王玉民 杜晓林 主编

概率论与数理统计学习指导

清华大学出版社
http://www.tup.com.cn

王玉民 杜晓林 主编

概率论与数理统计学习指导

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是概率论与数理统计学习指导书.全书共分11章,每章包括内容提要,学习目的与要求,思考、讨论题及答案,练习、作业题及答案,阶段测验题及答案等内容.针对学生在学习过程中经常遇到的问题,书中精选了一些有代表性的典型例题进行了详细地解答,并结合思考、讨论题及练习、作业题帮助学生澄清一些易混淆和易理解错误的概念.

本书可供高等院校农、林、工科类各专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/王玉民,杜晓林主编.—北京:清华大学出版社,2007.9
ISBN 978-7-302-15786-1

Ⅰ.概… Ⅱ.①王… ②杜… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第113578号

责任编辑:佟丽霞 王海燕
责任校对:刘玉霞
责任印制:李红英
出版发行:清华大学出版社 **地 址**:北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn **邮 编**:100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机:010-62770175 **邮购热线**:010-62786544
投稿咨询:010-62772015 **客户服务**:010-62776969
印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185×230 **印 张**:15.25 **字 数**:310千字
版 次:2007年9月第1版 **印 次**:2007年9月第1次印刷
印 数:1~4000
定 价:22.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177转3103 产品编号:025726-01

《概率论与数理统计学习指导》
教材编写组人员

主　编　王玉民　杜晓林

副主编　白荣凤　于景华

参　编　侯首萍　张俊芳　梁宏英

主　审　赵广生

前言

概率论与数理统计是高等农林院校的一门重要基础理论课，又是在农业科学研究中应用最为广泛的一门课程. 这门课程学习的好坏，不仅对学生学习后续课程，而且也对学生应用概率统计知识解决实际问题的能力产生极为重要的影响.

在全国高校扩招以后，农林院校的学生入学成绩普遍较扩招以前有所下降，特别是北京等直辖市的高考招生比例较大，新生入学成绩偏低. 同时，由于农林院校高等数学等基础课学时较少，学生对许多基础知识都掌握得不好，数学训练也比较薄弱，这就导致他们常常不能准确地理解和掌握本课程的基本思想，不会运用适当的专业语言来描述所遇到的随机现象，因而无法找到正确的解题思路和方法，这也给高校的数学教学工作带来了很大困难.

本书针对学生在学习过程中经常遇到的诸如对题目的理解、解决问题的思路和方法，以及如何使用公式或理论等问题，精心挑选了一些既符合课程要求，又具有代表性的典型例题，进行了详细的解答，借以向那些在学习中遇到困难的同学展示解决各类问题的一般途径和方法. 本书还通过一些思考、讨论题，帮助学生澄清一些容易混淆和容易产生错误理解的概念，帮助他们正确理解概率统计的思想实质.

为了拓宽学生的视野，提高他们解决实际问题的能力，本书还特别增加了在科学研究中极为有用的关于总体分布的检验方法和 SAS 软件使用简介. 同时，为了满足不同层次读者的需要，本书还挑选了一些历年的研究生入学考试题作为选学与提高内

容，借以对有志于考研或提高自己解题能力的同学提供帮助.

在本书的编写过程中，作者也引用了其他书籍中的一些例子，恕不能在此一一指明出处，谨向相关作者表示感谢.

由于作者水平所限，书中出现疏漏与不妥之处在所难免，恳请同行、专家和读者批评指正.

编　者

2007 年 7 月

目录

第1章 随机事件与概率

1.1 内容提要

1. 随机事件与样本空间

(1) 必然现象与随机现象

在一定条件下,必然出现某种结果或必然不出现某种结果的现象称为必然现象.

在相同条件下,多次进行同一试验,所得结果却不尽相同,并且事先无法预测将会出现什么结果的现象称为随机现象.

(2) 随机试验与随机事件

在相同条件下可以重复进行,每次试验的结果不止一个,并且所有可能出现的结果都是已知的,但在一次试验之前又不知道究竟会出现哪一个结果的试验称为随机试验.

在一次随机试验中,可能出现也可能不出现的结果称为随机事件,简称事件,通常用大写英文字母 $A,B,\cdots$ 表示.其中,不能再分解的随机事件称为基本事件.

每次试验中,在一定条件下必然发生的事件称为必然事件,记为 Ω; 不可能发生的事件称为不可能事件,记为 $\varnothing$.

(3) 样本空间

在一个随机试验 E 中,一个基本事件称为 E 的一个样本点,记为 ω; 由 E 的所有样本点构成的集合称为 E 的样本空间,记为 $\Omega=\{\omega_i \mid i=1,2,\cdots\}$.

2. 事件的关系与运算

(1) 子事件与事件的相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 为事件 B 的子事件,记为 $A\subset B$. 显然,对任一事件 A,均有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若 A 是 B 的子事件,而 B 又是 A 的子事件,即 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

(2) 和事件与积事件

事件 A 与事件 B 至少发生一个的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件,记为 $A\cup B$;
事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件,记为 $A\cap B$ 或 AB.

(3) 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记为 $A-B$. 显然 $A-B=A-AB$.

(4) 互斥事件与对立事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互斥，或称事件 A 与事件 B 互不相容.

若事件 A 与事件 B 互斥，且其和事件为必然事件，即 $AB=\varnothing$，且 $A+B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 为对立事件或互逆事件，记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

(5) 互斥事件完备组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：① $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，② $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个互斥事件完备组.

(6) 事件之间的运算规则

随机事件之间的运算满足下列规则：

① 交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

② 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$；

③ 分配率　$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC), (AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

④ 德·摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, (\overline{AB})=\overline{A}\cup\overline{B}$；

⑤ 包含律　$A\subset A\cup B, B\subset A\cup B, AB\subset A, AB\subset B$；

⑥ 吸收律　$A\cup\Omega=\Omega, A\cup\varnothing=A, A\Omega=A, A\varnothing=\varnothing$；

⑦ 重叠律　$A\cup A=A, AA=A$；

⑧ 对立律　$A\overline{A}=\varnothing, A\cup\overline{A}=\Omega$.

3. 随机事件的概率

(1) 概率的统计定义

在相同条件下重复进行 n 次试验，如果事件 A 发生的频率 $\frac{\mu}{n}$ 在某个确定数值 p 的附近摆动，并且随着试验次数 n 的增大，摆动幅度越来越小，则称数值 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

(2) 古典概型

若随机试验 E 满足以下两个条件：

① 试验的结果只有有限个，即样本空间只有有限个样本点，设为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

② 每个结果出现的可能性都相同，即样本点 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 出现的可能性都一样. 则称 E 为古典概型.

设随机试验 E 为古典概型，样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，如果事件 A 包含 μ 个样本点，即

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_\mu}\},$$

则称 $\frac{\mu}{n}$ 为随机事件 A 的概率，记为 $P(A)=\frac{\mu}{n}$.

(3) 几何概率

在等可能性的前提下,利用图形的几何度量(长度、面积、体积等)表示随机事件概率的方法称为几何概率.

(4) 概率的公理化定义与性质

设Ω是随机试验E的样本空间,如果对于E的每一事件A,都有确定的实数$P(A)$与之对应,并且满足下列三条公理:

公理 1(非负性) 对于任一随机事件$A\subset\Omega$,都有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

公理 2(规范性) $P(\Omega)=1,P(\varnothing)=0$;

公理 3(可加性) 对于Ω中两两互斥的事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$都有

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots,$$

则称$P(A)$为事件A的概率.

4. 概率的基本性质

(1) 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个两两互斥的事件,则$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$;

(2) 设A为任一事件,则$P(\overline{A})=1-P(A)$;

(3) 设A,B为两个事件,且$B\subset A$,则$P(A-B)=P(A)-P(B)$;

(4) 设A,B为任意两个事件,则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

1.2 学习目的与要求

(1) 理解样本空间、随机事件、互斥事件和对立事件等基本概念;

(2) 领会差事件、和事件与积事件的含义;

(3) 掌握事件之间的运算规则;

(4) 理解概率的统计定义、古典概型、几何概率和概率的公理化定义;

(5) 掌握利用概率的各种定义和性质计算随机事件概率的方法.

1.3 典型例题分析

例 1 写出下列各随机试验的样本空间:

(1) 同时掷两枚骰子,记录两枚骰子可能出现的点数;

(2) 同时掷两枚骰子,记录两枚骰子的点数之和;

(3) 一袋子中装有标号分别为 1,2,3,4 的 4 只球,从袋中不放回地连取两只,记录两次取球的结果;

(4) 将(3)的取球方式改为一次从袋中任取两只,记录取球的结果;

(5) 将(3)的取球方式改为从袋中任取一只,放回袋中再任取一球,记录两次取球的结果;

(6) 将(3)的取球方式改为不放回地从袋中一个接一个地取球,直到取得 1 号球为止,记录取球的结果;

(7) 对某厂生产的产品进行检验,合格的记上"正品",不合格的记上"次品".如果连续查出 2 个次品,或检查完 4 个产品就停止检查,记录检查的结果;

(8) 将一尺之棰折成 3 段,观察各段的长度.

解 (1) 若用 x_i,y_j 分别表示两枚骰子出现的点数,则结果可用二元数组(x_i,y_j)表示,于是

$$\Omega_1=\{(x_i,y_j)\mid x_i,y_j=1,2,3,4,5,6\},$$

样本点总数为 $n_1=6\times6=36$ 个.

(2) 仍用 x_i,y_j 分别表示两枚骰子出现的点数,用 z 表示所得点数之和,于是

$$\Omega_2=\{z\mid z=x_i+y_j;\ x_i,y_j=1,2,3,4,5,6\},$$

即 $\Omega_2=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.此时,样本点总数为 $n_2=11$ 个.

(3) 若用 x_i,y_j 分别表示两次取出球的标号,则结果也可用二元数组(x_i,y_j)表示.注意到在不放回的取球试验中,两只球的标号一定不同,所以

$$\Omega_3=\{(x_i,y_j)\mid x_i,y_j=1,2,3,4;\ x_i\neq y_j\},$$

即 $\Omega_3=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.此时,样本点总数为 $n_3=P_4^2=4\times3=12$ 个.

(4) 若用 x_i,y_j 分别表示所取两球的标号,由于一次取出两球,没有先后之分,所以不用考虑次序,于是

$$\Omega_4=\{(x_i,y_j)\mid x_i,y_j=1,2,3,4;\ x_i<y_j\},$$

即 $\Omega_4=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.此时,样本点总数 $n_4=C_4^2=6$ 个.

(5) 仍用 x_i,y_j 分别表示两次取出球的标号,则结果也可用二元数组(x_i,y_j)表示.注意到在有放回的取球试验中,两只球的标号可以相同,所以

$$\Omega_5=\{(x_i,y_j)\mid x_i,y_j=1,2,3,4\},$$

此时,样本点总数 $n_5=4\times4=16$ 个.

(6) 由于这个试验具有以下特点:一是不放回地取球,各次所取球的标号互不相同;二是只要取得 1 号球试验就停止,因而所取最后一球必然是 1 号球,因此

$$\begin{aligned}\Omega_6=\{&(1),(2,1),(3,1),(4,1),(2,3,1),(2,4,1),(3,2,1),(3,4,1),(4,2,1),(4,3,1),\\&(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1),(4,2,3,1),(4,3,2,1)\},\end{aligned}$$

此时,样本点总数为 $n_6=1+P_3^1+P_3^2+P_3^3=16$ 个.

(7) 若用 0 表示次品,用 1 表示正品,则每个样本点均可用最少两位、最多四位数字来

表示，且少于四位数时，其最后两位一定是00；达到四位数时，其前三位不会出现00，即

$$\Omega_7 = \{00,100,0100,1100,1010,0110,1110,0101,1101,1011,0111,1111\},$$

此时，样本点总数为 $n_7=12$.

(8) 分别用 x,y,z 表示所得各段棰的长度，于是

$$\Omega_8 = \{(x,y,z) \mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\},$$

此时，样本点总数有(不可数)无穷多个.

例 2 射击运动员使用的靶纸是同心圆环形区域，其中，10环区是半径为5cm的圆域，9环、8环、7环区依次是半径为10cm，15cm和20cm的圆环. 某射手向靶纸打了一枪，试表示下列各随机事件：

(1) 脱靶；

(2) 得8环；

(3) 至少得8环；

(4) 最多得8环.

解法 1 分别用 A_1,A_2,A_3,A_4 表示命中10环、9环、8环和7环区，于是

(1) $(\overline{A_1+A_2+A_3+A_4})=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$；

(2) A_3；

(3) $A_1+A_2+A_3$；

(4) A_3+A_4.

解法 2 若分别用 A_1,A_2,A_3,A_4 表示半径依次为5cm、10cm、15cm和20cm的圆形区域，则

(1) $\overline{A}_4$；

(2) $A_3\overline{A}_2$；

(3) A_3 或 $A_1\cup A_2\cup A_3$；

(4) $A_4\overline{A}_2$.

例 3(2001年考研题，数学四) 对于任意两个事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是( ).

A. $A\subset B$　　B. $\overline{B}\subset\overline{A}$　　C. $A\overline{B}=\varnothing$　　D. $\overline{A}B=\varnothing$

解 利用作图法，把4个选项与 $A\cup B=B$ 比较可知，应选择D.

例 4 化简下列各事件表达式：

(1) $(A\cup C)(B\cup C)$；

(2) $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}-(\overline{AB})$；

(3) $(A\cup B)(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解 (1) 由于 $(A\cup C)(B\cup C)=AB\cup AC\cup BC\cup C$，且 $AC\subset C$，$BC\subset C$，所以

$$AC\cup BC\cup C=C,$$

从而

$$(A \cup C)(B \cup C) = AB \cup C.$$

(2) 由于 $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}=(A\cup\overline{A})B\cup(A\cup\overline{A})\overline{B}=B\cup\overline{B}=\Omega$,所以

$$AB \cup \overline{A}B \cup A\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B} - (\overline{AB}) = \Omega - (\overline{AB}) = AB.$$

(3) 由于$(A\cup B)(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup AB\cup\overline{A}B\cup B=B$,同样

$$(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B}) = A\overline{A} \cup A\overline{B} \cup \overline{B}\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{B},\text{所以}$$

$$(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B}) = B\overline{B} = \varnothing.$$

例 5(多项选择题) 种植 3 棵树木,用 $A_i(i=1,2,3)$表示第 i 棵树木成活,则表示至少有一棵树木成活的事件为( ).

A. $A_1\cup A_2\cup A_3$ B. $\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

C. $A_1\cup(A_2-A_1)\cup[(A_3-A_2)-A_1]$ D. $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

解 首先,由于 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示 A_1,A_2,A_3 至少有一个出现,所以选 A.

其次,因为

$$\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 = \Omega(\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}) = \overline{\overline{A}}_1 \cup \overline{\overline{A}}_2 \cup \overline{\overline{A}}_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

所以选 B.

又因为

$$\begin{aligned}
&A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup [(A_3 - A_2) - A_1]\\
&=A_1 \cup A_2\overline{A}_1 \cup (A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
&=(A_1 \cup A_2\overline{A}_1) \cup (A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
&=(A_1 \cup \overline{A}_1A_1 \cup A_1A_2 \cup \overline{A}_1A_2) \cup (A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
&=[(A_1+\overline{A}_1)(A_1 \cup A_2)] \cup (A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
&=A_1 \cup A_2 \cup (A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
&=[A_1 \cup (A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1] \cup A_2\\
&=[A_1 \cup \overline{A}_1A_1 \cup A_1(A_3\overline{A}_2) \cup \overline{A}_1(A_3\overline{A}_2)] \cup A_2\\
&=[(A_1+\overline{A}_1)(A_1 \cup A_3\overline{A}_2)] \cup A_2\\
&=A_1 \cup A_3\overline{A}_2 \cup A_2\\
&=A_1 \cup [A_2 \cup \overline{A}_2A_2 \cup A_2A_3 \cup \overline{A}_2A_3]\\
&=A_1 \cup [(A_2 \cup \overline{A}_2)(A_2 \cup A_3)]\\
&=A_1 \cup A_2 \cup A_3,
\end{aligned}$$

所以,C 也入选(事实上,此题采用作图法将更为简捷);

至于 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,显然表示"恰好有一棵成活",所以 D 当然不能入选;

因此,应当选择 A,B 和 C.

小结 在上述几个题目的推演过程中,反复使用了事件运算所满足的以下运算律:

交换律 $AB=BA,A\cup B=B\cup A$;

结合律 $(AB)C=A(BC),(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

包含律 $\varnothing\subset A,AB\subset A$;

吸收律 $A=A\cup\varnothing=A\cup AB,A\Omega=A,AA=A,A\cup A=A$;

对立律 $A+\overline{A}=\Omega$.

可见,熟练掌握这些运算律,对于准确、简练地表示一个事件是非常重要的.

另一方面,作图法直观、简单,利用作图法,常可迅速找到正确答案.

例 6 设 A,B,C 是任意三个随机事件,则下列命题正确的是( ).

A. 若 $A\cup C=B\cup C$,则 $A=B$　　B. 若 $A-C=B-C$,则 $A=B$

C. 若 $AC=BC$,则 $A=B$　　D. 若 $AB=\varnothing$,且 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$,则 $\overline{A}=B$

分析 要想说明一个命题成立,就需要对这个命题进行严格论证.但是,若要说明一个命题不成立,则只要能够举出一个反例即可.所以,对于估计不成立的命题,经常采用举反例的方法加以说明.

解 前三个命题都不成立,现举例如下:

在 5 次定点投篮中,事件 A,B,C_1,C_2 都表示投中的次数.其中,

$$A=\{0,1,2\},\quad B=\{4,5\},\quad C_1=\{0,1,2,3,4,5\},\quad C_2=\{3\},$$

由于 $A\cup C_1=B\cup C_1=C_1=\Omega,A-C_1=B-C_1=\varnothing,AC_2=BC_2=\varnothing$,但 $A\neq B$,所以 A,B,C 都不成立.

又因为 $AB=\varnothing$,且 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$,所以 $(\overline{\overline{A}\overline{B}})=(\overline{\overline{A}})\cup(\overline{\overline{B}})=A\cup B=\overline{\varnothing}=\Omega$,即有 $AB=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$,因此 $\overline{A}=B$.

例 7(1989 年考研题,数学四) 若以 A 表示“甲产品畅销,乙产品滞销”,则其对立事件 $\overline{A}$ 为( ).

A. “甲产品滞销,乙产品畅销”　　B. “甲、乙两种产品都畅销”

C. “甲产品滞销”　　D. “甲产品滞销,或乙产品畅销”

解 分别用 B,C 表示甲、乙两种产品畅销,则 $A=B\overline{C}$,于是利用德·摩根律有

$$\overline{A}=(\overline{B\overline{C}})=\overline{B}\cup\overline{\overline{C}}=\overline{B}\cup C,$$

即 A 的对立事件是“甲产品滞销,或乙产品畅销”,所以 D 正确.当然,其余的三个都不正确,因此选择 D.

例 8 设 A,B,C 是任意三个事件,则下列等式成立的是( ).

A. $(A\cup B)-B=A-B$　　B. $(A-B)\cup B=A$

C. $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$　　D. $A\cup B=A\overline{B}\cup\overline{A}B$

解 由于 $(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B$,所以 A 正确;同时,由于

$$(A-B)\cup B=(A\overline{B})\cup B=AB\cup A\overline{B}\cup B\cup B\overline{B}$$