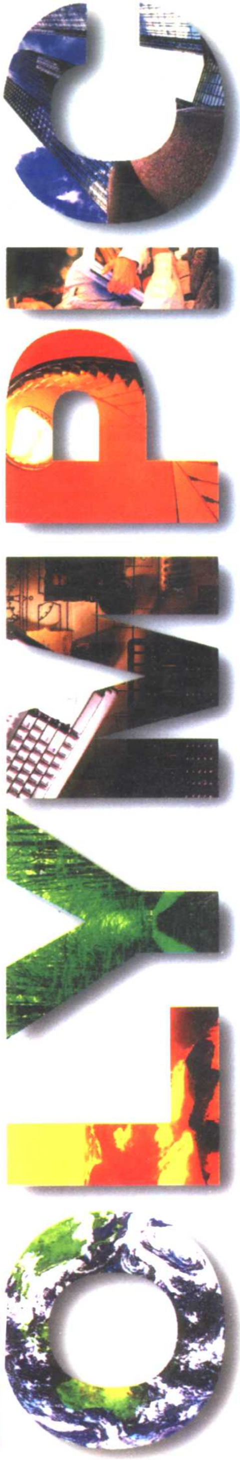
裘宗沪／主编



奥林匹克数学教程

中国数学会普及工作委员会 编

初一分册

开明出版社

奥林匹克数学教程

（初一分册）

主 编　裘宗沪　刘玉翘
编 著　王连笑　陈传理
　　　　罗增儒　刘诗雄

开 明 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学教程:初一分册/裘宗沪主编:中国数学会普及工作委员会编.—北京:开明出版社,1998.7
ISBN 7-80077-749-9

Ⅰ.奥… Ⅱ.①裘… ②中… Ⅲ.数学课-初中-教材
Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 20739 号

奥林匹克数学教程

(初一分册)

裘宗沪 主编

*

开明出版社出版发行

(北京海淀区西三环北路 19 号)

廊坊人民印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

开本 850×1168　1/32　印张 6.75　字数 175 千字

1999 年 1 月北京修订版　　1999 年 1 月第 1 次印刷

印数:00,001—15,000

ISBN 7-80077-749-9/G·519　定价:8.50 元

前言

1981年，中国数学会开始举办“高中数学联赛”，经过1981、1982、1983三年的实践，这一群众性的数学竞赛活动得到了全国广大中学师生的欢迎，也得到了教育行政部门、各级科学技术协会以及社会各阶层人士的肯定和支持；“试题所涉及的知识范围不超出现行教学大纲”这一命题原则，也得到了更多的理解和拥护，由此“高中数学联赛”已形成制度。同时，全国各地都提出了举行“初中数学联赛”的要求。1984年，中国数学会普委会委托天津数学会举办一次初中数学邀请赛，有14个省、市、自治区参加。这次活动的成功，为后来举办“初中数学联赛”摸索了很多经验。当年11月，在宁波召开的中国数学会第三次普及工作会议一致通过了举办“初中数学联赛”的决定，并详细商定了一些具体办法，规定“初中数学联赛”在每年4月的第一个星期日举行。会上湖北省数学会、山西省数学会、黑龙江省数学会分别主动承担了1985年、1986年、1987年的具体工作，从此，“初中数学联赛”也形成了制度。

为了规范数学竞赛的命题，明确竞赛的要求，并使参加竞赛的同学有所遵循，应广大师生和教练员的要求，1992年中国数学会普委会第七次全国工作会议上讨论并通过了“数学竞赛大纲（初审稿）”。后几经研讨和修改于1994年3月福州会议上通过了“初中数学竞赛大纲（修订稿）”。

本书是根据“初中数学竞赛大纲（修订稿）”并参考了“教学大纲”而编写的。按年级分三册，在内容安排上力争与课堂教学同步，

每册都比课堂教学内容加深加宽，并补充了教学中没有而竞赛中要求的内容、方法和思想。在编排体例上按教程的形式，分章节，每节后都有习题；为便于教和学，每个习题书后都附有解答或提示。为了给同学们提供练习的机会，每一本教程都另配有一本练习册，练习册与教程的章节顺序一致，其题目主要选自各级各类竞赛试题或预选题。

由于目前我国初中教学正向九年义务教育大纲过渡，本教程在安排上考虑了过渡时期的特点，在内容编排上兼收并蓄，使用者可按教学进程删减选用部分章节，有些课外内容可提前或错后讲解。

参加本书编写的都是中国数学奥林匹克高级教练员，他们在培训学生和教师上有丰富的经验，本书是他们经验的总结。我们出版这套书，渴望对参加竞赛的同学、辅导教师提供学习、辅导的资料和方法，以教材的形式编写就是希望能更加实用。

书中的缺点和错误欢迎读者指正。

裘宗沪

1994年5月

修订说明

由中国数学会普及工作委员会组织一批中国数学奥林匹克高级教练员编写的《奥林匹克数学教程》和《奥林匹克数学教程练习册》自1994年问世至今，历经五年。全国各地许多奥校以及各级各类学校的广大数学爱好者使用以后，无论在内容形式上和装祯设计上均给予好评。不少读者指名要购买此书。

为了提高这套书的质量，不辜负广大读者的厚爱，应广大读者要求，我们对《奥林匹克数学教程》及《奥林匹克数学教程练习册》中存在的不足进行了技术上的修订。本次修订我们除对书中存在的问题进行了纠正和调整，还对开本和版式做了更改和变动，以符合数学竞赛及数学爱好者的不同需要。

真诚地希望广大读者继续关心和使用本套教程。欢迎对书中的不足批评指正，使之不断完善。

编　者

1998年10月

目　录

第一章　算术与代数

§1.1　字母表示数

代数就是用英文字母或者希腊字母来表示数，然后进行数的运算，讨论一些数学问题.

〔例 1〕　甲、乙、丙三数的平均数是 a，甲、乙两数的平均数是 b，求丙数是多少？

解　这里 a 和 b 要看作已知的数.

甲、乙、丙三数之和是 $3a$.

甲、乙两数之和是 $2b$.

因此，丙是

$$3a-2b.$$

〔例 2〕　某人用 a 元买了一件外衣、一顶帽子和一双鞋子. 外衣比鞋贵 b 元，买外衣和鞋比帽子多花了 c 元，问买鞋花了多少钱？

解　a,b,c 都是已知的数.

先把外衣和鞋看作一件东西，它与帽子的价格之和是 a，差是 c. 利用“和差问题”的解法，求出

外衣和鞋之和是　$\dfrac{a+c}{2}$.

题目又告诉我们，外衣价与鞋价之差是 b，再做一次“和差问题”.

$$鞋价 =\left(\frac{a+c}{2}-b\right) \div 2$$

$$=\frac{a+c}{4}-\frac{b}{2}$$

$$=\frac{a+c-2b}{4}.$$

因为三样东西的价格都应是正数，所以对 a,b,c 应要求

$$a>0, \quad b>0, \quad c>0.$$

$$a>c.$$

$$a+c>2b.$$

从上面两个例子可以看出，虽然用字母表示数，但是运算和算术中数的运算是一样的. 当我们开始学代数的时候，把原来做过的算术题中的数换成字母，再做一遍，对熟悉字母的表示和代数运算是有好处的.

再看一些例子.

〔例 3〕 有两堆煤，第一堆比第二堆多a吨，当两堆煤各用去b吨后，剩下的第一堆煤是第二堆煤的β倍，两堆煤各有多少吨？

解 这里 β 是希腊字母，用它来表示倍数.

画一张简单的示意图：

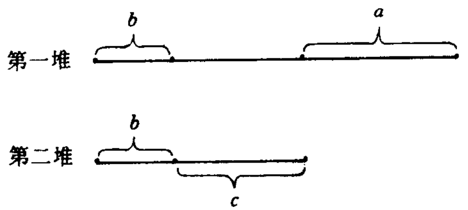


图 1-1

从图1-1可以看出，两堆煤都去掉b吨后，设第二堆还余下c吨，那么$a+c$是c的β倍，即可写出代数式

$$a + c = \beta c,$$

$$c(\beta - 1) = a,$$

即

$$c = \frac{a}{\beta - 1}.$$

因此，第一堆煤是

$$b + \frac{a}{\beta - 1} + a = b + (1 + \frac{1}{\beta - 1})a = b + \frac{\beta}{\beta - 1}a.$$

第二堆煤是　$b + \frac{a}{\beta - 1}$.

〔例 4〕　一件工作，甲做 a 天可完成，乙做 b 天可完成，问两人合做几天可完成？

解　设这件工作总工作量是 1，因此甲每天完成 $\frac{1}{a}$，乙每天完成 $\frac{1}{b}$，两人合做每天能完成 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. 两人合做需要

$$1 \div (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = \frac{ab}{a + b} \quad (天).$$

〔例 5〕　一件工作，甲做 a 天能完成，乙做 b 天能完成，现在甲先做了 c 天（$c < a$），余下的工作由乙继续完成，乙需做几天可以完成全部工作？

解　设这件工作总工作量是 1，甲先做了

$$\frac{1}{a} \times c,$$

还余下的工作量是

$$1 - \frac{c}{a},$$

让乙继续完成需要的天数是

$$(1 - \frac{c}{a}) \div \frac{1}{b} = \frac{(a - c)b}{a}.$$

〔例 6〕　有若干只鸡和兔子，它们共有 a 个头，b 只脚，鸡和兔

子各多少只？

解 设想 a 只都是兔子，就有 $4a$ 只脚，比题目中已知的脚数多了

$$4a-b,$$

把一只鸡算作兔子要多 $(4-2)$ 只脚，因此

$$\text{鸡数}=(4a-b)\div(4-2)$$

$$=\frac{4a-b}{2},$$

而兔子数目是

$$a-\frac{4a-b}{2}=\frac{b-2a}{2},$$

因为兔数与鸡数不能是负数，所以 a 和 b 要满足关系

$$4a\geqslant b\geqslant 2a.$$

〔**例 7**〕 一支部队排成 a 米长队行军，在队尾的张明要与在最前面的营长联系，他用 t_1 分钟时间 追上了营长. 为了回到队尾，在追上营长的地方等待了 t_2 分钟. 如果他从最前头跑步回队尾，那么要多少时间？

解 常常用 t 来表示时间，为了表示两个不同的已知时间，我们将字母 t，添上下标，写成 t_1 和 t_2.

队伍行进的速度是 $\frac{a}{t_2}$ (米/分)，

跑步的速度与队伍行进速度之差是 $\frac{a}{t_1}$，因此跑步的速度是

$$\frac{a}{t_1}+\frac{a}{t_2}.$$

跑步回队尾，就是与队伍共同走了 a 米，需要的时间是

$$a\div\left[\left(\frac{a}{t_1}+\frac{a}{t_2}\right)+\frac{a}{t_2}\right]$$

$$=1 \div \frac{t_2+t_1+t_1}{t_1t_2}$$

$$=\frac{t_1t_2}{2t_1+t_2}.$$

〔**例 8**〕 图 1-2,$ABCD$ 是一个梯形,E 是 AD 的中点,直线 CE 把梯形分成甲、乙两部分,它们的面积之比是 $\lambda(>1)$. 求三角形 ABC 面积与梯形面积之比?

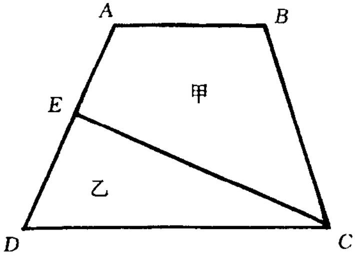


图 1-2

解 这 λ 是希腊字母,它常用来表示比.

因为 E 是中点,三角形 CDE 与三角形 CEA 面积相等. 我们可以设三角形 CDE 面积是 1,那么甲这部分面积是 λ,而三角形 ABC 面积是 $\lambda-1$. 梯形面积是 $\lambda+1$.

$$\frac{\text{三角形 } ABC \text{ 面积}}{\text{梯形 } ABCD \text{ 面积}}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

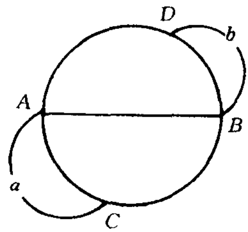
习题 1.1(答案见 P159)

1. 有两筐苹果,如果从第一筐拿出 a 只放到第二筐里,两筐的苹果数就一样多. 如果从第二筐拿出 b 只放到第一筐里,第一筐苹果是第二筐的 2 倍. 求每筐原来各有几只苹果?

2. 某次考试,按成绩排先后次序,前 10 名的平均成绩是 a 分,前 8 名的平均成绩是 b 分,第 9 名比第 10 名多 c 分. 问第 10 名的成绩是多少分?

3. 买一些 4 分和 8 分的邮票,共花了 a 元,已知 8 分的邮票比 4 分的邮票多 b 张,那么两种邮票各买了多少张?

4. 如图,A、B 是圆的直径的两端,小张在 A 点,小王在 B 点同时出发沿圆周行走,他们在 C 点第一次相遇,C 离 A 点 a 米;在 D 点第二次相遇,D 离 B 点 b 米,求这个圆的周长?



5. 一辆快车与一辆慢车分别从甲、乙两地同时开出,它们相向而行.快车经过a小时到达乙地,慢车经 b 小时到达甲地,已知平均每小时快车比慢车多行驶 m 千米,问开出后多少时间两车相遇?

6. 一件工作,甲独做要 a 天完成,乙独做要 $b(<a)$天完成.这件工作,先由甲做了若干天,然后由乙继续做完,从开始到完成共用了 c 天($b<c<a$).问甲、乙两人各做了几天?

§1.2 列方程的技巧

代数总结了算术中的一般规律,因此方法上具有普遍性,英国伟大的科学家牛顿写的代数教科书,就叫作《普遍算术》,牛顿在这本书里写了一段话:"要解答一个问题,如果里面包含着数量间的抽象关系,只要把题目从日常的语言译成代数的语言就行了."牛顿所说的代数语言就是方程."从日常的语言译成代数的语言"这也是我们通常的列方程,请看一个例子.

〔**例 1**〕 下面是一个不很复杂的古老问题:

马和骡子并排地走着,背上都驮着重重的包裹.马抱怨着说它的负担过分重了."你抱怨些什么?"骡子回答它,"你瞧,如果我从你背上拿过来一个包裹,我的负担就有你的两倍,如果你从我背上拿去一个包裹,你驮着的也不过和我的一样."马驮多少包裹?骡子

驮多少包裹?

解

日常的语言	代数的语言
骡子驮的包裹数:	x(个)
如果你从我背上拿去一个包裹,	$x-1$
你驮的和我一样.	$x-1=(x-2)+1$
马驮的包裹数:	$x-2$
如果我从你背上拿过来一个包裹,我的负担就有你的两倍	$x+1=2[(x-2)-1]$

因此就归结为解方程:

$$x+1=2x-6,$$

$$x=7.$$

答:马驮 5 个包裹,骡子驮 7 个包裹.

很明显,解方程并不难,而列方程却要困难些,从上面例子看出,列方程的诀窍实际上就是把日常的语言翻译成代数的语言,不过代数的语言是很简洁的,并不是每一句日常的语言都能不费事地翻译出来."翻译"过程中,重要的是一些数量关系的沟通.要善于这样的沟通,就要从算术开始练习.因此,先要从算术的和、差、倍数、比例等着手解应用题,然后再练习列方程.这好比先要会做一些基本的针线活,然后再学缝纫机.

为了便于与算术方法对照,对例 1 作图 1-3:

马拿走 1 个,骡子加上 1 个,后者将是前者的 2 倍,因此,马拿走 1 个后,与骡子这条线段上右半段一样,即 $1+1+1+1=4$,马驮了 $4+1=5$(个).

列方程时,所设的未知数,应尽可能要与题目中出现的数量都

方便地建立关系.

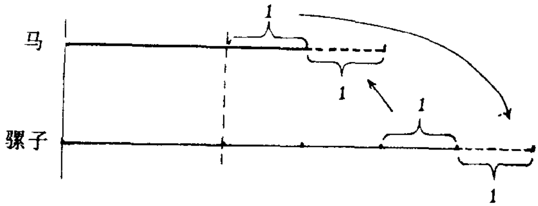


图 1-3

〔例2〕 甲、乙、丙、丁四个孩子共有45本书，如果甲减2本，乙加2本，丙增加一倍，丁减少一半，那么四个孩子的书就一样多，问每个孩子各有几本书？

解 我们可以设某一个孩子有书 x 本，但不如设四个孩子一样多时每人有 x 本书更方便.

日常的语言	代数的语言
甲减 2 本，原有	$(x+2)$本
乙加 2 本，原有	$(x-2)$本
丙增加一倍，原有	$\frac{x}{2}$ 本
丁减少一半，原有	$2x$ 本
共有 45 本	$(x+2)+(x-2)+\frac{x}{2}+2x=45$

列出的方程化简后是

$$4\frac{1}{2}x=45, x=10,$$

$$10+2=12,\ 10-2=8,\ \frac{10}{2}=5,\ 2\times10=20.$$

答：甲有 12 本，乙有 8 本，丙有 5 本，丁有 20 本.

从不同的角度，建立数量关系的联系，列出的方程形式上是不同的.

〔**例 3**〕　一批工人到甲、乙两地进行清理工作，甲工地的工作量是乙工地的工作量的 $1\frac{1}{2}$ 倍. 上午去甲工地的人数是去乙工地人数的 3 倍，下午这批工人中有 $\frac{7}{12}$ 的人去甲工地，其余工人到乙工地，到傍晚时，甲工地的工作已做完，乙工地的工作还需 4 名工人再做一天，那么这批工人有多少人？

解

日常的语言	**代数的语言**
这批工人的人数	x
一天完成甲、乙两工地的工作需要人数	$x+4$
一天内完成乙工地工作需要人数占总人数的 $\dfrac{1}{1+1\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$	$(x+4)\cdot\dfrac{2}{5}$
一天完成乙工地工作需要人数	$\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{x}{4}+\dfrac{5x}{12})+4$

因此可以列出：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}+\frac{5x}{12}\right)+4=(x+4)\times\frac{2}{5}$$

化简得
$$\frac{1}{3}x+4=\frac{2}{5}x+\frac{8}{5}$$

$$\frac{1}{15}x=\frac{12}{5}$$

$$x=36.$$

上面是对"一天内完成乙工地工作需要的人数"这一数量，从