

(1997—2006)

十年成人高考 数学试题详解

傅崇武 编

成人高考应试用书
普高数学复习资料
文科理科试题齐全

金盾出版社

2007新版题解

十年成人高考数学试题详解

(1997~2006)

傅崇武 编

金盾出版社

内 容 提 要

本书编入 1997 年至 2006 年成人高考的所有数学试题,并给出了详细解答,部分选择题和填空题给出了两种或三种不同解法,有的题附有点评,指出重点或介绍方法。

本书由远及近逐年编写,可找出考试重点,了解命题特点和趋势,是你夺取高分的瑰宝。

本书对普通高中学生的复习和应考,也是难得的辅导资料。

图书在版编目(CIP)数据

十年成人高考数学试题详解/傅崇武编. —北京:金盾出版社,2007.3

ISBN 978-7-5082-4484-6

I. 十… II. 傅… III. 数学-成人教育:高等教育-入学考试-解题 IV. G723.460.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 009659 号

金盾出版社出版、总发行

北京太平路 5 号(地铁万寿路站往南)

邮政编码:100036 电话:68214039 83219215

传真:68276683 网址:www.jdcbs.cn

封面印刷:北京印刷一厂

正文印刷:北京金盾印刷厂

装订:双峰装订厂

各地新华书店经销

开本:787×1092 1/16 印张:8.5 字数:220 千字

2007 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

印数:1—8000 册 定价:13.00 元

(凡购买金盾出版社的图书,如有缺页、
倒页、脱页者,本社发行部负责调换)

前 言

成人高校招生统一考试已有二十多年,我们把近十年的成人高考数学试题编辑成册,供准备参加 2007 年成人高考的考生参考。

本书对 1997 年至 2006 年成人高考的所有数学试题都给出了详细的解答和点评,部分选择题和填空题给出了两种或三种不同的解法,尽量减少阅读中的困难。

本书由远及近逐年编写,主要好处是:

一、便于考生对照历届试题,学习和体会考试大纲,做到知己知彼;便于考生从历届试题中找出考试重点,有针对性地复习,达到事半功倍的效果。

二、了解命题的特点和趋势或动向。例如近年来增加了对向量、导数、概率等知识点的考查,而且对导数部分的考查力度有不断加大的趋势。又如近年来选择题一直占总分数的一半(75 分),而 2006 年却在总分不变的情况下增加到了 85 分。考生掌握的准确信息越多,考试的信心越足,取得优异成绩的可能性越大。

总体来说,成人高考试题比普通高考试题略显容易,但近年来不少普通高考试题常常带有成人高考试题的痕迹。例如 2001 年春季北京市第(8)题:若 A, B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角,则点 $P(\cos B - \sin A, \sin B - \cos A)$ 在()。

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

而 1990 年成人高考理科第(12)题是:设 α, β 是锐角三角形的两个内角,则()。

A. $\cos \alpha > \sin \beta, \cos \beta > \sin \alpha$ B. $\cos \alpha < \sin \beta, \cos \beta < \sin \alpha$

C. $\cos \alpha > \sin \beta, \cos \beta < \sin \alpha$ D. $\cos \alpha < \sin \beta, \cos \beta > \sin \alpha$

又如 2006 年全国卷 I 的 21 题(文):设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 短轴的一个端点, Q 为椭圆上的一个动点,求 $|PQ|$ 的最大值,更是 1998 年成人高考理科第 25 题的特例(见本书第 30 页)。

有的省市普通高中毕业会考说明的题型示例中,选取了一定数量的成人高考试题。如某市 2007 年会考说明的题型示例部分,约 200 道客观性试题中 1/4 选自历届成人高考试题。因此,本书对普通高中学生的复习和应考,也是难得的辅导资料。

限于水平,书中错误和不当之处在所难免,欢迎读者批评指正。

编者

2006.10

金盾版教辅图书,科学实用, 物美价廉,欢迎选购

高中物理知识结构图解(第三次修订的彩色版)	12.00 元
高考数学(文科)应试诀窍	28.50 元
高考数学(理科)应试诀窍	25.00 元
高考智取三关·数学	19.00 元
高考智取三关·物理	19.50 元
高考智取三关·化学	20.00 元
高考智取三关·生物	22.00 元
高考智取三关·理科综合	21.00 元
高考智取三关·语文	21.00 元
高考智取三关·英语	29.00 元
高考智取三关·政治	18.00 元
高考智取三关·历史	16.00 元
高考智取三关·地理	17.00 元
高考智取三关·文科综合	17.50 元
全国十年高考状元作文精析	15.50 元
中学语文学习指导	20.50 元
初中现代文阅读得高分秘诀	9.00 元
学生汉字图示速记手册	19.00 元
高考文言文优选精练	16.50 元
高考现代文语段优选精练	13.50 元
高考数学命题背景与解法指导	29.00 元
高考语文命题背景与备考指导	25.00 元
高考物理命题趋势与试题解析	7.00 元
高考数学选择题双解 100 例	4.00 元
高考数学解答题多解 125 例	13.00 元
智慧的阶梯·初中数学解题思维窍门	15.50 元
智慧的阶梯·初中数学策略开放题集锦	15.50 元
智慧的阶梯·初中数学解题易错点剖析	15.00 元
智慧的阶梯·小学数学解题思维窍门	13.00 元
黄冈高考文科综合阶段复习新题解	22.00 元

以上图书由全国各地新华书店经销。凡向本社邮购图书者,另加 10% 邮挂费。书价如有变动,多退少补。邮购地址:北京市丰台区晓月中路 29 号院金盾出版社邮购部,联系人:徐玉珏,邮政编码:100072,电话:(010)83210682,传真:(010)83219217。

目 录

1997 年文科	(1)
1997 年理科	(7)
1998 年文科	(15)
1998 年理科	(24)
1999 年文科	(33)
1999 年理科	(39)
2000 年文科	(46)
2000 年理科	(52)
2001 年文科	(59)
2001 年理科	(66)
2002 年文科	(74)
2002 年理科	(79)
2003 年文科	(86)
2003 年理科	(92)
2004 年文科	(98)
2004 年理科	(103)
2005 年文科	(109)
2005 年理科	(114)
2006 年文科	(120)
2006 年理科	(125)



1997 年文科

一、选择题

1. 设集合 $A=\{0,3\}$, $B=\{0,3,4\}$, $C=\{1,2,3\}$, 则 $(B \cup C) \cap A$ 等于().

- A. $\{0,1,2,3,4\}$ B. 空集 C. $\{0,3\}$ D. $\{0\}$

【解】 $B \cup C = \{0,1,2,3,4\}$, 故 $(B \cup C) \cap A = \{0,3\}$. 选 C.

2. 二次函数 $y=x^2+4x+1$ 的最小值是().

- A. 1 B. -3 C. 3 D. -4

【解】 $y=x^2+4x+1=(x^2+4x+4)-3=(x+2)^2-3 \geq -3$. 当且仅当 $x=-2$ 时 $y=-3$. 故选 B.

3. 已知直线 l 与直线 $2x-5y-1=0$ 平行, 则 l 的斜率为().

- A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$

【解】 直线 $2x-5y-1=0$ 即 $y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$, 其斜率为 $\frac{2}{5}$, 两条有斜率的直线平行的必要条件是这两条直线的斜率相等, 故直线 l 的斜率为 $\frac{2}{5}$, 选 A.

4. 在下列四个函数中, 定义域为 $\{x|x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$ 的函数是().

- A. $y=\frac{1}{\sin x}$ B. $y=x^{-\frac{3}{2}}$ C. $y=x^{\frac{3}{2}}$ D. $y=\lg|x|$

【解】 因为对数函数 $y=\lg x$ 的定义域为 $x>0$, 而当 $x \neq 0$ 时 $|x|>0$, 故函数 $y=\lg|x|$ 的定义域为 $\{x|x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$, 选 D.

【点评】 事实上 $y=\frac{1}{\sin x}$ 的定义域为 $\{x|x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$; $y=x^{-\frac{3}{2}}$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$; $y=x^{\frac{3}{2}}$ 的定义域为 $\{x|x \geq 0\}$.

5. 已知角 α 的终边通过点 $P(-3,4)$, 则 $\sin \alpha + \cos \alpha + \tan \alpha =$ ().

- A. $-\frac{23}{15}$ B. $-\frac{17}{15}$ C. $-\frac{1}{15}$ D. $\frac{17}{15}$

【解】 设 O 为坐标原点, 则 $|OP|=5$. 因此, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, 从而

$$\sin \alpha + \cos \alpha + \tan \alpha = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{17}{15}.$$

选 B.

【点评】 任意角三角函数的定义是考点.

6. 设 $x^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{3}{2}}$, 则 $x=($).

A. 3

B. 9

C. $3^{\frac{9}{4}}$ D. $3^{\frac{9}{4}}$

【解】 $x^{\frac{3}{4}} = (3^{\frac{3}{4}})^2 = (3^2)^{\frac{3}{4}} = 9^{\frac{3}{4}}$, 故 $x=9$. 选 B.

7. $\sin \frac{17}{6}\pi = (\quad).$

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解】 $\sin \frac{17}{6}\pi = \sin(3\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 选 A.

8. $y = \frac{1}{2}\sin^2 x$ 的最小正周期是 $(\quad).$

A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

【解】 $y = \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2x$, 其最小正周期为 π . 选 B.

【点评】若函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 T , 常数 $\omega \neq 0$, 则函数 $y=f(\omega x)$ 也是周期函数, 其最小正周期为 $\frac{T}{|\omega|}$.

又, 倍角公式 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ 的两个推论:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ 和 } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

解题中常会用到.

9. 设 $\sqrt{5}, x+1, 5\sqrt{5}$ 成等比数列, 则 $x = (\quad).$

A. 4 或 -4

B. -4 或 6

C. 4 或 -6

D. 4 或 6

【解】由题设得 $(x+1)^2 = \sqrt{5} \times 5\sqrt{5} = 25$. 解得 $x=4$ 或 $x=-6$. 选 C.

【点评】三个数 a, b, c 成等比数列的必要条件是 $b^2 = ac$.

10. 过圆 $x^2 + y^2 = 25$ 上一点 $P(3, 4)$ 并与该圆相切的直线方程是 $(\quad).$

A. $3x - 4y = 0$ B. $3x + 4y = 0$ C. $3x - 4y - 25 = 0$ D. $3x + 4y - 25 = 0$

【解法一】圆 $x^2 + y^2 = 25$ 的圆心为坐标原点 O , 圆的一条半径 OP 所在直线的斜率 $k_{OP} = \frac{4}{3}$. 因为圆的切线垂直于过切点的半径, 所以该圆过 P 点的切线与线段 OP 垂直, 其斜率为 $-\frac{3}{4}$. 由点斜式方程可知, 所求直线方程为 $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$, 化简为 $3x + 4y - 25 = 0$. 选 D.

【解法二】因为若点在直线上, 则该点的坐标应该满足直线方程. 显然 $P(3, 4)$ 的坐标不满足方程 $3x - 4y = 0$, 不满足方程 $3x + 4y = 0$, 也不满足方程 $3x - 4y - 25 = 0$, 排除 A、B、C, 选 D.

【解法三】由定理“若点 $P(x_0, y_0)$ 是圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上的一点, 则圆的过 P 点的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$ ”可知, 所求直线方程为 $3x + 4y = 25$. 故选 D.

11. 函数 $y = 3^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像之间的关系是 $(\quad).$

A. 关于原点对称

B. 关于 x 轴对称

C. 关于直线 $y=1$ 对称D. 关于 y 轴对称

【解法一】在同一个坐标系内画出函数 $y=3^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的草图, 不难看出应当排除选项 A、B、C 而选 D (见图 97-1).

【解法二】若令 $f(x)=3^x$, 则 $f(-x)=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. 而函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图像关于 y 轴对称, 故选 D.

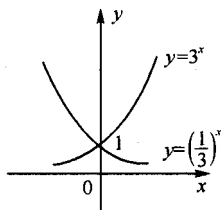


图 97-1

12. 函数 $f(x)=x|x|$ 是().

A. 偶函数, 又是增函数

B. 偶函数, 又是减函数

C. 奇函数, 又是增函数

D. 奇函数, 又是减函数

【解】函数 $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0), \\ -x^2 & (x<0). \end{cases}$ 从该函数的图像 (图 97-2) 不难看出, 它是奇函数, 又是增函数, 选 C.

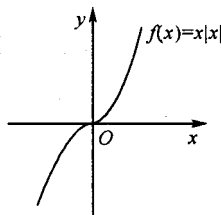


图 97-2

【点评】本题涉及以下各考点: 绝对值的定义、二次函数的图像、从函数的图像判断函数的奇偶性和单调性.

13. 设函数 $f(2x)=\log_3(8x^2+7)$, 则 $f(1)=()$.

A. 2

B. $\log_3 39$

C. 1

D. $\log_3 15$

【解】 $f(1)=\log_3\left[8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+7\right]=\log_3 9=2$. 选 A.

14. 从 13 名学生中选出两人担任正、副组长, 不同的选举结果共有().

A. 26 种

B. 78 种

C. 156 种

D. 169 种

【解】此题即求从 13 个不同的元素中任取两个元素的排列数:

$$A_{13}^2=13\times 12=156.$$

选 C.

15. 设 $\log_a \frac{2}{3} < 1 (0 < a < 1)$, 则 a 的取值范围是().A. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ B. $(0, 1)$ C. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ D. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$

【解】 $\log_a \frac{2}{3} < 1$ 即 $\log_a \frac{2}{3} < \log_a a$.

$\because 0 < a < 1, \therefore y=\log_a x$ 是减函数, $\therefore \frac{2}{3} > a, \therefore 0 < a < \frac{2}{3}$, 选 C.

二、填空题

16. 已知 $A(-2, 1), B(2, 5)$, 则线段 AB 的垂直平分线的方程是_____.

【解法一】设点 $P(x, y)$ 是线段 AB 的垂直平分线上的一点, 则 $|PA|=|PB|$, 因此

$$(x+2)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y-5)^2$$

化简得 $x+y-3=0$.

【解法二】线段 AB 的中点坐标为 $M(0, 3)$; A, B 所在直线的斜率为 $\frac{5-1}{2+2}=1$, 故所求直线

的斜率为-1,且过点M,由点斜式方程得

$$y-3=-x, \text{ 即 } x+y-3=0.$$

17. 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

【解】由 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{5}$ 得 $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{9}{25}$, 即

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{9}{25}.$$

$$\therefore \sin 2\alpha = -\frac{16}{25}.$$

18. 函数 $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ 的值域是 _____.

$$\begin{aligned} \text{【解法一】 } y &= \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \\ &= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

故 $y \in [-2, 2]$.

【解法二】 $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \sin(x + \theta) = 2\sin(x + \theta)$, 故 $y \in [-2, 2]$.

【点评】解法二引用了特殊的和差化积公式:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)$$

用它处理填空题、选择题比较方便. 若问当 x 取何值时 $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ 取最大(小)值时, 便要用解法一了.

19. 已知二次函数的图像以点(1,3)为顶点, 并通过点(2,5), 则此二次函数的解析式为 $y =$ _____.

【解】因为二次函数的图像以点(1,3)为顶点, 所以不妨设这个二次函数的解析式为

$$y = a(x-1)^2 + 3,$$

又因为该函数的图像过点(2,5), 所以有

$$(2-1)^2 a + 3 = 5.$$

解得 $a = 2$, 从而所求二次函数的解析式为

$$y = 2(x-1)^2 + 3, \text{ 或 } y = 2x^2 - 4x + 5.$$

【点评】以 (m, n) 为顶点的抛物线的解析式为

$$y = a(x-m)^2 + n. \quad (a \neq 0)$$

其中 a 为待定常数, 需要另一个条件来确定 a 的值.

20. 不等式 $|3x-5| < 8$ 的解集是 _____.

【解】 $|3x-5| < 8 \Leftrightarrow -8 < 3x-5 < 8 \Leftrightarrow -3 < 3x < 13 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{13}{3}$. 故原不等式的解

集为 $\{x | -1 < x < \frac{13}{3}\}$.

【点评】因为是求“解集”, 所以要把结果写成集合的形式.

21. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 3$, $BC = 7$, 则 $AC =$ _____.

【解】设 $AC=x$, 依余弦定理有

$$x^2 + 3^2 - 6x \cos 120^\circ = 7^2,$$

化简得 $x^2 + 3x - 40 = 0$, 即 $(x+8)(x-5) = 0$, 解得 $x=5$, 即 $AC=5$.

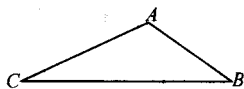


图 97-3

三、解答题

22. 计算 $125^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \log_7 343 - \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

【解】原式 $= (5^3)^{\frac{2}{3}} + (2^{-1})^{-2} + \log_7 7^3 - (27^{-1})^{-\frac{1}{3}}$
 $= 5^2 + 2^2 + 3 - 27^{\frac{1}{3}}$
 $= 25 + 4 + 3 - 3$
 $= 29.$

23. 设双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上一点 $P(a, b)$ 到直线 $y=x$ 的距离等于 $\sqrt{2}$, 其中 $a > b$, 求 a, b .

【解】因为点 $P(a, b)$ 在双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上, 所以 a, b 满足双曲线方程:

$$a^2 - b^2 = 1,$$

即

$$(a+b)(a-b) = 1 \quad ①$$

又因为点 P 到直线 $x - y = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 故有

$$\frac{a-b}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2},$$

即

$$a - b = 2 \quad ②$$

把②代入①得

$$a + b = \frac{1}{2} \quad ③$$

②③联立, 解得 $a = \frac{5}{4}, b = -\frac{3}{4}$.

【点评】一般而言, 问题中若有 n 个未知量, 就应列出 n 个独立的方程. 并解由这 n 个方程组成的方程组, 求出相关的未知量.

24. 实数 m 取何值时, 关于 x 的方程 $x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$ 的两根平方和最小? 并求出该最小值.

【解】因为原方程根的判别式

$$\Delta = (m-2)^2 + 4(m+3) = m^2 + 16 > 0,$$

所以原方程恒有二实根 x_1, x_2 . 由一元二次方程根与系数的关系有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m-2), \\ x_1 x_2 = -(m+3). \end{cases}$$

于是 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$
 $= (m-2)^2 + 2(m+3)$
 $= (m-1)^2 + 9.$

因此, 当 $m=1$ 时原方程两根的平方和最小, 最小值为 9.

【点评】解答中若缺少 $\Delta > 0$ 的计算是不完整的, 例如设 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ 的二实根, 当 a 取何值时, $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ 取得最小值, 并求出这个最小值. 此题应先由 $\Delta \geq 0$ 求出 a 的取值范围, 再求 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ 的最小值.

25. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 表示它的前 n 项和, 已知对于任何正整数 n 均有 $S_n = \frac{1}{6}a_n^2 + \frac{3}{2}n$. 求数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 和首项 a_1 .

【解】令 $n=1$, 则 $S_1 = a_1 = \frac{1}{6}a_1^2 + \frac{3}{2}$, 因而有

$$a_1^2 - 6a_1 + 9 = 0, \text{ 即 } (a_1 - 3)^2 = 0, a_1 = 3.$$

令 $n=2$, 则 $S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{6}a_2^2 + \frac{3}{2} \times 2$, 因而有

$$3 + a_2 = \frac{1}{6}a_2^2 + 3, \text{ 即 } a_2(a_2 - 6) = 0. a_2 = 0 \text{ 或 } a_2 = 6.$$

当 $a_2 = 6$ 时, $d = a_2 - a_1 = 3$, 当 $a_2 = 0$ 时 $d = 0 - 3 = -3$. 注意到 $S_n = \frac{1}{6}a_n^2 + \frac{3}{2}n$ 恒为正数, 可见 $d \neq -3$.

综上所述, $d = 3, a_1 = 3$.

【点评】对于任意的数列 $\{a_n\}$, 恒有 $a_1 = S_1; a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$.

26. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 过点 $P(1, 0)$ 作直线 l , 使得 l 与该椭圆交于 A, B 两点, l 与 y 轴交于 Q 点, P, Q 在线段 AB 上, 且 $|AQ| = |BP|$, 求 l 的方程.

【解】设直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$, 则 Q 点坐标为 $(0, -k)$. 把 $y = k(x-1)$ 代入椭圆方程得

$$\frac{1}{2}x^2 + [k(x-1)]^2 = 1,$$

化简得

$$(2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 2(k^2 - 1) = 0 \quad ①$$

因为 P, Q 两点在线段 AB 上, 且 $|AQ| = |BP|$ (见图 97-4), 不难看出线段 AB 的中点就是线段 PQ 的中点.

由方程①, 线段 AB 中点的横坐标为 $\frac{4k^2}{2(2k^2+1)}$, 而线段 PQ 中点

的横坐标为 $\frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$. 因而有

$$\frac{4k^2}{2k^2+1} = 1, \text{ 即 } 4k^2 = 2k^2 + 1.$$

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. 从而 l 的方程为:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 或 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点评】解决本题的关键之一是由题设挖掘出隐含条件: 线段 AB 与线段 PQ 有共同的中点.

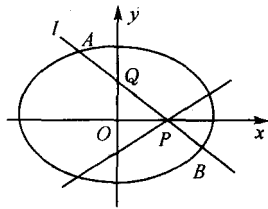


图 97-4



1997 年理科

一、选择题

1. 设集合 $M = \{x | x \geq -4\}$, $N = \{x | x < 6\}$, 则 $M \cup N$ 等于().

- A. 实数集 B. $\{x | -4 \leq x < 6\}$ C. 空集 D. $\{x | -4 < x < 6\}$

【解】 $M \cup N$ 为 M 与 N 的并集, 由图 97-5 可见, $M \cup N$ 等于实数集 $\mathbf{R}$, 选 A.

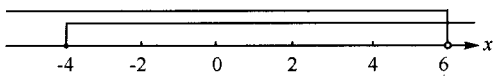


图 97-5

2. 已知角 $\alpha = 3$, 则 α 的终边在().

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【解】 $\alpha = 3$ 即 $\alpha = 3$ 弧度. 因为 1 弧度 $\approx 57^\circ 18'$. 故 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 即 α 的终边在第二象限, 选 B.

3. $\sin \alpha = \sin \beta$ 是 $\alpha = \beta$ 的().

- A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【解】若 $\alpha = \beta$, 则 $\sin \alpha = \sin \beta$, 由于正弦函数的周期性, 由 $\sin \alpha = \sin \beta$ 不能推出 $\alpha = \beta$, 因而 $\sin \alpha = \sin \beta$ 是 $\alpha = \beta$ 的必要但不充分条件, 选 B.

4. 函数 $y = 1 + x^3$ 的反函数是().

- A. $y = \sqrt[3]{x+1}$ B. $y = \sqrt[3]{x-1}$ C. $y = \sqrt[3]{x}-1$ D. $y = \sqrt[3]{x-1}$

【解】由 $y = 1 + x^3$ 得 $x^3 = y - 1$. 故 $x = \sqrt[3]{y-1}$, 因此 $y = 1 + x^3$ 的反函数是 $y = \sqrt[3]{x-1}$. 选 D.

5. 关于 x 的方程 $x^2 - (2\sin \theta)x - \cos^2 \theta = 0$ ().

- A. 有两个相等的实根 B. 没有实根
C. 有两个不等的实根 D. 有无实根不能判定

【解】原方程的判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2\sin \theta)^2 - 4(-\cos^2 \theta) \\ &= 4\sin^2 \theta + 4\cos^2 \theta \\ &= 4 > 0\end{aligned}$$

故原方程有两个不等的实根. 选 C.

6. 与原点距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、斜率为 1 的直线方程是().

- A. $x + y + 1 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$ B. $x + y + \sqrt{2} = 0$ 或 $x + y - \sqrt{2} = 0$

C. $x-y+1=0$ 或 $x-y-1=0$

D. $x-y+\sqrt{2}=0$ 或 $x-y-\sqrt{2}=0$

【解法一】设所求直线方程为 $x-y+c=1$, 依题意有

$$\frac{|c|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得 $c=\pm 1$. 选 C.

【解法二】因为所求直线斜率为 1, 故排除选项 A、B.

又原点与直线 $x-y+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ 的距离为

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故排除 D. 综上, 选 C.

【点评】解法一是直接解法, 解法二利用了检验排除法.

7. 函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ ().

A. 为奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上为增函数 B. 为偶函数且在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数

C. 为奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上为减函数 D. 为偶函数且在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数

【解】令 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(-x)=(-x)^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}=f(x)$, 故 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 为偶函数, 其图像关于 y 轴对称.

因为对于任意的实数 n , 当 $n>0$ 时, 函数 $y=x^n$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 由上述偶函数图像关于 y 轴对称的结论, 可见函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调递减, 选 B.

8. 函数 $y=\sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ 的最小正周期是 ().

A. $\frac{\pi}{2}$

B. π

C. 2π

D. 4π

【解】 $\because \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$, $\therefore$ 函数 $y=\sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x \cos x=-\frac{1}{2}\sin 2x$. 故该函数的最小正周期为 π , 选 B.

9. 过点 $P(1, 2)$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线方程是 ().

A. $x+2y+5=0$

B. $2x+y-5=0$

C. $2x-y=0$

D. $x+2y-5=0$

【解】因为点 $P(1, 2)$ 在圆 $x^2+y^2=5$ 上, 所以所求直线的方程为 $x+2y=5$, 即 $x+2y-5=0$, 选 D.

【点评】本题利用了如下结论:

若点 $M(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ ($r>0$) 上, 则该圆过点 M 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

10. 双曲线 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{8}=1$ 与圆 $(x+1)^2+y^2=3$ 的交点的个数是 ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

【解】在同一个直角坐标系内画出题设中的双曲线和圆的图像, 易见

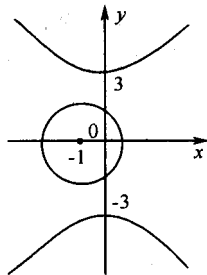


图 97-6

它们没有交点,选 A.

【点评】从本题可知:根据二次曲线的方程画出其图像,也是对考生数形结合能力的一种考查.

11. 复数 $i - \sqrt{3}$ 的三角形形式为().

- A. $2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i\sin \frac{11\pi}{6}\right)$ B. $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6}\right)$
C. $2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i\sin \frac{5\pi}{3}\right)$ D. $2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}\right)$

【解】 $-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6}\right)$, 选 B.

12. 关于 x 的方程 $x^2 - (2n + 3m)x + 5m = 0$ 的两根之和为 2, 两根之积为 -10, 则().

- A. $m = -2, n = 4$ B. $m = 2, n = -4$ C. $m = 2, n = 4$ D. $m = -2, n = -4$

【解】依题设, 有方程组

$$\begin{cases} 2n + 3m = 2, \\ 5m = -10. \end{cases}$$

解得 $m = -2, n = 4$, 选 A.

【点评】本题解法的依据是: 若 α, β 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根, 则 $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$.

13. 在极坐标系中, 圆心坐标为 $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, 半径为 2 的圆的极坐标方程为().

- A. $\rho = 2\sin\theta$ B. $\rho = 2\cos\theta$ C. $\rho = 4\sin\theta$ D. $\rho = 4\cos\theta$

【解】图 97-7 中的圆 C 即为题设中的圆. 其中 O 为极点, AO 为圆 C 的直径, P 为圆 C 上的任意一点. 从图中不难看出: $AO = 2OC = 4$, $\angle OAP = \theta, \angle APO = \frac{\pi}{2}$, 从而 $\rho = OP = AO\sin\theta = 4\sin\theta$, 即圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin\theta$. 选 C.

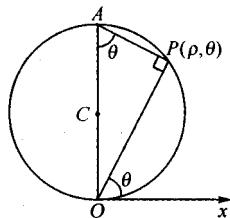


图 97-7

14. $\arcsin\left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = ()$.

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $-\frac{\pi}{6}$ D. $-\frac{5\pi}{6}$

【解】 $\arcsin\left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, 选 A.

【点评】若 $-1 \leq a \leq 1$, 则 $\arcsin a$ 是一个角, 这个角在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, 且这个角的正弦值等于 a .

15. 某小组共有 10 名学生, 其中女生 3 名, 现选举 2 人当代表, 要求至少有一名女生当选, 则不同选法共有().

- A. 21 种 B. 24 种 C. 27 种 D. 63 种

【解】依题意, 选举情况应分为两类.

第一类:2名代表中男女生各一人,共有

$$C_7^1 \cdot C_3^1 = 21$$

种不同的选法;

第二类:2名代表全是女生,共有

$$C_3^2 = 3$$

种不同的选法.

根据分类记数原理,符合题设条件的不同选法共有24种,故应选B.

二、填空题

16. -8和-12的等比中项是_____.

【解】设 x 是-8与-12的等比中项,则

$$x^2 = (-8) \cdot (-12) = 96.$$

解得 $x = \pm 4\sqrt{6}$. 故应填 $4\sqrt{6}$ 或 $-4\sqrt{6}$.

17. 不等式 $|3x+4| \leq 2$ 的解集是_____.

【解】原不等式等价于

$$-2 \leq 3x+4 \leq 2.$$

$$\therefore -6 \leq 3x \leq -2,$$

$$\therefore -2 \leq x \leq -\frac{2}{3}.$$

故应填 $\{x | -2 \leq x \leq -\frac{2}{3}\}$.

18. $\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{x^3}\right)^6$ 的展开式中 x^{10} 的系数是_____.

【解】因为如果 $\left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^6$ 的展开式中的第 $(r+1)$ 项为 x^{10} 的项, 那么 $\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{x^3}\right)^6$ 的展开式中的第 $(r+1)$ 项也是 x^{10} 的项. 故设 $\left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^6$ 的展开式中的第 $(r+1)$ 项为 x^{10} 的项, 则

$$T_{r+1} = C_6^r x^{4(6-r)} \cdot x^{-3r} = C_6^r x^{24-7r}$$

令 $24-7r=10$, 解得 $r=2$.

故 $\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{3}{x^3}\right)^6$ 的展开式中 x^{10} 的系数是

$$C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (-3)^2 = \frac{6 \times 5}{2!} \times \frac{3^2}{3^4} = \frac{5}{3}.$$

应填 $\frac{5}{3}$.

【点评】求某一项时先把二项式中各项系数看成1, 可减少各项系数的干扰, 不易出错.

19. 函数 $y = \log_2(x^2 + 2x - 3)$ 的定义域是_____.

【解】因为零和负数没有对数, 故有

$$x^2 + 2x - 3 > 0,$$

即 $(x+3)(x-1) > 0$.

$\therefore x < -3$ 或 $x > 1$.

故可填: $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$

20. 已知圆锥的侧面展开图的圆心角为 $\frac{4\pi}{3}$, 轴截面的面积为 $8\sqrt{5}\text{cm}^2$, 则圆锥的体积为 _____ cm^3 .

【解】如图 97-8 所示, 设圆锥的半径 $OA=r$, 母线 PA 的长为 l , 高 $PO=h$. 则 $2\pi r = \frac{4}{3}\pi l$, 解得 $l = \frac{3}{2}r$. 于是 $h^2 = \left(\frac{3}{2}r\right)^2 - r^2 = \frac{5}{4}r^2$, 故 $h = \frac{\sqrt{5}}{2}r$.

因为轴截面面积为 $8\sqrt{5}\text{cm}^2$, 故 $rh = \frac{\sqrt{5}}{2}r^2 = 8\sqrt{5}\text{cm}^2$, 解得 $r = 4\text{cm}$, $h = 2\sqrt{5}\text{cm}$. 从而圆锥的体积

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 16 \times 2\sqrt{5}\pi = \frac{32\sqrt{5}}{3}\pi (\text{cm}^3)$$

故应填 $\frac{32\sqrt{5}}{3}\pi$.

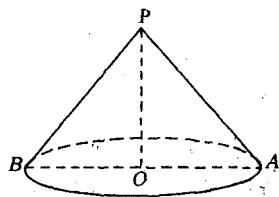


图 97-8

21. 已知 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$ 的值是 _____.

【解】 $\because \sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{3}$, $\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{3}$.

$\therefore \sin^3\theta - \cos^3\theta = (\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

故应填 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

三、解答题

22. 求函数 $f(x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值和最小值.

【解】 $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2$

$$= \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x$$

$$= \frac{3}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$= \sin^2 x + \frac{1}{2}$$