普通高等教育“十一五”国家级规划教材

复变函数 (第四版)

余家荣 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

复 变 函 数

（第四版）

余家荣　编

高等教育出版社

内容提要

本修订版是在第三版的基础上修订的.

本书内容包括:复数及复平面、复变函数、复变函数的积分、级数、留数、保形映射、解析开拓以及调和函数共八章,其中除单值性定理外,属于复变函数课程的一般内容.附录一讲述集与逻辑记号,供参考;附录二至六供师生在可能情况下参阅或选讲.书中对于不属于复变函数课程一般内容的部分加上了*号,对习题中较难问题也加上了*号.

本书可供大学数学、力学、天文、统计等专业以及师范院校数学专业作为教材,也可供自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/余家荣编.—4版.—北京:高等教育出版社,2007.11

ISBN 978-7-04-022529-7

Ⅰ.复… Ⅱ.余… Ⅲ.复变函数-高等学校-教材
Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第155058号

策划编辑 李蕊 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 吴文信
版式设计 马敬如 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印刷	高等教育出版社印刷厂		
		版次	1979年2月第1版
开本	787×960 1/16		2007年11月第4版
印张	15.5	印次	2007年11月第1次印刷
字数	290 000	定价	19.70元

物料号 22529-00

第四版序

这本教材是在我国高等学校教学改革过程中编写的. 在 1949 年以前，我国高等学校招生人数少，教学水平不齐，而且许多学科一般都采用外国教材. 1953 年高等教育部参照苏联经验，进行高等学校教学改革，组织翻译苏联高校各科教材，大量增加高校招生名额. 于是我国高等教育开始得到较大发展. 1962 年教育部(高等教育部此前已并入教育部)根据我国实际情况，进一步进行高等学校教学改革，组织我国教师自行编写高校各科教材，为此后高等教育的蓬勃发展奠定了良好的基础. 1949 年后，特别是 1978 年后，我国在各方面都取得了突出成就，对此，高等学校的教学改革作出了重要贡献.

1962 年教育部召开制定高校数学专业教学计划及组织编写该专业各科教材的会议. 本书编者参加了这一会议，并在会议上接受了编写复变函数教材的任务. 当时传达了毛泽东主席的指示：在编写教材中要贯彻“少而精”及“理论联系实际”的原则. 通过多年实践，编者认识到这些确是编写教材及教学中所应遵循的基本原则. 教材内容“少而精”才能使读者易于掌握有关基本内容. “理论联系实际”似应理解为应使教材易教易学，并且符合有关专业需要，而不是仅仅在教材中举出若干实际应用的例子. 本教材初稿编审完毕后，高等教育出版社于 1966 年暑期印出了校样，但直到 1978 年才通过修订印出了第一版，以后又陆续通过修订印出了第二版及第三版.

本版对第三版作了少量改动，增添了若干习题，在较难习题前加上了 * 号、还增加了一个关于多复变函数的附录六. 编者发现，在多维复空间中引进一种极坐标，关于多重幂级数及多复变全纯函数的一些基本结果，不难由关于简单幂级数及单复变全纯函数的相应结果导出，例如确定了多重幂级数的收敛域及收敛球等. 如前已指出，附录内容不属于复变函数课程一般教学范围.

在本教材历次编订及出版过程中，承武汉大学及有关高校热情帮助，承高等教育出版社对本书编写大纲多次组织讨论，对书稿多次组织审查、编辑和出版，使编者在编订中有幸接受几代有关数学同行及几代有关编审先生的宝贵指教以及广大读者的宝贵意见；希望第四版教材能继续得到这样的指教和意见. 在此，本书编者谨对武汉大学、高等教育出版社及有关高校，对几代有关数学同行、几代有关编审先生以及对本书提出了宝贵意见的广大读者，致以最诚挚的谢意！

余家荣

2007 年 5 月 12 日于武汉

第三版序(摘录)

本修订版对第二版中有些地方的讲述作了改动,希望读者能较易掌握有关内容;在有些地方对历史沿革及发展作了简单介绍.

本书第二版中插入了一些加上 * 号的内容,它们不属于我国数学专业复变函数课程一般教学范围.编者认为保留这些内容供教师和学生在可能情况下参阅或选讲还是有益的(其中有些内容在一般教科书中还不易找到).为了教学方便,在本版中采纳了先妻涂光重女士的建议,把这些内容写成附录二~五(除了单值化定理加上 * 号放入第七章外),放在教材正文后面.

附录一讲述集与逻辑记号.有关概念和记号使用起来对教与学都比较方便,并已由国内外数学同行广泛采用.建议没有接触过这些概念和记号的读者参阅这一附录.

本书中对于不属于复变函数一般教学内容的部分加上 * 号.

本修订版中增加了"习题答案及说明",以便学生解题时参考.

在本书修订过程中,先妻涂光重女士不幸病逝!她对于我的所有工作,始终给予了卓有成效的帮助.谨以本书的出版作为对于她的纪念.

余家荣

1998 年 11 月 15 日于武汉

第二版序(摘录)

本书第二版对第一版中有关内容作了修订,还增添了下列内容:

国际数学界已普遍采用的集的有关概念及逻辑记号,对教与学都比较方便.本书部分地采用了它们,并且把有关基本知识写入附录一.

为了使本书中不含没有证明的定理(皮卡定理除外),补充了正规族,黎曼定理、边界对应定理及若尔当定理的证明.

还补充了同伦及同调形式的柯西定理,整函数的无穷乘积展式及亚纯函数的部分分式展式,单值性定理,多复变函数等.

以上不属于我国复变函数一般教学内容的章节,本书中加上了*号作为标志,供教师及同学们在可能情况下参阅或选讲.

本书第一版中曾包含"解析函数对平面场的应用"一章,其中有些内容在当前只有历史上的意义.本修订版中把这一章删去了.

余家荣

1991年10月5日于武汉

第一版序(摘录)

本书讲述单复变函数的分析理论以及几何理论的基本内容.其中有些内容在教学中可以根据具体情况决定取舍,例如可不讲多角形映射公式的证明、泊松公式及狄利克雷问题等.对多值函数可限于讨论只有一个有限支点的情况.如果这样,第二章第5—7段的内容可以删去一些;对于对数函数和幂函数可只采用限制辐角使其成为单值函数的方法来处理;第五章第4段的例3也可删去.如果教学时间还不够,可考虑再删去亚纯函数零点与极点的个数、儒歇定理以及保形映射一般原理的证明等.关于解析函数的应用,采用本书时可根据实际情况选讲.本书每章后附有较多习题,以备选作.

余家荣
1978年8月28日于武汉

目　　录

引言 …… 1

第一章　复数及复平面 …… 3

§1. 复数及其几何表示 …… 3

1. 复数域 …… 3

2. 复平面 …… 3

3. 复球面及无穷大 …… 8

§2. 复平面的拓扑 …… 10

4. 初步概念 …… 10

5. 区域·曲线 …… 11

习题一 …… 13

第二章　复变函数 …… 16

§1. 解析函数 …… 16

1. 极限与连续性 …… 16

2. 导数·解析函数 …… 20

3. 柯西－黎曼条件 …… 21

§2. 初等函数 …… 22

4. 指数函数 …… 22

5. 多值函数导引:辐角函数 …… 25

6. 对数函数 …… 26

7. 幂函数 …… 29

8. 三角函数 …… 34

习题二 …… 37

第三章　复变函数的积分 …… 40

§1. 柯西定理 …… 40

1. 复变函数的积分 …… 40

2. 几个引理 …… 42

3. 柯西定理 …… 47

§2. 柯西公式 …… 51

4. 柯西公式 …… 51

5. 莫勒拉定理 …… 55

习题三 …… 55

第四章　级数 …… 59
§1. 级数和序列的基本性质 …… 59
1. 复数项级数和复数序列 …… 59
2. 复变函数项级数和复变函数序列 …… 63
3. 幂级数 …… 65
§2. 泰勒展式 …… 69
4. 解析函数的泰勒展式 …… 69
5. 零点 …… 72
6. 解析函数的唯一性 …… 73
§3. 洛朗展式 …… 74
7. 解析函数的洛朗展式 …… 74
8. 解析函数的孤立奇点 …… 78
9. 解析函数在无穷远点的性质 …… 81
10. 整函数与亚纯函数概念 …… 82
习题四 …… 84
第五章　留数 …… 89
§1. 一般理论 …… 89
1. 留数定理 …… 89
2. 留数的计算 …… 90
§2. 留数计算的应用 …… 92
3. 积分的计算(Ⅰ) …… 92
4. 积分的计算(Ⅱ) …… 97
5. 亚纯函数的零点与极点的个数·儒歇定理 …… 102
习题五 …… 106
第六章　保形映射 …… 110
§1. 单叶解析函数的映射性质 …… 110
1. 一般概念 …… 110
2. 导数的几何意义 …… 112
§2. 分式线性函数及其映射性质 …… 114
3. 分式线性函数 …… 114
4. 分式线性函数的映射性质 …… 116
5. 两个特殊的分式线性函数 …… 119
§3. 黎曼定理 …… 121
6. 最大模原理·施瓦茨引理 …… 121
7. 黎曼定理及边界对应概念 …… 123
8. 实例 …… 126
习题六 …… 130

第七章　解析开拓 …… 135
§1. 解析开拓概念 …… 135
1. 对称原理 …… 135
2. 用幂级数的解析开拓·奇点 …… 140
3. 一般概念 …… 143
4. 沿曲线的解析开拓·*单值性定理 …… 146
§2. 多角形映射公式 …… 148
5. 基本公式 …… 148
6. 实例 …… 152
习题七 …… 155
第八章　调和函数 …… 157
§1. 调和函数及其性质 …… 157
1. 一般概念 …… 157
2. 中值公式与泊松公式·极值原理 …… 159
§2. 狄利克雷问题 …… 161
3. 圆盘上的狄利克雷问题 …… 161
4. 上半平面上的狄利克雷问题 …… 163
习题八 …… 165
*附录一　集与逻辑记号 …… 167
1. 集的初步概念 …… 167
2. 函数与映射 …… 168
3. 逻辑记号 …… 169
习题 …… 170
*附录二　若尔当定理 …… 172
*附录三　同调及同伦形式的柯西定理 …… 177
1. 链与闭链·指标 …… 177
2. 同调形式的柯西定理 …… 178
3. 同伦形式的柯西定理 …… 181
*附录四　整函数的无穷乘积展式及亚纯函数的部分分式展式 …… 185
1. 无穷乘积 …… 185
2. 整函数的无穷乘积展式 …… 189
3. 亚纯函数的部分分式展式 …… 191
*附录五　黎曼映射定理及边界对应定理的证明 …… 196
*1. 正规族 …… 196
2. 黎曼映射定理续证 …… 197
3. 边界对应定理的证明 …… 199
*附录六　多复变函数 …… 204

1. 解析函数 …… 204
2. 幂级数 …… 205
3. 柯西公式与泰勒展式 …… 208
习题答案及说明 …… 211
索引 …… 228
外国人名译名对照表 …… 236

引　言

复数是 16 世纪人们在解代数方程时引入的. 在 17 世纪和 18 世纪,随着微积分的发明与发展,人们研究了复变数函数(简称复变函数),特别是把实变数初等函数推广到复变数情形,得到了一些重要结果.

因为复数最初是单纯地从形式上推广而引进的,并且在 18 世纪以前,由于人们对于复数的有关概念了解得不够清楚,用它们进行计算得到了一些矛盾,所以复数在历史上长期不能为人们所接受."虚数"这一名词本身就恰好反映了这一点.

可是复数不是什么神秘的东西,它是由一对实数表示出来的,有许多几何量与物理量,也可用一对实数来表示,例如平面上点的直角坐标、平面向量、平面上的速度与力等等;而复数恰好可以用来表示这些量. 在一些情况下,应用复数表示这些量计算起来比较方便. 在 18 世纪,J. 达朗贝尔(1717—1783)与 L. 欧拉(1707—1783)等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义,澄清了复数的概念,并且应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题. 直到这时,人们才接受了复数,复变函数论才能顺利地建立和发展.

复变函数的理论基础是在 19 世纪奠定的. A. L. 柯西(1789—1857)、K. 魏尔斯特拉斯(1815—1897)和 G. F. B. 黎曼(1826—1866)是这一时期的三位代表人物. 柯西和魏尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数,黎曼开始研究复变函数的映射性质.

复变函数论的建立和发展与解决实际问题的需要有联系. 例如复变函数论的主要基础之一——柯西定理,是柯西在研究水波传播问题时,设法计算一些积分而发现的;流体力学、电学和空气动力学的研究都促进了这门学科的发展.

在 20 世纪,复变函数论随着它的领域不断扩大而发展成为一门庞大的数学分支. 在复变函数的解析性质、映射性质、多值性质、随机性质、函数空间以及多复变函数等方面,都取得了许多重要的成果. 这些问题有些是在复变函数论本身发展中提出的,有些是由实际问题或其他学科中提出的. 例如拟保形映射的研究就是从亚音速及超音速飞机的设计中提出的. 对于自然科学的其他部门(如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等)以及数学中其他分支(如微分方程、积分方程、概率论、数论等),复变函数论都有重要的应用.

从 20 世纪 30 年代开始,我国数学工作者在单复变和多复变函数方面,做过

许多重要的工作. 在 40—50 年代,华罗庚教授关于多复变函数典型域上调和分析的工作,在调和分析、复分析、微分方程等研究中,有广泛深入的影响. 在 70 年代,杨乐、张广厚教授在单复变函数的值的分布和渐近值理论中,得到了首创性的重要成果. 从 80 年代起,我国的数学工作者在数学的各领域中开展了富有成果的研究工作. 这些都受到国际数学界的重视. 事实证明,中国人民具有无穷无尽的潜力,一定能在不远的将来,使我国在数学上全面达到世界先进水平.

本书主要讲述单复变函数的基本理论. 书中内容包括单复变函数的导数、积分、级数以及映射性质等,而且主要只限于讨论一类特殊的复变函数,即所谓解析函数.

第一章　复数及复平面

§1. 复数及其几何表示

1. 复数域　复变函数论的出发点是复数. 在代数中已经讲述过复数. 为了便于以后讨论,我们把有关复数的基本定义及结论,在这里回顾一下.

每个复数 z 具有 $x+\mathrm{i}y$ 的形状,其中 x 和 $y\in\mathbf{R}$(全体实数所成的集),i 是虚数单位(也可记作 $\sqrt{-1}$);x 及 y 分别称为 z 的实部和虚部,分别记作 $x=\operatorname{Re} z$ 及 $y=\operatorname{Im} z$. 如果两个复数 z_1 和 z_2 的实部及虚部分别相等,那么这两个复数称为相等,记作 $z_1=z_2$. 如果 $\operatorname{Im} z=0$,那么把 z 看作实数,记作 $z=\operatorname{Re} z$;如果 $\operatorname{Im} z\neq 0$,那么 z 称为虚数;如果 $\operatorname{Im} z\neq 0$,而 $\operatorname{Re} z=0$,那么 z 称为纯虚数,记作 $z=\mathrm{i}\operatorname{Im} z$. 全体复数所成的集记作 $\mathbf{C}$,$\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个子集.

对实数引进加、减、乘、除运算,并且运算满足一些法则(交换律、结合律、分配律等). 这样就是在集 $\mathbf{R}$ 上引进一个代数结构,使其成为实数域 $\mathbf{R}$. 对复数也可以引进加、减、乘、除运算. 设 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{R}$. 复数的加法和乘法运算由下列等式定义:

$$(a_1+\mathrm{i}b_1)+(a_2+\mathrm{i}b_2)=(a_1+a_2)+\mathrm{i}(b_1+b_2),$$
$$(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+\mathrm{i}(a_1b_2+a_2b_1).$$

在上列第二式中,把乘积展开成"变数"i 的多项式,然后用 -1 代替 i^2,就得到右边的结果. 减法和除法则定义为加法和乘法的逆运算. 我们有

$$(a_1+\mathrm{i}b_1)-(a_2+\mathrm{i}b_2)=(a_1-a_2)+\mathrm{i}(b_1-b_2),$$
$$\begin{aligned}\frac{a_1+\mathrm{i}b_1}{a_2+\mathrm{i}b_2}&=\frac{(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_2-\mathrm{i}b_2)}{(a_2+\mathrm{i}b_2)(a_2-\mathrm{i}b_2)}\\&=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\mathrm{i}\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\quad(a_2+\mathrm{i}b_2\neq 0).\end{aligned}$$

可以证明,复数的加减乘除与实数的相应运算满足同样的一些法则. 对复数引进这些运算,就是在集 $\mathbf{C}$ 上引进一个代数结构,使其成为复数域 $\mathbf{C}$;它可看作是由实数域 $\mathbf{R}$ 扩张而得的.

2. 复平面　在平面上取直角坐标,平面上的任一点可由一对实数唯一确定. 这时在平面上或对集 $\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid x$ 及 $y\in\mathbf{R}\}$ 引进两点($\mathbf{R}^2$ 中一个元素称

为一点)的距离,即引进一种拓扑结构[①];这时平面或集 $\mathbf{R}^2$ 称为平面 $\mathbf{R}^2$,它是一个二维欧氏空间. $\mathbf{R}$ 是有代数结构的一维欧氏空间.

一个复数由它的实部和虚部、亦即由一对实数所唯一确定. 作映射 $\mathbf{C}\to\mathbf{R}^2: z=x+\mathrm{i}y\mapsto(x,y)\in\mathbf{R}^2$. 于是在集 $\mathbf{C}$ 与平面 $\mathbf{R}^2$ 之间建立了一个双射(即一一对应的映射). 把 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 看作表示 $x+\mathrm{i}y$,并把它称为点 $x+\mathrm{i}y$. 这时平面 $\mathbf{R}^2$ 就称为平面 $\mathbf{C}$,它是对集 $\mathbf{C}$ 引进两点的距离即一种拓扑结构而得到的一个欧氏空间. 集 $\mathbf{R}$ 与横坐标轴上一切点所组成的集相对应,集 $\mathrm{i}\mathbf{R}=\{\mathrm{i}y\mid y\in\mathbf{R}\}$ 与纵坐标轴上一切点所组成的集相对应. 因此把横坐标轴及纵坐标轴分别称为实轴及虚轴. 实轴在原点右方及左方的部分分别称为正实轴及负实轴;虚轴在原点上方及下方的部分分别称为上半虚轴及下半虚轴. 实轴上方及下方的半平面分别称为上半平面及下半平面;虚轴右方及左方的半平面分别称为右半平面及左半平面. 复平面 $\mathbf{C}$ 有时按照表示复数的字母用 $z,w,\cdots$ 而称为 z 平面, w 平面,等等.

复数除了可以用复平面 $\mathbf{C}$ 上的点表示外,还可以用 $\mathbf{C}$ 上的向量来表示. 把复平面 $\mathbf{C}$ 上一切向量所组成的集记作 V. V 中向量可以分成一些等价类:一向量经过平行移动(把平行移动记作"关系 P")而得的所有向量,与原向量构成一个等价类. 集 V 对于关系 P 的所有等价类构成一个新的集,称为集 V 对于关系 P 的商集,记作 V/P[②]. 复数 $z=x+\mathrm{i}y$(x 及 $y\in\mathbf{R}$)可以用在实轴及虚轴上的投影分别是 x 及 y 的任一向量来表示,亦即可用一个等价类中的任一向量来表示. 有时我们把"复数"与"向量"用作同义语.

在图 1 中,把向量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的起点放在原点. 向量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的长度即向量起点到终点的距离称为复数 z 的模,记作 $|z|$. 显然 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 实轴的正向与向量 z 之间的夹角(这里假定 $z\neq0$)称为 z 的辐角,记作 θ,显然 θ 有无穷多个不同的值,把它们记作

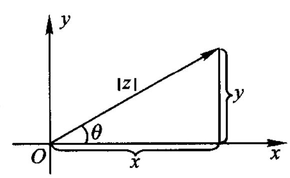

图 1

$$\operatorname{Arg} z=\theta+2k\pi \quad (k\in\mathbf{Z}),$$

或简单记作

$$\operatorname{Arg} z=\theta+2\pi\mathbf{Z},$$

其中 $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. $\operatorname{Arg} z$ 中只有一个值 α 满足条件 $-\pi<\alpha\leqslant\pi$;它叫做 z 的辐角的主值,记作 $\arg z$. 以后也把 $\operatorname{Arg} z$ 中任一确定的值记作 $\arg z$.

复数 $z(\neq0)$ 的实部和虚部可以用 z 的模和辐角表示为:

$$\operatorname{Re} z=|z|\cos\operatorname{Arg} z,\operatorname{Im} z=|z|\sin\operatorname{Arg} z.$$

---

① 从距离可引进邻域等概念.

② 每一等价类是 V/P 的一个元素.

于是 z 本身可以表示为

$$z=|z|(\cos \operatorname{Arg} z+\mathrm{i}\sin \operatorname{Arg} z),$$

这个式子称为 z 的三角表示式.

两复数 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 称为(相互)共轭的. 如果其中之一用 z 表示,那么另一个用$\bar{z}$表示. 显然点 z 和$\bar{z}$关于实轴对称. 因此

$$|z|=|\bar{z}|;$$

此外,$\operatorname{Arg} z=-\operatorname{Arg} \bar{z}$. 这个式子可理解为:把 $\operatorname{Arg} z$ 的每个值乘以 -1,就得到 $\operatorname{Arg} \bar{z}$的一个值;反过来也是这样.

现对复数的加减法作出几何解释. 根据定义,复数 $z_1=a_1+\mathrm{i}b_1$ 及 $z_2=a_2+\mathrm{i}b_2$ 相加与向量 z_1 及 z_2 相加的规律一致. 在力学和物理学中,如力、速度、加速度等都可用向量来表示,这就说明了复数可以用来表示实有的物理量. 当向量 $z_1(\neq 0)$ 及 $z_2(\neq 0)$ 的方向不是相同或相反时(图 2),作起点在原点的向量 z_1 及 z_2,取 z_1 及 z_2 为两边作平行四边形,从原点出发以对角线所作的向量就表示 z_1+z_2. 当 z_1 及 z_2 的方向相同或相反时,z_1+z_2 也不难作出.

由于 $-z_2$ 表示与 z_2 长度相等、方向相反的向量,而且 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$,可以仿照 z_1+z_2 的情形作出 z_1-z_2(图 2). 显然,复数相减与向量相减的法则也一致.

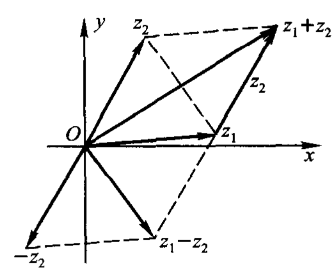

图 2

现在导出关于两复数的和及差的模的几个不等式. 如图 2,从点 z_1 出发到点 z_1+z_2 的向量是向量 z_2. 于是向量 z_1,z_2 及 z_1+z_2 构成一个三角形的三边. 因为三角形一边的长不能超过另两边长的和,并且不能小于它们的差,所以我们有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{2.1}$$

以及

$$|z_1+z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{2.2}$$

不难证明,即使向量 z_1,z_2 及 z_1+z_2 平行于同一直线,从而不能构成一个三角形的三边时,(2.1)及(2.2)仍然成立.

在(2.1)及(2.2)中用 $-z_2$ 代替 z_2,我们就得到

$$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{2.3}$$

以及

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{2.4}$$

我们也可直接证明(2.3)及(2.4). 事实上,在图 2 中,从点 z_2 出发到点 z_1

的向量是 z_1-z_2. 考虑向量 z_1, z_2 及 z_1-z_2 所构成的三角形,就可推出这两个不等式.

把 z_1 及 z_2 看作复平面 **C** 上的两点,不难看出,$|z_1-z_2|$ 表示 z_1 及 z_2 两点之间的距离.

关于复数的模,还有下列结果:设复数 $z=x+\mathrm{i}y$,其中 x 及 y 是实数. 显然

$$|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z| \text{ 及 } |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|. \tag{2.5}$$

又因 $z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$,所以

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}. \tag{2.6}$$

例 1　试用复数表示圆的方程

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \quad (a\neq 0),$$

其中 a,b,c,d 是实常数(如果 $a=0$,b 及 c 不全为 0,这是直线方程).

令　$z=x+\mathrm{i}y$,代入方程中:由于

$$x^2+y^2=z\bar{z},$$

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}},$$

我们就得到

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0,$$

其中 $\beta=\frac{1}{2}(b+\mathrm{i}c)$.

例 2　设 z_1 及 z_2 是两个复数. 读者可自行证明:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\ \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},$$

$$\bar{\bar{z}}_1=z_1.$$

现在把不等于零的复数 z_1 及 z_2 写成三角表示式:

$$z_1=|z_1|(\cos \mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{i}\sin \mathrm{Arg}\, z_1),$$

$$z_2=|z_2|(\cos \mathrm{Arg}\, z_2+\mathrm{i}\sin \mathrm{Arg}\, z_2),$$

由乘法的定义得

$$z_1z_2=|z_1||z_2|[\cos(\mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{Arg}\, z_2)$$
$$+\mathrm{i}\sin(\mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{Arg}\, z_2)],$$

由此得

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{Arg}\, z_2. \tag{2.7}$$

(2.7)中后一等式应理解如下:对于 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值,一定有 $\mathrm{Arg}\, z_1$ 及 $\mathrm{Arg}\, z_2$ 的各一值,使其和与前者相等;反过来也是这样. 其次,由除法的定义得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\mathrm{Arg}\, z_1-\mathrm{Arg}\, z_2)+\mathrm{i}\sin(\mathrm{Arg}\, z_1-\mathrm{Arg}\, z_2)],$$

由此得