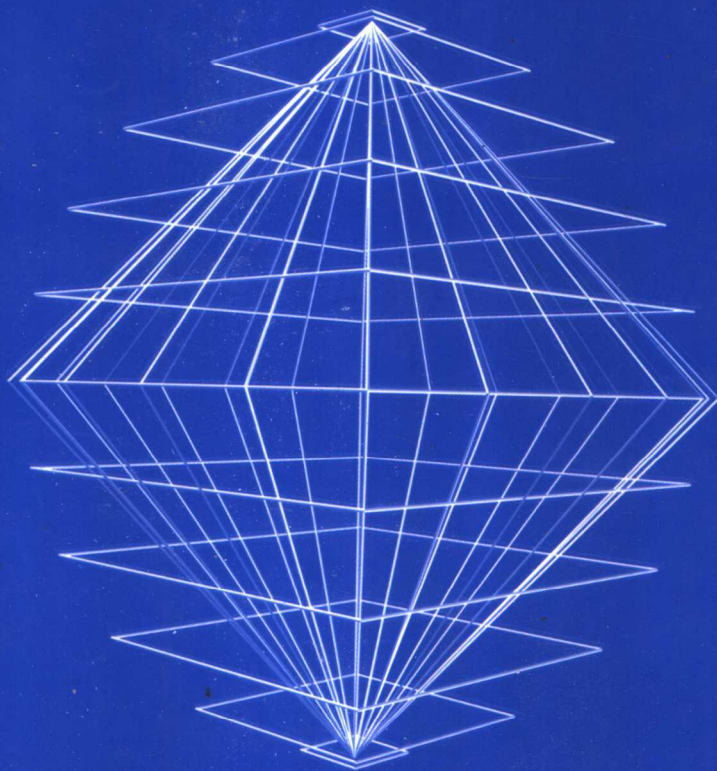


高等学校土木工程专业系列选修课教材

钢结构稳定

周绪红 郑宏 编著



中国建筑工业出版社

CHINA ARCHITECTURE & BUILDING PRESS

1.01

2

高等学校土木工程专业系列选修课教材

钢结构稳定

周绪红 郑宏 编著



中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

钢结构稳定/周绪红, 郑宏编著. —北京: 中国建筑工业出版社, 2004

(高等学校土木工程专业系列选修课教材)

ISBN 7-112-06170-9

I. 钢... II. ①周... ②郑... III. 钢结构—结构稳定性—高等学校—教材 IV. TU391.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 116392 号

高等学校土木工程专业系列选修课教材

钢结构稳定

周绪红 郑宏 编著

*

中国建筑工业出版社出版 (北京西郊百万庄)

新华书店总店科技发行所发行

北京市彩桥印刷厂印刷

*

开本: 787×960 毫米 1/16 印张: 10½ 字数: 216 千字

2004 年 1 月第一版 2004 年 1 月第一次印刷

印数: 1—3,000 册 定价: 15.00 元

ISBN 7-112-06170-9

TU·5437 (12183)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

本社网址: <http://www.china-abp.com.cn>

网上书店: <http://www.china-building.com.cn>

本书系统地介绍了杆系结构和薄板的稳定,包括稳定的基本概念和临界荷载常用的计算方法。全书共六章,主要内容有:轴心受压构件的失稳,压弯构件的失稳,梁的弯扭失稳,框架平面内失稳及薄板的稳定理论等。

本书注重将理论与钢结构构件的稳定设计紧密结合,尽可能地沟通《钢结构稳定》和《钢结构》两门课程,并安排例题和习题以便于读者加深对理论的理解。

本书可作为建筑工程、交通等土建专业的本科生教材,可供相关专业的教师、研究生和工程技术人员参考。

责任编辑:杨 军

责任设计:崔兰萍

责任校对:张 虹

前 言

在“土木工程”专业本科教学中,《钢结构稳定》课程一般作为专业基础课安排讲授,是《钢结构》专业课的先修课程,具有难度较大但授课学时少的特点。稳定问题是工程结构理论中的主要问题之一,结构稳定理论历史悠久、体系庞大、内容丰富,如何在有限的学时内构建钢结构稳定理论的知识结构是本书希望解决好的问题。尤其是随着我国工科专业调整,“大土木”格局逐步形成,对授课内容和教材提出了新的要求;同时,钢结构规范的更新要求教材的变革。这些要求促使作者完成这样一部教材,并希望具有如下特点:

①不仅重视各个知识点的内容讲解,更加注重知识结构的逻辑性。本书以钢结构构件为线索,就某一种构件,较为详细介绍了可能发生的失稳现象、相应的计算理论和设计方法,这样便于读者全面而准确地把握稳定理论。

②不但重视理论介绍,而且结合钢结构新规范,说明理论在钢结构稳定设计中的应用,使读者了解钢结构稳定设计公式的来龙去脉,更好地应用理论指导设计工作。

③在建筑工程中会遇到稳定问题,在其他结构中(如交通土建),同样有类似问题出现。本教材内容对工程中涉及金属结构的稳定问题普遍适用,具有较广泛的参考价值。

④具有实用性。通过学习本书内容,实现从专业基础课向《钢结构》专业课的过渡,并且可以应用本书中的设计理论和方法进行钢结构稳定设计。

本书的写作是在周绪红教授的主持下完成的。第1章、第4章由周绪红执笔,第5章由周绪红和郑宏共同完成,第2、3章和第6章由郑宏执笔。本书由周绪红定稿。

由于水平所限,书中可能存在缺点和错误,诚请读者批评指正。

作者

2003年1月于长安大学

目 录

第一章 概述	1
1.1 钢结构的失稳破坏	1
1.2 失稳类型	2
1.2.1 分支点失稳	3
1.2.2 极值点失稳	5
1.2.3 跃越失稳	6
1.3 临界力的计算方法	7
1.3.1 静力法	7
1.3.2 能量法	9
第二章 轴心受压构件失稳	12
2.1 轴心受压构件的失稳类型	12
2.2 轴心受压构件的弯曲失稳	13
2.2.1 理想轴心受压构件的弹性弯曲失稳	13
2.2.2 理想轴心受压构件的非弹性弯曲失稳	23
2.2.3 初始缺陷对轴心受压构件稳定性的影响	29
2.3 轴心受压构件的扭转失稳	34
2.3.1 扭转的类型	34
2.3.2 轴心受压构件弹性扭转失稳	37
2.3.3 轴心受压构件弹塑性扭转失稳	41
2.4 轴心受力构件弯扭失稳	46
2.4.1 轴心受压构件的弹性弯扭失稳	46
2.4.2 轴心受压构件的弹塑性弯扭失稳	50
2.5 钢结构设计中轴心受压构件的稳定计算	51
习题	58
第三章 压弯构件的失稳	61
3.1 压弯构件平面内失稳	62
3.1.1 压弯构件平面内弹性弯曲性能	62
3.1.2 压弯构件平面内弹塑性弯曲失稳	66
3.1.3 压弯构件弯矩作用平面内的稳定理论在设计中的应用	74
3.2 压弯构件平面外失稳	75

3.2.1	压弯构件的弹性弯扭失稳	75
3.2.2	压弯构件的弹塑性弯扭失稳	83
3.2.3	压弯构件弯矩作用平面外的稳定理论在设计中的应用	86
习题	90
第四章	梁的弯扭失稳	92
4.1	梁的弹性弯扭失稳	92
4.1.1	支撑条件对梁弯扭失稳临界弯矩的影响	93
4.1.2	荷载作用类型对梁弯扭失稳临界弯矩的影响	96
4.2	梁的弹塑性弯扭失稳	102
4.3	梁的弯扭失稳理论在设计中的应用	104
习题	107
第五章	框架平面内失稳	109
5.1	平衡法确定框架弹性失稳荷载	110
5.2	位移法求解框架的弹性失稳荷载	112
5.2.1	无侧移弹性压弯构件的转角位移方程	112
5.2.2	有侧移弹性压弯构件的转角位移方程	114
5.2.3	单层单跨框架的弹性失稳荷载	115
5.2.4	多层单跨框架的弹性失稳荷载	116
5.2.5	多层多跨框架的弹性失稳荷载	118
5.3	近似法求解多层多跨框架的弹性失稳荷载	119
5.4	矩阵位移法求解框架的屈曲荷载	122
5.4.1	压杆单元的刚度矩阵	123
5.4.2	结构刚度矩阵和框架的屈曲条件	125
习题	128
第六章	薄板的屈曲	129
6.1	小挠度理论板的弹性曲面微分方程	129
6.1.1	采用小挠度理论的三个假定	130
6.1.2	弹性曲面微分方程	131
6.1.3	单向均匀受压简支板的弹性失稳荷载	132
6.2	能量法计算板的弹性失稳荷载	133
6.2.1	瑞利—里兹法	134
6.2.2	迦辽金法	135
6.3	不同面内荷载作用下板的弹性失稳	138
6.3.1	单向非均匀受压板的弹性失稳	138
6.3.2	均匀受剪板的弹性失稳	139
6.3.3	一个边缘受压的四边简支板的临界应力	141

6.4 几种边缘荷载共同作用下薄板的临界条件	142
6.4.1 用横向加劲肋加强的梁腹板	142
6.4.2 同时用横向加劲肋和纵向加劲肋加强的梁腹板	144
6.4.3 同时用横向加劲肋、受压区纵向加劲肋及短加劲肋加强的梁腹板	145
6.4.4 偏心受压柱的腹板	145
6.5 组成构件的板件间的相互约束	146
6.5.1 轴心受压杆板件间的约束	146
6.5.2 梁中翼缘和腹板之间的约束	148
6.5.3 钢结构设计规范规定的嵌固系数	149
6.6 板稳定理论在钢构件设计中的应用	149
6.6.1 轴心受压构件中板件的局部稳定设计	149
6.6.2 受弯构件中板件的局部稳定设计	151
6.6.3 压弯构件中板件的局部稳定设计	153
习题	156
习题答案	157
参考文献	159

第一章 概 述

建筑结构应按承载能力极限状态和正常使用极限状态设计。前者指结构或构件达到最大承载力或达到不适于继续承载的变形时的极限状态；后者为结构或构件达到正常使用的某项规定限值时的极限状态^[1]。钢结构可能出现的承载能力极限状态有：①结构构件或连接因材料强度被超过而破坏；②结构转变为机动体系；③整个结构或其中一部分作为刚体失去平衡而倾覆；④结构或构件丧失稳定；⑤结构出现过度塑性变形，不适于继续承载；⑥在重复荷载下构件疲劳断裂。其中稳定问题是钢结构的突出问题，在各种类型的钢结构中，都可能遇到稳定问题，因稳定问题处理不利造成的事故也时有发生。

1.1 钢结构的失稳破坏

钢结构因其优良的性能被广泛地应用于大跨度结构、重型厂房、高层建筑、高耸构筑物、轻型钢结构和桥梁结构等。如果钢结构发生事故则会造成很大损失。

1907年，加拿大圣劳伦斯河上的魁北克桥，在用悬臂法架设桥的中跨桥架时，由于悬臂的受压下弦失稳，导致桥架倒塌，9000t钢结构变成一堆废铁，桥上施工人员75人罹难。大跨度箱形截面钢桥在1970年前后曾出现多次事故^[2]。

美国哈特福德市（Hartford City）的一座体育馆网架屋盖，平面尺寸92m×110m，该体育馆交付使用后，于1987年1月18日夜突然坍塌^[3]。由于网架杆件采用了4个等肢角钢组成的十字形截面，其抗扭刚度较差；加之为压杆设置的支撑杆有偏心，不能起到预期的减少计算长度的作用，导致网架破坏^[4]。20世纪80年代，在我国也发生了数起因钢构件失稳而导致的事^[5]。

科纳科夫和马霍夫曾分析前苏联1951—1977年期间所发生的59起重大钢结构事故，其中17起事故是由于结构的整体或局部失稳造成的。如原古比雪夫列宁冶金厂锻压车间在1957年末，7榀钢屋架因压杆提前屈曲，连同1200m²屋盖突然塌落。

高层建筑钢结构在地震中因失稳而破坏也不乏其例。1985年9月19日，墨西哥城湖泊沉淀区发生8.1级强震，持时长达180s，只隔36h又发生一次7.5级强余震。震后调查表明，位于墨西哥城中心区的Pino Suarez综合楼第4层有3根

钢柱严重屈曲(失稳), 横向 X 形支撑交叉点的连接板屈曲, 纵向桁架梁腹杆屈曲破坏^[6]。1994 年发生在美国加利福尼亚州 Northridge 的地震震害表明, 该地区有超过 100 座钢框架发生了梁柱节点破坏^[7], 对位于 Woodland Hills 地区的一座 17 层钢框架观察后发现节点破坏很严重^[8], 竖向支撑的整体失稳和局部失稳现象明显。1995 年发生在日本 Hyogoken-Nanbu 的强烈地震中, 钢结构发生的典型破坏主要有局部屈曲、脆性断裂和低周疲劳破坏^[9]。

对结构构件, 强度计算是基本要求, 但是对钢结构构件, 稳定计算比强度计算更为重要。强度问题与稳定问题虽然均属第一极限状态问题, 但两者之间概念不同。强度问题关注在结构构件截面上产生的最大内力或最大应力是否达到该截面的承载力或材料的强度, 因此, 强度问题是应力问题; 而稳定问题是要找出作用于结构内部抵抗力之间的不稳定平衡状态, 即变形开始急剧增长的状态, 属于变形问题。稳定问题有如下几个特点:

(1) 稳定问题采用二阶分析。以未变形的结构来分析它的平衡, 不考虑变形对作用效应的影响称为一阶分析 (FOA—First Order Analysis); 针对已变形的结构来分析它的平衡, 则是二阶分析 (SOA—Second Order Analysis)。应力问题通常采用一阶分析, 也称线性分析; 稳定问题原则上均采用二阶分析, 也称几何非线性分析。

(2) 不能应用叠加原理。应用叠加原理应满足两个条件: ①材料符合虎克定律, 即应力与应变成正比; ②结构处于小变形状态, 可用一阶分析进行计算。弹性稳定问题不满足第二个条件, 即对二阶分析不能用叠加原理; 非弹性稳定计算则两个条件均不满足。因此, 叠加原理不适用于稳定问题。

(3) 稳定问题不必区分静定和超静定结构。对应力问题, 静定和超静定结构内力分析方法不同: 静定结构的内力分析只用静力平衡条件即可; 超静定结构内力分析则还需增加变形协调条件。在稳定计算中, 无论何种结构都要针对变形后的位形进行分析。既然总要涉及变形, 区分静定与超静定就失去意义。

1.2 失稳类型

一个处于平衡状态的刚性球, 可以有三种性质不同的平衡状态: 稳定平衡、随遇平衡和不稳定平衡。如图 1.1a 所示, 用实线表示的球, 在凹面中处于平衡状态, 如果有一侧向力使球偏离平衡位置 B 点, 到达图中虚线所示位置, 当撤去侧向力, 球体在重力作用下, 经过振动仍恢复到原来的平衡位置 B 点, 则这种平衡状态是稳定的。图 1.1b 中, 如果有侧向水平力使其偏离平衡位置 B 点, 当除去水平力后, 球体不再回到原来的 B 点, 而是停留在新的点 (图中虚线所示位置), 这种推到何处就停在何处的状态称为随遇平衡状态。图 1.1c 中的球体在凸面顶点 B 处于平衡状态, 当有一侧向力使球体离开平衡位置 B 点, 除去侧

向力后，球体不仅不能恢复到 B 点，反而继续沿着凸面滚动，远离平衡位置，因此这种平衡状态是不稳定的。

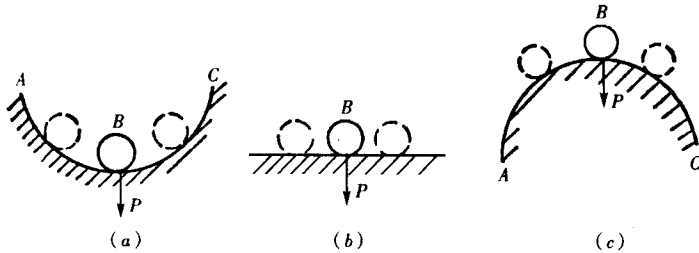


图 1.1 刚体的平衡状态

(a) 稳定平衡；(b) 随遇平衡；(c) 不稳定平衡

材料力学中，在讨论两端铰支、均质弹性材料的轴心受压杆件稳定问题时也遇到了上述类似的三种平衡状态：①图 1.2a 中，当轴向压力 P 的数值不大时，

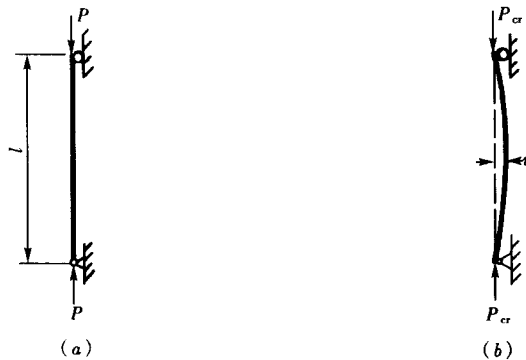


图 1.2 轴心压杆的平衡状态

(a) 稳定平衡状态 ($P < P_{cr}$)；(b) 临界状态

如有侧向力使杆件产生横向微弯曲，离开原有直线形状，当撤去侧向力后，杆件经振动仍可恢复到原直线形状，则称其为稳定平衡状态。②图 1.2b 中，当压力 $P = P_{cr}$ 时，直杆仍可保持其直线形状，如果施加微小侧向力，则杆件发生微弯曲，当除去侧向力后，弯曲变形仍保持不变，杆件不能恢复到原来的直线形状，此时杆件处于曲线形状的随遇平衡状态，称其为临界状态， P_{cr} 称为临界力。③当 $P > P_{cr}$ 时，若有侧向力使杆件弯曲，则即使除去侧向力后，杆件在压力 P 作用下，弯曲变形继续增加最终导致杆件破坏，称其为不稳定平衡状态。

用上述理想轴心压杆的情况来描述钢结构的失稳现象是不够的，钢结构的失稳现象就其性质而言，可以分为三类稳定问题。

1.2.1 分支点失稳

理想的（即无缺陷的、笔直的）轴心受压杆件和理想的中面内受压的平板的

失稳（屈曲）都属于分支点失稳。也称平衡分岔失稳，或称第一类失稳。

图 1.3a 为一理想轴心受压构件，当轴向压力 $P < P_{cr}$ 时，压杆沿轴向只被压缩 Δ_c ，杆始终处于直线平衡状态，称为原始平衡状态。此时如果在其横向施加微小干扰，杆件会呈微弯曲状态而偏离原平衡位置，但是撤去此干扰后，压杆立即恢复到原直线平衡状态。可见，原始平衡状态具有唯一的平衡形式。

当 $P = P_{cr}$ 时，压杆会突然弯曲，该现象称为丧失稳定，或称为屈曲。如图 1.3b 所示，构件由原来挺直的平衡状态转变到微弯曲的平衡状态。从图 1.3c 表示的荷载 P -位移 δ 曲线中可以看出，当荷载到达 A 点后，杆件可能有两个平衡路径，即直线 AC 和水平线 AB (AB')，A 点称为两个平衡路径的分支点，或分岔点。由于在同一个荷载点出现了平衡分支现象，所以将此种失稳现象称为分支点失稳。

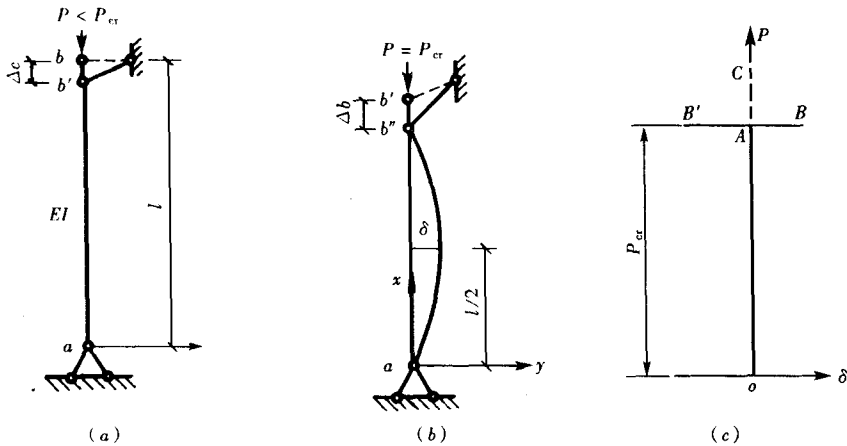


图 1.3 理想轴心受压构件

(a) 原始平衡；(b) 临界平衡；(c) P - δ 曲线

分支点失稳又可以分为稳定分支点失稳和不稳定分支点失稳两种。

1. 稳定分支点失稳

图 1.3c 所示荷载一位移曲线是根据小挠度理论分析得到的，如按大挠度理论分析，轴心受压构件屈曲后，荷载随横向位移加大而略有增加，但横向位移的增长速度远大于轴向力的提高速度，如图 1.4b 所示。轴心压杆屈曲后，荷载一位移曲线是 AB 或 AB'，这种平衡状态是稳定的，属于稳定分支点失稳。由于压杆因弯曲变形而产生弯矩，在压力和弯矩的共同作用下，杆件最大弯矩作用截面边缘纤维先屈服，随着塑性发展，压杆很快就达到承载能力极限状态，即极限荷载 P_u 与屈曲荷载 P_{cr} 相差很小，因此，轴心受压构件屈曲后强度并不能被利用。

对图 1.5a 所示四边有支撑的薄板，当中面均匀压力 P 达到屈曲荷载 P_{cr} 后，板发生凸曲，同时在板中面产生横向薄膜拉应力，牵制了板的变形，使板屈曲后

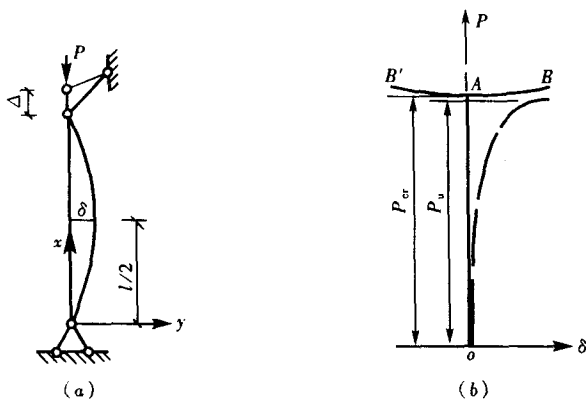


图 1.4 大挠度弹性理论分析的荷载-位移关系

(a) 轴心受压构件; (b) P - δ 曲线

仍能承受较大的荷载增量, 屈曲后板仍处于稳定平衡状态, 该板的失稳属于稳定分支点失稳。薄板屈曲后荷载-位移曲线如图 1.5b 中的 AB 或 AB' 所示, 由于薄板的极限荷载 P_u 远超过屈曲荷载 P_{cr} , 所以可以利用板屈曲后的强度。

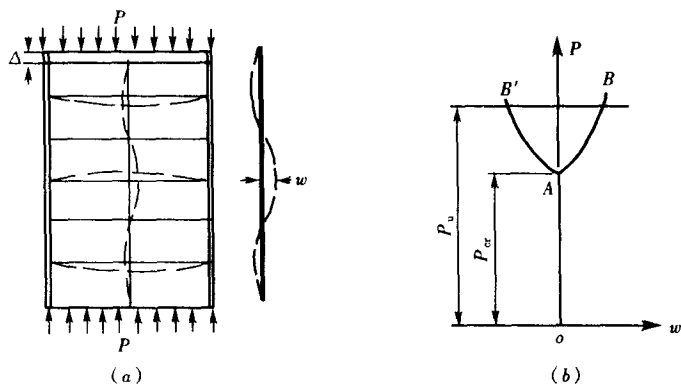


图 1.5 中面均匀受压的四边支承薄板的荷载-位移关系

(a) 中面均匀受压的四边支承薄板; (b) P - w 曲线

2. 不稳定分支点失稳

如果结构或构件发生分支点失稳后, 只能在远比临界荷载低的条件下维持平衡状态, 则称此类失稳为不稳定分支点失稳。图 1.6a 所示承受均匀压力的圆柱壳的失稳就是不稳定分支点失稳, 荷载-位移曲线如图 1.6b 中的 OAB 或 OAB' 所示。

1.2.2 极值点失稳

图 1.7a 所示偏心受压构件, 作用力 P 的偏心距为 e , 其失稳过程的压力 P -挠度 Δ 曲线见图 1.7b。随着压力 P 的增加, 偏心压杆的挠度 Δ 也随之增长, 形成曲线的上升段 OA , 压弯构件处于稳定平衡状态; 但是到达曲线的最高点 A

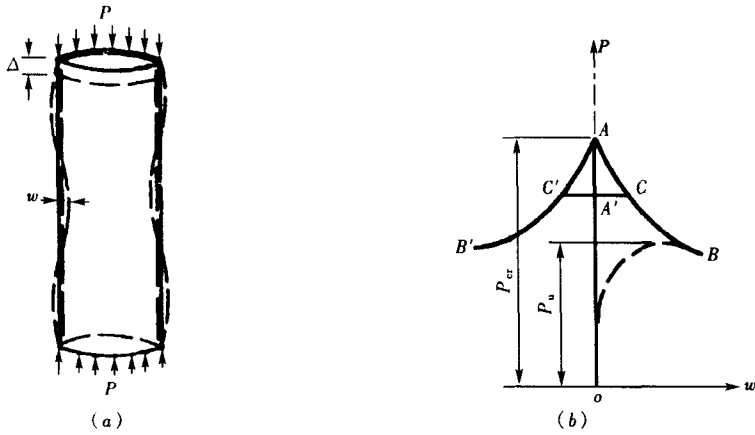


图 1.6 不稳定支点失稳
(a) 均匀受压圆柱壳；(b) 荷载-位移曲线

时，构件的抵抗力开始小于外力作用，即 A 点为压弯构件承载力的极限点，表示压弯构件开始丧失整体稳定， P_0 为偏心压杆的最大承载力，也称为偏心压杆的极限荷载或压溃荷载； A 点之后出现了曲线的下降段 AB ，为了维持构件的平衡状态必须不断降低端部压力 P ，构件处于不稳定平衡状态。从压弯构件的失稳过程可知，其荷载-位移曲线只有极值点，没有出现由直线平衡状态向弯曲平衡状态过渡的分岔点，构件弯曲变形的性质始终不变，称这种失稳为极值点失稳，也称为第二类失稳。

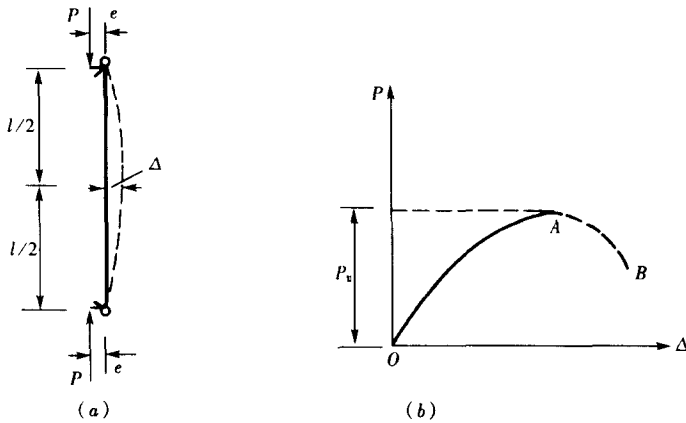


图 1.7 极值点失稳
(a) 偏心受压构件；(b) 荷载 P -挠度 Δ 曲线

1.2.3 跃越失稳

对两端铰接的坦拱结构（图 1.8a），在均布荷载 q 作用下产生挠度 w ，其荷

载-挠度曲线(图 1.8b)也有稳定的上升段 OA , 但是到达曲线的最高点 A 时会突然跳跃到一个非临近的具有很大变形的 C 点, 即由向上拱起的位形突然跳到下垂的位形, 与 A 点对应的荷载 q_{cr} 为坦拱的临界荷载; 下降段 AB 不稳定, BC 段虽然稳定上升, 但是因为结构已经破坏而不能被利用。这种结构由一个平衡位形突然跳到另一个非临近的平衡位形的失稳现象称为跃越失稳。跃越失稳既无平衡分支点, 又无极值点, 但与不稳定分支失稳又有相似之处, 都在丧失稳定平衡后经历一段不稳定平衡, 然后达到另一个稳定平衡状态。钢结构油罐、扁球壳顶盖等的失稳也属此种类型。

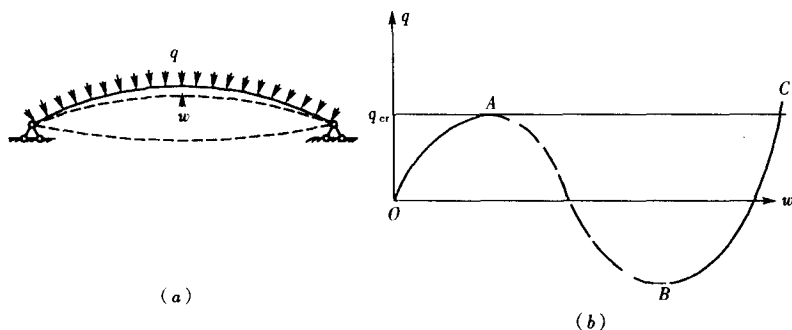


图 1.8 跃越失稳
(a) 均布荷载作用下的坦拱; (b) 荷载-挠度曲线

1.3 临界力的计算方法

结构由稳定平衡到不稳定平衡的界限状态称为临界状态。结构处于临界状态时的荷载值称为临界荷载值, 稳定计算的主要目的在于确定临界荷载值。求临界荷载值的方法很多, 可分为精确计算方法和近似计算方法两大类, 其中静力法、能量法分别是两类方法中常用的计算方法。

1.3.1 静力法

静力法即静力平衡法, 也称中性平衡法, 此法是求解临界荷载的最基本方法。对第一类弹性稳定问题, 在分支点存在两个临近的平衡状态: 原始直线平衡状态和产生了微小弯曲变形的平衡状态。静力法就是根据已发生了微小弯曲变形后结构的受力条件建立平衡微分方程, 而后解出临界荷载。下面以图 1.9a 所示两端铰接轴心受压直杆说明静力法的原理和计算步骤。

当荷载达到临界荷载 ($P = P_{cr}$) 时, 压杆会突然弯曲, 由原来的直线平衡状态转变到图 1.9a 中实线表示的微弯的曲线平衡状态。此时杆件除弯曲外, 还受压缩及剪切作用, 由于压缩和剪切的影响很小, 一般忽略不计, 则任一截面(图 1.9b)内力矩与外力矩的平衡关系为

$$M = Py \quad (1.1)$$

由挠曲线的近似微分方程

$$-EIy'' = M \quad (1.2)$$

可得

$$EIy'' + Py = 0 \quad (1.3)$$

式中： E 为材料弹性模量， I 为杆件截面惯性矩。令 $\alpha^2 = P/(EI)$ ，式(1.3)为一常系数微分方程

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (1.4)$$

其通解为

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x \quad (1.5)$$

当两端铰接时，边界条件为

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ 时, } y &= 0 \\ x = l \text{ 时, } y &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

将边界条件代入式(1.5)，得如下齐次方程组

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \\ C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

当 $C_1 = C_2 = 0$ 时，满足式(1.7)，但由式(1.5)知，此时 $y = 0$ ，表示杆件处于直线平衡状态，与图1.9b不符。对应杆件曲线平衡状态，要求 $y \neq 0$ ，即 C_1 、 C_2 有非零解，为此要求方程组(1.7)的系数行列式必须等于零，即

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l \end{vmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

上式 $D(\alpha) = 0$ 为稳定特征方程，解之得

$$\sin \alpha l = 0 \quad (1.9)$$

则有

$$\alpha l = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.10)$$

即

$$P = n^2 \pi^2 EI / l^2 \quad (1.11)$$

当 $n=1$ 时, 得到 P 的最小值 P_{cr} , 即分支屈曲荷载, 又称欧拉 (Euler) 临界荷载

$$P_{cr} = \pi^2 EI / l^2 \quad (1.12)$$

由上述可见, 静力法求临界荷载首先假定杆件已处于新的平衡状态, 并据此列出平衡微分方程, 然后解此方程并结合边界条件得到一组与未知常数数目相等的齐次方程; 对于新的平衡形式要求齐次方程组的系数行列式必须等于零, 即 $D=0$, 从而解出临界力 P_{cr} 。稳定特征方程 $D=0$ 通常简称为稳定方程。

1.3.2 能量法

静力法通过建立轴心受压构件微弯状态时的平衡方程求出临界荷载的精确解, 但是对于有些轴心受压构件, 如变截面的或者压力沿轴线变化的构件, 静力法得到的是变系数微分方程, 求解十分困难, 有时甚至无法求解, 这时就需要采用其他方法, 如近似计算方法中的能量法求解。能量法已广泛应用于轴心受压构件、压弯构件、受弯构件和板壳结构的稳定计算。

用能量法求解临界荷载的途径主要有能量守恒原理和势能驻值原理。

1. 能量守恒原理求解临界荷载

用能量守恒原理解决结构弹性稳定问题的方法是铁摩辛柯 (Timoshenko) 首先提出的, 故又称为铁摩辛柯能量法^[10]。保守体系处在平衡状态时, 贮存在结构体系中的应变能等于外力所做的功, 此即能量守恒原理。

当作用着外力的弹性结构偏离原始平衡位置而产生新的微小位移时, 如果应变能的增量 ΔU 大于外力功的增量 ΔW , 即此结构具有恢复到原始平衡位置的能力, 则结构处于稳定平衡状态; 如果 $\Delta U < \Delta W$, 则结构处于不稳定平衡状态而导致失稳; 临界状态的能量关系为

$$\Delta U = \Delta W \quad (1.13)$$

式 (1.13) 是铁摩辛柯能量法计算临界力的基本方程。

仍以图 1.9a 所示两端铰接轴心受压直杆说明能量守恒原理求解临界力的具体过程。当轴向力 $P = P_{cr}$ 时, 压杆发生横向挠曲, 杆件中产生弯曲应变能增量

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \quad (1.14)$$

以 $M = -EIy''$ 代入后, 有

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y'')^2 dx \quad (1.15)$$

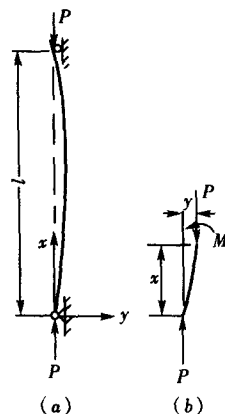


图 1.9 两端铰接轴心受压构件
(a) 轴心受压; (b) 任一截面平衡关系