起来非常方便.

闯关演练

一、选择题

1. 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{1, 2\}$, $N = \{2, 3\}$, 则 $\complement_U(M \cup N) = ()$.

(A) $\{1, 2, 3\}$

(B) $\{4\}$

(C) $\{1, 3, 4\}$

(D) $\{2\}$

2. 已知集合 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{x|x = 2a, a \in M\}$, 则 $M \cap N = ()$.

(A) $\{0\}$

(B) $\{0, 1\}$

(C) $\{1, 2\}$

(D) $\{0, 2\}$

3. 设集合 $A = \{x|-2 \leq x \leq 4\}$, 集合 $B = \{x|x \leq a\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 $()$.

(A) $\{a|a \leq 4\}$

(B) $\{a|a > -2\}$

(C) $\{a|a < -2\}$

(D) $\{a|-2 \leq a \leq 4\}$

4. 给出以下四个命题:

① 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$;

② 若 $A \cup B = A$, 则 $B \subseteq A$;

③ 若 $A \cup B = \emptyset$, 则 $A = \emptyset, B = \emptyset$;

④ $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.

其中真命题的个数为 $()$.

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

5. 设 U 是全集, 集合 $P \subseteq Q \subseteq U$, 则下列集合中, 一定是空集的是 $()$.

(A) $P \cap (\complement_U Q)$

(B) $Q \cap (\complement_U P)$

(C) $(\complement_U P) \cap (\complement_U Q)$

(D) $P \cap Q$

6. 设 $P = \{y|y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, $Q = \{y|y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $()$.

(A) $Q = P$

(B) $Q \subseteq P$

(C) $P \cap Q = \{2, 4\}$

(D) $P \cap Q = \{2, 4\}, \{4, 16\}$

7. (2007 年广东) 已知集合 $M = \{x|1 + x > 0\}$, $N = \{x|\frac{1}{1-x} > 0\}$, 则 $M \cap N = ()$.

(A) $\{x|-1 \leq x < 1\}$

(B) $\{x|x > 1\}$

(C) $\{x|-1 < x < 1\}$

(D) $\{x|x \geq -1\}$

8. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x|x < -3 \text{ 或 } x \geq 2\}$, $B = \{x|-1 < x < 5\}$, 则集合 $\{x|-1 < x < 2\}$ 是 $()$.

(A) $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$

(B) $\complement_U(A \cup B)$

(C) $(\complement_U A) \cap B$

(D) $A \cap B$

9. 若集合 $S = \{y|y = (\frac{1}{2})^x - 1, x \in \mathbf{R}\}$, $T = \{y|y = \log_2(x+1), x > -1\}$, 则 $S \cap T = ()$.

(A) $\{0\}$

(B) $\{y|y \geq 0\}$

(C) S

(D) T

10. 已知集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{y|y = \cos x, x \in M\}$, 则 $M \cap N = ()$.

(A) $\{-1, 0, 1\}$

(B) $\{0, 1\}$

(C) $\{0\}$

(D) $\{1\}$

二、填空题

11. 如图, U 是全集, M, P, S 是 U 的三个子集, 则阴影部分表示的集合是_____.

12. 设集合 $A = \{5, \log_5(a+3)\}$, 集合 $B = \{a, b\}$, 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

13. 设 $x, y \in \mathbf{R}, A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}, B = \{(x, y) | \frac{x}{a} - \frac{y}{b} =$



第 11 题图

$1, a > 0, b > 0\}$. 当 $A \cap B$ 只有一个元素时, a, b 的关系是 _____.

14. 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$, 且 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq 2\}, g(x) \geq 0$ 的解集为 $\emptyset$, 则不等式 $f(x) \cdot g(x) > 0$ 的解集为 _____.

三、解答题

15. 已知全集为 $\mathbf{R}, A = \{x | \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geq$

$-2\}, B = \{x | \frac{5}{x+2} \geq 1\}$, 求 $(\complement_U A) \cap B$.

16. 高三(2)班 50 名同学在一次数学、外语联合测试中, 数学优秀的有 36 人, 外语优秀的有 20 人, 两种中任何一科都没有获得优秀的只有 8 人, 求两种同时都是优秀的人数.

17. 已知集合 $A = \{x | x^2 - ax \leq x - a\}, B = \{x | 1 \leq \log_2(x+1) \leq 2\}$. 若 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.

18. 设集合 $A = \{1, 3, a\}, B = \{1, a^2\}$, 问是否存在这样的实数 a , 使得 $A \cup B = \{1, a, a^2\}, A \cap B = \{1, a\}$ 同时成立? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.



单元达标

一、选择题

1. 设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{0, 3, 5\}, N = \{1, 4, 5\}$, 则集合 $M \cap (\complement_U N) =$ _____.

- (A) $\{5\}$ (B) $\{0, 3\}$
(C) $\{0, 2, 3, 5\}$ (D) $\{0, 1, 3, 4, 5\}$

2. 已知集合 $M = \{x | x^2 \leq 4\}, N = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则集合 $M \cap N$ 等于 _____.

- (A) $\{x | x < -2\}$ (B) $\{x | x > 3\}$
(C) $\{x | -1 < x < 2\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$

3. 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}, N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为 _____.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 含有三个实数的集合可表示为 $\{x, \frac{y}{x}, 1\}$, 也可表示为 $\{|x|, x+y, 0\}$, 以上 x, y 为确定常数, 则 $x^3 - y^3$ 的值为 _____.

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) ± 1

5. 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集, 且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下列论断正确的是 _____.

- (A) $(\complement_I S_1) \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$
(B) $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$
(C) $(\complement_I S_1) \cap (\complement_I S_2) \cap (\complement_I S_3) = \emptyset$
(D) $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

二、填空题

6. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 A ,

B 满足 $A \cap (\complement_U B) = \{1, 5\}, (\complement_U A) \cap B = \{3, 7\}, \complement_U(A \cup B) = \{4, 8\}$, 则 $A =$ _____.

7. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}, B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$. 若 $A \cup B = \mathbf{R}, A \cap B = \{x | 3 < x \leq 4\}$, 则 $a+b$ 的值等于 _____.

8. 定义集合 A 和 B 的运算 $A * B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$. 试写出含有集合运算符 $"*"$ $"\cap"$ $"\cup"$, 并对任意集合 A, B 都成立的一个等式 _____.

三、解答题

9. 设全集 $U = \mathbf{R}, A = \{x | -4 \leq x < 2\}, B = \{x | -1 < x \leq 3\}, P = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq \frac{5}{2}\}$, 求 $A \cap B, (\complement_U B) \cup P, (A \cap B) \cap (\complement_U P)$.

10. 已知 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}, B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$. 问: 是否存在实数 a , 使集合 A, B 同时满足下列三个条件: ① $A \neq B$; ② $A \cup B = B$; ③ $\emptyset \subsetneq A \cap B$. 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

第2单元

常用逻辑用语

第1节 命题及其关系

目标要求

了解命题及其逆命题、否命题与逆否命题。

考点诠释

1. 该考点的核心内容是命题真假的判定与命题的等价。在把命题改写成“若 p 则 q ”的形式的基础上,能写出命题的四种形式。

2. 该考点的难点是命题的否定与否命题的辨析。① 任何命题均有否定,无论是真命题还是假命题;而否命题仅针对命题“若 p 则 q ”提出来的。② 命题的否定是原命题的矛盾命题,两者的真假性必然是一真一假,一假一真;而否命题与原命题可能是同真同假,也可能是一真一假。

3. 值得关注的是,一个命题的原命题与其逆否命题同真同假,原命题的逆命题与否命题互为逆否命题,也同真同假。有时一个命题的真假不容易判断时,可以通过判断它的逆否命题的真假,从而得知原命题的真假。

4. 反证法的证题步骤:否定结论(新条件)→推出矛盾→否定假设→肯定结论。其关键是推出矛盾,如果命题的结论涉及到至少、至多、…是唯一的、存在等,往往可以考虑反证法。

命题展望

高考主要考查命题与命题之间的逻辑关系,以及判断是非的能力。从2007年高考来看,单独命题的可能性不大,常以函数、不等式、立体几何为载体,多以选择题、填空题的形式出现,而反证法和反证思想应该成为今后命题的热点。

范例精析

例1 写出命题“能被5整除的正整数的个位数字是5”的逆命题、否命题、逆否命题,并说明其真假。

名称	命题内容	真假
原命题	能被5整除的正整数的个位数字是5	真
逆命题		
否命题		
逆否命题		

解答

名称	命题内容	真假
原命题	能被5整除的正整数的个位数字是5	真
逆命题	个位数字是5的正整数能被5整除	真
否命题	不能被5整除的正整数的个位数字不是5	真
逆否命题	个位数字不是5的正整数不能被5整除	真

评析 解决此类问题最关键的是弄清命题的条件与结论,并明确否定后的条件与结论的意义。

变式训练:

写出下列命题的否定及否命题,并判断其真假。

(1) 两组对边平行的四边形是平行四边形;

(2) 正整数1既不是质数也不是合数;

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \angle B = 45^\circ$,则 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形。

例2 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, $a, b \in \mathbb{R}$, 对命题: 若 $a+b \geq 0$, 则 $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$.

(1) 写出逆命题, 判断真假, 并证明你的结论;

(2) 写出逆否命题, 判断真假, 并证明你的结论.

解 (1) 逆命题: 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, 若 $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$, 则 $a+b \geq 0$. 真命题.

$\because f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, 若 $a+b < 0$, 则 $a < -b$, $\therefore f(a) < f(-b)$.

同理 $f(b) < f(-a)$.

$\therefore f(a)+f(b) < f(-a)+f(-b)$, 与已知条件相悖, 故逆命题为真.

(2) 逆否命题为: 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, 若 $f(a)+f(b) < f(-a)+f(-b)$, 则 $a+b < 0$. 真命题.

原命题为真, 所以逆否命题亦真.

评析 说明命题“若 p 则 q ”为真就是要说明要使 q 成立, 只需要具备条件 p 就足够了, 即 $p \Rightarrow q$. 如果正面证明有困难, 可以考虑反证法, 即否定结论推出矛盾.

例3 若 a, b, c 均为实数, 且 $a = x^2 - 2y + \frac{\pi}{2}$, $b = y^2 - 2x + \frac{\pi}{3}$, $c = z^2 - 2x + \frac{\pi}{6}$, 求证: a, b, c 中至少有一个大于 0.

证明 (反证法)

若 a, b, c 都不大于 0, 即 $a \leq 0, b \leq 0, c \leq 0$, 那么 $a+b+c \leq 0$;

而 $a+b+c = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + \pi - 3 > 0$,

这是不可能的, 所以 a, b, c 中至少有一个大于 0.

评析 反证法是通过证明命题的结论的反面不成立而肯定命题成立的一种数学证明方法, 是间接证法之一. 当应用直接法证较困难或待证命题的结论涉及“至少”“至多”“唯一”“不存在”等字眼时, 可考虑用反证法.

例4 (2007 年东营模拟题) 命题甲: 关于 x 的不等式 $x^2 + (a-1)x + a^2 \leq 0$ 的解集为 $\emptyset$. 命题乙: 函数 $y = (2a^2 - a)^x$ 为增函数.

分别求出符合下列条件的实数 a 的取值范围:

(1) 甲、乙至少有一个是真命题;

(2) 甲、乙中有且只有一个是真命题.

解 甲命题为真时: $\Delta = (a-1)^2 - 4a^2 < 0$, 即 $a > \frac{1}{3}$ 或 $a < -1$.

乙命题为真时: $2a^2 - a > 1$, 即 $a > 1$ 或 $a < -\frac{1}{2}$.

(1) 甲、乙至少有一个是真命题, 即上面两个范围的并集

为 $a > \frac{1}{3}$ 或 $a < -\frac{1}{2}$, $\therefore$ 甲、乙至少有一个是真命题时, a 的

取值范围是 $a > \frac{1}{3}$ 或 $a < -\frac{1}{2}$.

(2) 甲、乙有且只有一个是真命题, 有两种情况: 甲真乙假时, $\frac{1}{3} < a \leq 1$; 甲假乙真时, $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$. $\therefore$ 甲、乙中有

且只有一个真命题时, a 的取值范围是 $\frac{1}{3} < a \leq 1$ 或 $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$.

评析 解决此类问题的一般做法是: 使命题 p 成立的集合为 A , 使命题 q 成立的集合为 B , 从而转化为探究集合 A 与 B 的关系及集合 A 与 B 的交、并、补运算的问题.

闯关演练

一、选择题

1. 与命题“若 $a \notin M$, 则 $b \notin M$ ”等价的命题是 ().

(A) 若 $b \in M$, 则 $a \notin M$

(B) 若 $b \notin M$, 则 $a \in M$

(C) 若 $b \in M$, 则 $a \in M$

(D) 若 $a \notin M$, 则 $b \in M$

2. “ $xy \neq 0$ ”是指 ().

(A) $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$

(B) $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$

(C) x, y 至少一个为 0

(D) 不都是 0

3. 命题“若 $a > b$, 则 $a - 8 > b - 8$ ”的逆否命题是 ().

(A) 若 $a < b$, 则 $a - 8 < b - 8$

(B) 若 $a - 8 > b - 8$, 则 $a > b$

(C) 若 $a \leq b$, 则 $a - 8 \leq b - 8$

(D) 若 $a - 8 \leq b - 8$, 则 $a \leq b$

4. 命题“若 a, b 都是奇数, 则 $a+b$ 是偶数”的逆否命题是 ().

(A) 若 $a+b$ 不是偶数, 则 a, b 都不是奇数

(B) 若 $a+b$ 不是偶数, 则 a, b 不都是奇数

(C) 若 $a+b$ 是偶数, 则 a, b 都是奇数

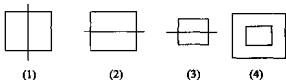
(D) 若 $a+b$ 是偶数, 则 a, b 不都是奇数

5. 若命题 p 的逆命题为 q , 命题 q 的否命题为 r , 则 p 是 r 的 ().

(A) 逆命题 (B) 否命题

(C) 逆否命题 (D) 以上判断都错

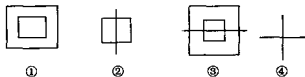
6. 定义 $A \otimes B, B \otimes C, C \otimes D, D \otimes B$ 分别对应下列图形:



第6题图(1)

那么图(2)中可以表示 $A \cap D$, $A \cap C$ 的是 ().

- (A) ①② (B) ②③
(C) ②④ (D) ①④



第6题图(2)

7. 已知命题“非空集合 M 的元素都集合 P 的元素”是假命题,那么下列命题中真命题的个数是 ().

- ① M 的元素都不是集合 P 的元素; ② M 中不属于集合 P 的元素;
③ M 的元素都是集合 P 的元素; ④ M 的元素不都是集合 P 的元素.

- (A) 1 个 (B) 2 个
(C) 3 个 (D) 4 个

8. 已知直线 m, n 及平面 α, β , 则下列命题正确的是 ().

- (A) $\left. \begin{matrix} m \parallel \alpha \\ n \parallel \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \parallel \beta$
(B) $\left. \begin{matrix} m \parallel \alpha \\ m \parallel n \end{matrix} \right\} \Rightarrow n \parallel \alpha$
(C) $\left. \begin{matrix} m \perp \alpha \\ \alpha \perp \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow m \parallel \beta$
(D) $\left. \begin{matrix} m \perp \alpha \\ n \parallel \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow m \perp n$

9. (2007 年重庆)命题“若 $x^2 < 1$, 则 $-1 < x < 1$ ”的逆否命题是 ().

- (A) 若 $x^2 \geq 1$, 则 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$
(B) 若 $-1 < x < 1$, 则 $x^2 < 1$
(C) 若 $x > 1$ 或 $x < -1$, 则 $x^2 > 1$
(D) 若 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 则 $x^2 \geq 1$

10. 命题“若 $a > b$, 则 $ac > bc (a, b, c \in \mathbf{R})$ ”与它的逆命题、否命题、逆否命题中, 真命题的个数为 ().

- (A) 0 个 (B) 2 个
(C) 3 个 (D) 4 个

二、填空题

11. 下列命题: ① 若 $ac > bc$, 则 $a > b$; ② “若 $b = 3$, 则 $b^2 = 9$ ”的逆命题; ③ “当 $x = 2$ 时, $x^2 - 3x + 2 = 0$ ”的否命题; ④ “相似三角形的对应角相等”的逆否命题.

其中是真命题的是 _____.

12. 命题“若 $x = -1$ 且 $y = -2$, 则 $x^2 + 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$ ”的否定是 _____; 否命题是 _____.

13. 若方程 $x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0$ 和 $x^2 + 2ax - 2a = 0$ 至少有一个方程有实根, 则实数 a 的取值范围是 _____.

14. 给出下列四个命题:

- ① 一直线与两个互相垂直的平面中的一个垂直, 则此直线必平行于另一个平面;
② 一条直线与两个相交平面都平行, 则它必与这两个平面的交线平行;
③ 对确定的两条异面直线, 过空间任意一点有且只有一个平面与这两条异面直线都平行;
④ 若直线 l 与一个平面所成的角为 α , 则直线 l 与该平面内的直线所成的最大角为 $\frac{\pi}{2}$.

其中真命题的序号是 _____. (请把所有正确命题的序号都填上)

三、解答题

15. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $x^2 + ax + b \leq 0$ 有非空解集, 则 $a^2 - 4b \geq 0$. 写出该命题的否命题, 并判断其真假.

16. 已知 $x \in \mathbf{R}, a = x^2 + \frac{1}{2}, b = 2 - x, c = x^2 - x + 1$.

证明: a, b, c 中至少有一个不少于 1.

17. 写出命题“若 $x^2 + x \leq 0$, 则 $|2x + 1| < 1$ ”的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断其真假.

18. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数, 证明 $f(x) = 0$ 至多有一个实根.

第2节 充分条件与必要条件

目标要求

理解必要条件、充分条件与充要条件的意义,会分析四种命题的相互关系.

考点诠释

1. 充分条件和必要条件是数学中重要的概念,它着重讨论命题中条件和结论的关系.若原命题为真,则条件为结论的充分条件;若逆命题或否命题为真,则条件为结论的必要条件.

2. 该考点的难点为充分条件与必要条件的判定与证明.在判断充分条件及必要条件时,首先要分清命题中的条件和结论,其次,结论要分四种情况说明:充分不必要条件,必要不充分条件,充分且必要条件,既不充分又不必要条件.

3. 从集合的角度看,若记满足条件 p 的所有对象组成集合 A ,满足条件 q 的所有对象组成集合 B ,则当 $A \subseteq B$ 时, p 是 q 的充分条件;当 $B \subseteq A$ 时, p 是 q 的必要条件;当 $A = B$ 时, p 是 q 的充要条件.当 p 和 q 互为充要条件时,也称 p 和 q 是等价的,即 $p \Leftrightarrow q$.

命题展望

充要条件的判断或证明,频繁地出现在高考试题中,且多以选择填空题的形式出现,难度一般不大,考查时经常以几何中的点、线、面,代数中的函数、不等式等为载体进行,联系面比较广泛.

范例精析

例1 (2007年山东,理9)下列各小题中, p 是 q 的充分必要条件的().

① $p: m < -2$ 或 $m > 6$; $q: y = x^2 + mx + m + 3$ 有两个不同的零点.

② $p: \frac{f(-x)}{f(x)} = 1$; $q: y = f(x)$ 是偶函数.

③ $p: \cos \alpha = \cos \beta$; $q: \tan \alpha = \tan \beta$.

④ $p: A \cap B = A$; $q: \complement_U B \subseteq \complement_U A$.

(A) ①②

(B) ②③

(C) ③④

(D) ①④

解答 ①由 $m < -2$ 或 $m > 6$ 可知方程 $x^2 + mx + m + 3 = 0$ 有两个不等实根,从而函数 $y = x^2 + mx + m + 3$ 有两个不同的零点,即 $p \Rightarrow q$.反之,若函数 $y = x^2 + mx + m + 3$ 有两个不同的零点,则 $\Delta = m^2 - 4(m + 3) = (m - 6)(m + 2) > 0$,可得 $m > 6$ 或 $m < -2$,即 $q \Rightarrow p$.

② $f(x) = \cos x$ 是偶函数,但 $\frac{f(-x)}{f(x)} = 1$ 不恒成立,如

$\frac{f(-\frac{\pi}{2})}{f(\frac{\pi}{2})}$ 无意义.

③若 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = -\frac{\pi}{3}$,则 $\cos \alpha = \cos \beta$,但 $\tan \alpha \neq \tan \beta$.

④由 $A \cap B = A$ 得 $A \subseteq B$, $\therefore \complement_U B \subseteq \complement_U A$,即 $p \Rightarrow q$.

由 $\complement_U B \subseteq \complement_U A$ 得 $A \subseteq B$, $\therefore A \cap B = A$,即 $q \Rightarrow p$.

综上所述,正确答案为 D.

评析 判断 p 是 q 的什么条件,实质上是判断“若 p 则 q ”及其逆命题“若 q 则 p ”是真还是假.同时要注意反例的运用.

变式训练:

对任意实数 a, b, c ,给出下列命题:

① “ $a = b$ ”是“ $ac = bc$ ”的充要条件;

② “ $a + 5$ 是无理数”是“ a 是无理数”的充要条件;

③ “ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的充分条件;

④ “ $a < 5$ ”是“ $a < 3$ ”的必要条件.

其中真命题的个数是().

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

例2 已知 $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2$; $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$.若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,求实数 m 的取值范围.

解答 命题“ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件”的等价命题即逆否命题为: p 是 q 的充分不必要条件.

$p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{x-1}{3} - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \frac{x-1}{3} \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 10$.