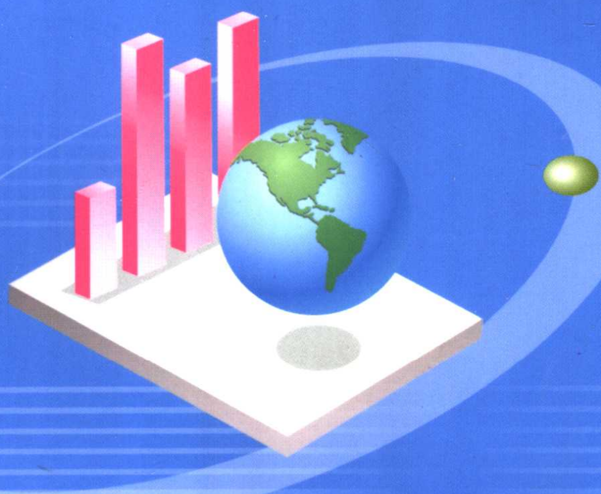
应用型本科理工类基础课程规划教材

线性代数及其应用

白同亮 高桂英 编著
施光燕 主审



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

应用型本科理工类基础课程规划教材

线性代数及其应用

白同亮　高桂英　编著

施光燕　主审

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是编者根据多年的教学实践，在实施精讲多练教学法的过程中专为应用型本科学生编写的.

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、n维向量、特征值、特征向量与二次型以及矩阵的应用问题.本书还编写了利用 MATLAB 解决线性代数有关问题的知识，同时还简要介绍了线性空间和线性变换的有关知识.本书附有习题答案和提示.

本书紧密联系实际，条理清晰，通俗易懂.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/白同亮，高桂英编著.—北京：北京邮电大学出版社，2007

ISBN 978-7-5635-1383-3

Ⅰ.线… Ⅱ.①白… ②高… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 079384 号

书　　名：线性代数及其应用

作　　者：白同亮　高桂英

责任编辑：张珊珊

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)

北方营销中心：电话：010-62282185　传真：010-62283578

南方营销中心：电话：010-62282902　传真：010-62282735

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京忠信诚胶印厂

开　　本：787 mm×960 mm　1/16

印　　张：14.25

字　　数：304 千字

版　　次：2007 年 10 月第 1 版　2007 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1383-3　　　定　价：22.00 元

应用型本科理工类基础课程规划教材

编审委员会

主　任

李尚志(教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会副主任、教授、博士生导师)

副主任　(按姓氏笔画排列)

卢玉峰(教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会委员)

朱传喜(教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会委员)

张承琚(教育部物理学类专业教学指导分委员会委员)

陈　强(教育部物理基础课程教学指导分委员会委员)

委　员　(按姓氏笔画排列)

于崇智　王秀敏　白同亮　米红海

吴大江　杨水其　李平平　李连富

金宗谱　姜炳麟　涂海华　黄世益

序　言

本书的编者白同亮、高桂英等教授具有丰富的教学经验，充分了解线性代数教学过程中学生的困惑和难点，因此在本教材的选材、编排、讲述、选题等多方面都做出了颇具匠心的安排，使本书成为一本特色鲜明的“线性代数”教材.

这些特点包括有：

- 一些概念的引入尽量由实际问题的需要出发；
- 线性方程组的理论做了分数处理；
- 一些内容的讲述是先讲方法再做出一般的归纳，以利于学生掌握；
- 例题、习题难度适当且比较丰富；
- 增设了应用部分和线性代数运算的常用软件包的介绍.

一些可以商榷的问题已和作者进行了交流.

施光燕

前　　言

学生普遍反映线性代数这门课程比较抽象——看不见，摸不着．为此本书编写的指导思想是不求所谓理论上的完备，力求从实际问题中归纳出理论，然后用理论解决一些实际应用问题．

1．各章节均通过实际举例给出相关概念，如用消元法解线性方程组引出行列式的概念；用消元法解线性方程组引出初等变换；用排序和运输问题引出矩阵的概念；用求最大值最小值问题引出二次型．

2．增加应用部分．本书增加了投入产出法和密码问题；二次型部分增加了几何图形判断和求解线性微分方程组．

3．理论叙述本着通俗易懂、条理清晰的特点．行列式部分首先介绍了拉普拉斯展开定理，而后讲性质，并用拉普拉斯展开定理证明性质；将矩阵代数运算与普通代数运算作类比讲解，增加了一节专门介绍矩阵代数中一些常见的问题及题目．

4．增加了用 MATLAB 解决线性代数中的有关运算问题，方便、简洁．

全书由白同亮、高桂英、李连富编写．在编写过程中，大连理工大学城市学院基础教学部数学教研室全体数学教师均做了大量的工作．原中国数学会理事、中国运筹学会理事、辽宁省运筹学会理事长、国家教委工科数学指导委员会委员、教学大师、大连理工大学施光燕教授审定了全部书稿，并提出了许多宝贵意见．本书的出版得到了北京邮电大学出版社的大力支持，在此一并致谢．

由于编者水平有限，难免有不足之处，敬请指正．

编　者

目　录

第 1 章　行列式

1.1　行列式引出 …… 1

1.1.1　二元一次方程组与二阶行列式 …… 1

1.1.2　三元一次方程组与三阶行列式 …… 2

1.1.3　n 元线性方程组与 n 阶行列式 …… 3

1.2　二阶行列式 …… 5

1.3　三阶行列式 …… 6

1.3.1　定义 …… 6

1.3.2　余子式及代数余子式 …… 6

1.3.3　三阶行列式计算 …… 7

1.3.4　三阶行列式的性质 …… 9

1.4　n 阶行列式 …… 12

1.4.1　定义 …… 12

1.4.2　行列式的计算 …… 13

1.5　n 元线性方程组 …… 16

1.5.1　非齐次线性方程组 …… 16

1.5.2　齐次线性方程组 …… 17

1.5.3　用克莱姆法则求解线性方程组 …… 17

1.5.4　范德蒙行列式 …… 21

第 1 章习题 …… 24

第 2 章　矩阵

2.1　引例 …… 28

2.2　矩阵与矩阵的初等变换 …… 31

2.2.1　矩阵的定义 …… 31

2.2.2 矩阵的初等变换…… 31
2.2.3 用矩阵的初等行变换求解线性方程组…… 32
2.3 矩阵的运算…… 38
2.3.1 矩阵相等…… 38
2.3.2 几种特殊矩阵…… 39
2.3.3 矩阵的加法…… 40
2.3.4 矩阵的减法…… 40
2.3.5 数与矩阵相乘…… 41
2.3.6 矩阵的乘法…… 42
2.3.7 矩阵的转置…… 44
2.4 逆矩阵…… 45
2.4.1 方阵的行列式…… 45
2.4.2 可逆矩阵和逆矩阵的概念…… 46
2.4.3 可逆矩阵的判别及求可逆矩阵的逆矩阵的方法…… 46
2.5 分块矩阵…… 51
2.5.1 分块矩阵定义…… 51
2.5.2 分块对角矩阵…… 52
2.5.3 分块对角矩阵的性质…… 52
2.6 初等矩阵…… 53
2.6.1 初等矩阵的概念…… 53
2.6.2 利用初等行变换求可逆矩阵的逆矩阵…… 55
2.7 矩阵代数中一些常见问题及例题…… 56
第 2 章习题 …… 63

第 3 章 线性方程组的解和 n 维向量

3.1 矩阵的秩…… 67
3.1.1 矩阵的 k 阶子式…… 67
3.1.2 矩阵的秩…… 68
3.1.3 用矩阵的初等行变换求矩阵的秩…… 69
3.2 线性方程组解的讨论…… 71
3.2.1 齐次线性方程组解的讨论…… 71
3.2.2 非齐次线性方程组解的讨论…… 73
3.3 n 维向量 …… 75
3.3.1 n 维向量的概念 …… 75
3.3.2 n 维向量的运算 …… 76

3.4 向量组的线性相关性…… 77
3.4.1 矩阵和向量组之间的关系…… 77
3.4.2 线性组合…… 77
3.4.3 向量组的线性相关性…… 80
3.4.4 归纳向量组的线性相关性…… 83
3.5 向量组的秩…… 85
3.5.1 向量组的最大无关组和秩的定义…… 85
3.5.2 向量组的最大无关组和秩的求法…… 86
3.5.3 向量组秩之间的关系…… 87
3.6 线性方程组…… 90
3.6.1 齐次线性方程组的基础解系…… 90
3.6.2 非齐次线性方程组的通解…… 96
第 3 章习题 …… 98

第 4 章 特征值、特征向量与二次型

4.1 问题提出 …… 101
4.2 预备知识 …… 106
4.2.1 内积 …… 106
4.2.2 正交向量组 …… 107
4.2.3 施密特正交化 …… 108
4.2.4 正交矩阵 …… 110
4.3 方阵的特征值与特征向量 …… 111
4.3.1 方阵的特征值与特征向量的定义 …… 111
4.3.2 方阵的特征值及特征向量的性质 …… 115
4.4 相似矩阵与方阵的对角化 …… 116
4.4.1 相似矩阵 …… 117
4.4.2 方阵的对角化 …… 118
4.5 对称矩阵的对角化 …… 120
4.5.1 引例 …… 120
4.5.2 对称矩阵的对角化 …… 122
4.6 二次型及正定二次型 …… 127
4.6.1 二次型及其矩阵表示 …… 127
4.6.2 化二次型为标准型 …… 129
4.6.3 正定二次型 …… 135
第 4 章习题…… 137

第 5 章　应用问题

5.1　投入产出法 …… 141
　5.1.1　引例 …… 142
　5.1.2　投入产出表 …… 144
　5.1.3　建立平衡方程组 …… 145
　5.1.4　介绍常见的一些题目 …… 147
5.2　密码问题 …… 152
第 5 章习题 …… 157

第 6 章　用 MATLAB 解线性代数中的有关问题

6.1　MATLAB 的基本操作 …… 161
6.2　矩阵的输入 …… 162
6.3　矩阵的基本运算 …… 164
6.4　矩阵的基本函数 …… 165
6.5　应用举例 …… 166
第 6 章习题 …… 172

***第 7 章　线性空间与线性变换**

7.1　线性空间的概念 …… 174
　7.1.1　代数系统的一般概念 …… 174
　7.1.2　线性空间的定义 …… 175
7.2　基与坐标 …… 177
7.3　线性变换 …… 184
7.4　线性变换的矩阵表示法 …… 185
7.5　线性变换的典型例题 …… 192
第 7 章习题 …… 197

习题答案 …… 199

参考文献 …… 213

第1章 行列式

行列式作为数学工具在数学的许多分支中有着广泛的应用. 本章通过对二元线性方程组和三元线性方程组求解的结论,引入二阶行列式、三阶行列式,并推广到 n 阶行列式.

1.1 行列式引出

1.1.1 二元一次方程组与二阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

用消元法求解得

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2=\dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

$$\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)x_2=b_2-\frac{b_1a_{21}}{a_{11}},$$

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

从而

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

记 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，则

$$b_1a_{22}-b_2a_{12} \underset{\substack{b_1\text{取代}a_{11} \\ b_2\text{取代}a_{21}}}{=} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11}-b_1a_{21} \underset{\substack{b_2\text{取代}a_{22} \\ b_1\text{取代}a_{12}}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ 为二阶行列式，记为 D,D_1,D_2. 则 x_1,x_2 可进一步表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}.$$

1.1.2 三元一次方程组与三阶行列式

设

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

用消元法求解得

$$x_1=\frac{b_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(b_2a_{33}-a_{23}b_3)+a_{13}(b_2a_{32}-a_{22}b_3)}{a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})},$$

$$x_2=\frac{a_{11}(b_2a_{33}-b_3a_{23})-b_1(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}b_3-a_{31}b_2)}{a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})},$$

$$x_3=\frac{a_{11}(a_{22}b_3-a_{32}b_2)-a_{12}(a_{21}b_3-a_{31}b_2)+b_1(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})}{a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})}.$$

记

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则

$$b_1(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(b_2a_{33}-a_{23}b_3)+a_{13}(b_2a_{32}-a_{22}b_3)\underset{\substack{b_1\text{取代}a_{11}\\ b_2\text{取代}a_{21}\\ b_3\text{取代}a_{31}}}{=}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$a_{11}(b_2a_{33}-b_3a_{32})-b_1(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}b_3-a_{31}b_2)\underset{\substack{b_1\text{取代}a_{12}\\ b_2\text{取代}a_{22}\\ b_3\text{取代}a_{32}}}{=}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$a_{11}(a_{22}b_3-a_{32}b_2)-a_{12}(a_{21}b_3-a_{31}b_2)+b_1(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\underset{\substack{b_1\text{取代}a_{13}\\ b_2\text{取代}a_{23}\\ b_3\text{取代}a_{33}}}{=}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$为三阶行列式，记为 D,D_1,D_2,D_3.

这样

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}=\frac{D_3}{D}.$$

1.1.3 *n* 元线性方程组与 *n* 阶行列式

设 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

用消元法解得

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}},x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}},\cdots,$$

$$x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$为 n 阶行列式.

发现$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$共有 2! 项,而每一项都是不同行、不同列的两个数的乘积,行列式的值就等于这些乘积的代数和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

共有 3! =6 项,而每一项都是不同行、不同列的 3 个数的乘积,行列式的值就等于这些乘积的代数和.

推广$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,共有 $n!$ 项,而每项都是不同行、不同列的 n 个数的乘积,行列式的值就等于这些乘积的代数和.

那么具体如何计算行列式的值呢？本书将在后面章节介绍.

1.2 二阶行列式

定义 1 设 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为 4 个数,记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为二阶行列式,其中 a_{ij} 称为行列式的元素.它的值规定为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.记为 D.

如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2;$$

又如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1\times2-1\times(-1)=3.$$

根据前面介绍的知识,方程组的解可以用行列式的形式来表达,因而可以按如下方法解方程组.

例 1-1 求解方程组$\begin{cases} 2x_1-3x_2=4, \\ x_1+4x_2=6. \end{cases}$

解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{34}{11},x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{8}{11}.$$

例 1-2 求解方程组$\begin{cases} x_1-2x_2=1, \\ 3x_1+x_2=2. \end{cases}$

解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{5}{7},x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{1}{7}.$$

1.3 三阶行列式

1.3.1 定义

定义 2 设 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为 9 个数，记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式. 其中 a_{ij} 称为行列式的元素.

1.3.2 余子式及代数余子式

对于三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，将元素 a_{11} 所在的行和列划去后，留下的元素按原来的相对位置构成二阶行列式.

记 $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，称其为元素 a_{11} 的余子式.

记 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$，称其为元素 a_{11} 的代数余子式.

元素 a_{21} 的代数余子式 $A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

在三阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下的元素按原来的相对位置构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例 1-3 设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，求第一行各元素的余子式和代数余子式.

解

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5, A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=5,$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3, A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-3,$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-7, A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=-7.$$

1.3.3 三阶行列式计算

定理 1 三阶行列式的值规定为任一行(或列)的各元素与其对应代数余子式乘积之和,并称为行列式的拉普拉斯(Laplace)展开定理.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3},(i=1,2,3),$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j},(j=1,2,3).$$

例 1-4 验证:将 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 分别按第一行、第二行、第三行、第一列、第二列、第三列展开,行列式值不变.

解 按第一行展开

$$\begin{aligned} D &= 3\times(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^3\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\times(-1)^4\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3\times(4-0)-(2-15)-2\times(0-20) \\ &= 12+13+40 \\ &= 65. \end{aligned}$$

按第二行展开

$$\begin{aligned} D &= 2\times(-1)^3\times\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^4\times\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\times(-1)^5\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2\times(1-0)+4\times(3+10)-3\times(0-5) \\ &= -2+52+15 \\ &= 65. \end{aligned}$$

按第三行展开

$$\begin{aligned} D &= 5\times(-1)^4\times\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 1\times(-1)^6\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 5\times(3+8)+0+(12-2) \\ &= 65. \end{aligned}$$

按第一列展开

$$D = 3\times(-1)^2\times\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^3\times\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^4\times\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$