卓越

卓越系列 · 21世纪高职高专精品规划教材

公共基础课适用

高等数学（上册）

Advanced Mathematics（Ⅰ）

李君湘　邱忠文　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

卓越系列·21世纪高职高专精品规划教材(公共基础课适用)

高等数学

（上册）

Advanced Mathematics(Ⅰ)

李君湘　邱忠文　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书系《21世纪高职高专精品规划教材》之一，是为公共基础课所编写的高等数学教材.

本书参照《高等数学课程教学基本要求》编写，分上、下两册.上册内容为单元函数微积分，包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分及定积分共6章.下册内容为空间解析几何、多元函数微积分、级数和微分方程.与本书配套的还有《高等数学习题参考解答》、《高等数学辅导24讲》，也即将出版.

本书可作为高职高专教材，亦可作为学习高等数学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上/李君湘，邱忠文编.—天津：天津大学出版社，2007.8
21世纪高职高专精品规划教材
ISBN 978-7-5618-2517-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②邱… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第121798号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 廊坊市长虹印刷有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 13.5
字　　数 296千
版　　次 2007年8月第1版
印　　次 2007年8月第1次
印　　数 1-4 000
定　　价 22.00元

前　　言

"高等数学"是高等院校的一门重要的基础理论课程.为了适应高职高专院校学生和大学专科学生学习高等数学课程的需要,我们参照《高等数学课程教学基本要求》并结合多年高职高专教学的实际工作经验,编写了这套教材.

本书分为上、下两册.上册的内容包括单元函数微积分,共6章;下册的内容包括空间解析几何、多元函数微积分、级数和微分方程,共6章.本书基本上覆盖了现行理工科类院校高等数学课程的主要教学内容,而且在结构及习题的配备等方面都更适合高职高专学生的需求.本书也可以作为网络高等教育、函授、高等职业技术教育或成人继续教育大专生的高等数学课程的教科书.

与本书配套的《高等数学习题解答》一书是应学生们的要求编写的,它可以辅导和帮助同学们更好地学习高等数学,进一步提高解题能力和逻辑思维能力.

限于编者的水平,书中不免有疏误,恳请读者指正.

编　者

2007年6月于天津大学

目　　录

1

函数

本章学习要点

1. 理解函数的概念,掌握函数的定义域及函数值的求法.
2. 知道函数的性质及复合函数的概念.
3. 掌握基本初等函数的图形及其性质.
4. 理解本章的基本内容(包括例题),能独立完成本章的习题.

1.1 函数概念

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映,是高等数学(也称为微积分)研究的主要对象.

在高等数学课程中,研究问题所涉及的数,绝大多数都是在实数范围内进行的.今后如果没有声明,本书中所提到的数,都是实数;所提到的数集,都是实数集.按照习惯,全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$;全体正自然数的集合记为 $\mathbf{N}^+$;全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$;全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$;全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

1.1.1 区间与邻域

定义 1.1 设数 a 与 b 满足 $a<b$,则数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

这里 a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左端点和右端点.

对开区间 (a,b) 而言,显然有 $a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$.

类似地,$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,称为闭区间.$a$ 和 b 仍然分别称为闭区间$[a,b]$的左端点和右端点.显然 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$.

而把数集

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

都称为半开区间.

上面介绍的区间都是有限区间,数“$b-a$”称为这些有限区间的长度.除了有限区间之外,还有无限区间.引进记号“$+\infty$”(读为“正无穷大”)及“$-\infty$”(读为“负无穷大”),则

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\};[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\};(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$$

都是无限区间(或无穷区间).而全体实数的集合 $\mathbf{R}$,可以记为

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\},$$

它当然也是无限区间.

今后,在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,就简称为“区间”,并常用字母“I”表示.

邻域也是一个经常用到的数学概念,它实际上是微观条件下的区间.

定义 1.2 设 a 与 $\delta(\delta>0)$是两个数,称数集$\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$为点 a 的 δ 邻域,记为 $N(a,\delta)$,即

$$N(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

称点 a 为这个邻域的中心,称 δ 为这个邻域的半径.

从定义 1.2 可知,邻域 $N(a,\delta)$实际上就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$.为了体现微观性,尽管定义 1.2 中对 δ 没有什么限制,一般总认为 δ 是很小的正数.

因为 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于$|x-a|<\delta$,所以邻域 $N(a,\delta)$又可以表示为

$$N(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

有时候用到邻域的概念时,需要把邻域的中心点去掉.去掉中心点 a 的邻域 $N(a,\delta)$,称为点 a 的去心邻域,记为 $N(\hat{a},\delta)$,即

$$N(\hat{a},\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

或

$$N(\hat{a},\delta)=N(a,\delta)\setminus\{a\}.$$

今后把点 a 的某一邻域也记为$N(a,\delta)$.

1.1.2 函数的定义

定义 1.3 设有两个数集 X、Y,f 是一个确定的对应规律,若对于每一个 $x\in X$,通过 f 都有唯一的 $y\in Y$ 和它对应.记为

$$f(x)=y,$$

则称 f 为定义在 X 上的一元函数,简称为函数.

在定义 1.3 中，X 为 f 的定义域，通常用记号 D_f 来表示. 当 x 取遍 X 中的一切数时，与之对应的数 y 组成的数集 $V_f=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$，称为函数 f 的值域.

一个函数是由对应规律和函数的定义域确定的，而值域则是随着对应规律和定义域的给定而确定的. 习惯上把函数 f 说成"变量 y 是变量 x 的函数"，并用记号 $y=f(x)$ 来表示. 通常称 y 为因变量或函数，而把 x 称为自变量.

函数中表示对应关系的记号"f"也可以用其他的字母表示，例如"g"、"φ"、"F"、"G"等. 这时函数的记号相应地表示为 $y=g(x)$、$y=\varphi(x)$、$y=F(x)$和 $y=G(x)$等.

在不考虑函数实际意义的时候，函数的定义域就是自变量所能取的使函数关系成立的一切实数的集合，而函数的定义域 D_f 和值域 V_f 通常都是由区间或数集来表示的.

在平面上建立直角坐标系 xOy，则满足对应关系 $y=f(x)(x\in D_f)$的数组(x,y)，对应 xOy 平面上的一个点，当 x 取遍 D_f 上的每一个数值时，就得到点(x,y)的一个集合 P，即

$$P=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}.$$

点集 P 称为函数 $y=f(x)$的图形.

1.1.3 函数值

如果对于自变量 x 的某一个确定的值 $x=x_0$，函数 f 有一个确定的对应值 $f(x_0)$，则称 $f(x_0)$为函数 f 在点 $x=x_0$ 处的函数值. 这时也称函数 f 在点 $x=x_0$ 处是有定义的.

例 1.1 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域 D_f 及函数值 $f(\sqrt{2})$.

解 函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域由不等式 $4-x^2\geqslant 0$ 决定，有 $D_f=[-2,2]$.

函数值

$$f(\sqrt{2})=\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}.$$

例 1.2 求函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{当 } x<0\end{cases}$ 的定义域 D_f、值域 V_f 及函数值 $f(-1)$.

解 显然函数 $y=|x|$的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$；值域 $V_f=[0,+\infty)$；函数值

$$f(-1)=1.$$

例 1.3 求符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$ 的定义域 D_f 及值域 V_f.

解 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$；值域为 $V_f=\{-1,0,1\}$.

符号函数又称为克罗尼克(Kronecker)函数或简称为克氏函数，其图形如图 1-1 所示.

当 $x\in\mathbf{R}$ 时，不超过 x 的最大整数，记为$[x]$，对实数 $\frac{4}{7},\sqrt{3},-\pi$ 而言，我们有 $\left[\frac{4}{7}\right]=0,[\sqrt{3}]=1,[-\pi]=-4$. 同理还有$[-2]=-2,[3]=3,[\pi]=3$. 若把函数

$y=[x]$ 称为取整函数,则例 1.4 的结果是显然的.

例 1.4　求取整函数 $y=[x]$的定义域 D_f 及值域 V_f.

解　取整函数 $y=[x]$的图形如图 1-2 所示,显然有 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $V_f=\mathbf{Z}$(全体整数).

取整函数 $y=[x]$,也称为高斯(Gauss)函数.

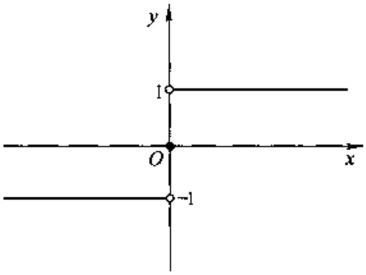

图 1-1

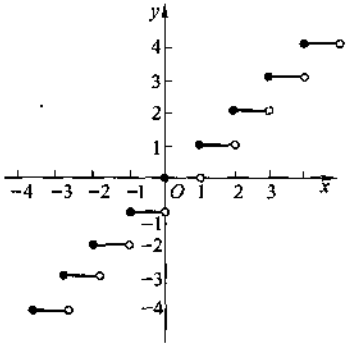

图 1-2

例 1.5　求函数　$y=f(x)=\begin{cases}2x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & \text{当 } x>1\end{cases}$的定义域 D_f、值域 V_f.

解　函数的定义域 $D_f=[0,+\infty)$,值域 $V_f=[0,+\infty)$.

当 $x\in[0,1]$时,对应的函数值为 $f(x)=2x$,如

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3};$$

当 $x\in(1,+\infty)$时,对应的函数值为 $f(x)=x+1$,如

$$f(3)=3+1=4.$$

1.1.4　函数的性质

1. 有界性

若有正数 M 存在,使函数 $f(x)$在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在区间 I 上是有界函数;否则,$f(x)$在区间 I 上是无界函数.

如果存在常数 M(不一定局限于正数),使函数 $f(x)$在区间 I 上恒有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$在区间 I 上有上界,并且任意一个 $N\geqslant M$ 的数 N 都是 $f(x)$在区间 I 上的一个上界;如果存在常数 m,使 $f(x)$在区间 I 上恒有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$在区间 I 上有下界,并且任意一个 $l\leqslant m$ 的数 l 都是 $f(x)$在区间 I 上的一个下界.

显然,函数 $f(x)$在区间 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$在区间 I 上既有上界又有下界.

例 1.6　函数 $f(x)=1+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数.

解　因为无论 x 取任何实数,都有 $|1+\sin x|\leqslant 2$,所以 $f(x)=1+\sin x$ 在$(-\infty,$

$+\infty$)内是有界函数.

从例 1.6 中可以看到,任何大于 2 的常数都可以作为 $1+\sin x$ 的上界;而任何小于 0 的常数都可以作为 $1+\sin x$ 的下界.

例 1.7　试验证函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上是有界的,在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

解　由于 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in[1,2]$ 上满足 $|f(x)|\leqslant 1$,显然 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是有界的.

而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内,无论给定多么大的正数 M(当然会有 $M>1$),必有 $x_1=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$,使 $|f(x_1)|=2M>M$.也就是说,$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的某一点处,对应的函数值的绝对值,必定大于预先给定的任何正数,故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加(或严格单调减少)的函数.在讨论函数的单调性时,"严格"两字通常也可以略去,也就是说,严格单调增(减)的函数就是单调增(减)的函数.

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上为广义单调增加(或广义单调减少)的函数.广义单调增加的函数,通常称为非减函数;广义单调减少的函数则称为非增函数.

显然函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是严格单调减少的;在区间 $(0,+\infty)$ 内是严格单调增加的.

而函数 $y=x$、$y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都是严格单调增加的.

3. 奇偶性

若函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上满足 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

偶函数的图形是关于 Oy 轴对称的;奇函数的图形是关于原点对称的.

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个非零常数 T,对一切的 x 均有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,并把 T 称为 $f(x)$ 的周期.应当指出的是,通常讲的周期函数的周期是指最小的正周期.

对三角函数而言,$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,而 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

关于函数的性质,除了有界性与无界性之外,单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质,而不是每一个函数都一定具备的.

1.1.5 复合函数与反函数

1. 复合函数

设 $y=f(u)$是数集 U 上的函数,$u=\varphi(x)$是由数集 X 到数集 U 的一个非空子集 U_φ 的函数.因此,对每一个 $x\in X$,通过 u 都有唯一的 y 与它对应,这时在 X 上产生了一个新的函数,用 $f\circ\varphi$ 表示,并称 $f\circ\varphi$ 为 X 上的复合函数,记为

$$(f\circ\varphi)(x)=y \text{ 或 } y=f[\varphi(x)],x\in X.$$

其中 u 称为中间变量,X 是复合函数$f\circ\varphi$ 的定义域,$f\circ\varphi$ 表示由 x 产生 y 的对应规律.

应当说明的是,复合函数$(f\circ\varphi)(x)$的定义域 X 是不能等同于函数 $u=\varphi(x)$的定义域的.数集 X 是由使函数 $u=\varphi(x)$的值域 U_φ 满足 $U_\varphi\subseteq U$ 的实数所组成的.

复合函数是经常遇到的一种函数结构.例如,由物理学知道,物体的动能 E 与速度 v 的函数关系是 $E=\frac{1}{2}mv^2$(这里 m 为物体的质量),如果将此物体以初速度 v_0 垂直向上抛出,由于地球引力的关系,这时速度 v 与时间 t 有函数关系 $v=v_0-gt$,于是,物体的动能成为时间 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

它就是复合函数,其中 v 是中间变量.

又例如 $y=\sin x^2$,是由 $y=\sin u$(这里 u 为中间变量)和 $u=x^2$ 复合而成的复合函数,其定义域为 $\mathbf{R}$.而函数 $y=\sqrt{x+4}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=x+4$ 复合而成的复合函数,其定义域为$[-4,+\infty)$,它是中间变量 $u=x+4$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 的子集.

复合函数的中间变量可以不止一个,如 $y=\sqrt{u}$, $u=\cot v$, $v=\frac{x}{2}$构成的复合函数 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$就有 u、v 两个中间变量.

例 1.8 设 $f(x)=x^2,\varphi(x)=2^x$.求 $f[\varphi(x)]$、$\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^2=(2^x)^2=2^{2x}$;

$\varphi[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

从例 1.8 可以看出 $f\circ\varphi\neq\varphi\circ f$,也就是说复合函数的复合次序是不能交换的.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,值域为 V_f.对任意的 $y\in V_f$,在 D_f 上确定了一个 x 与 y 对应,且满足 $y=f(x)$.如果把 y 看作自变量,x 看作因变量,就可以得到一个新的函数:$x=f^{-1}(y)$.称 $x=f^{-1}(y)$为函数 $y=f(x)$的反函数,而把函数 $y=f(x)$称为直接函数.一般地说,直接函数 f 与反函数f^{-1}是不相同的两个函数,这是因为定义域和对应规律不相同的缘故.

由于习惯上 x 表示自变量,y 表示因变量,我们约定 $y=f^{-1}(x)$也是直接函数 $y=f(x)$的反函数,通常称为习惯反函数.今后如不特别声明,求某一个直接函数 $y=f(x)$ 的反函数,均指求它的习惯反函数.

例 1.9　求函数 $y=2x-3$ 的反函数.

解　由 $y=2x-3$,有 $x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$,于是得到反函数

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

类似地,不难求出函数 $y=x^3$ 的反函数为 $y=x^{\frac{1}{3}}$.

应当说明的是直接函数 $y=f(x)$与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线$y=x$对称的.并且单调的直接函数的反函数也是单调的.

习题　1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1)$y=\frac{x+2}{x^2-4}$;　　(2)$y=\arcsin\frac{2x-1}{7}$;

(3)$y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$;　　(4)$y=\sqrt{x+1}+\frac{1}{\lg(1-x)}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty.\end{cases}$ 求 $f(-2)$、$f(0)$、$f(5)$及 $f(x-1)$.

3. 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f(x)$、$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

4. 设 $f(u)$满足:

$f^2(\lg u)-2uf(\lg u)+u^2\lg u=0$, $u\in[1,10]$,且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

5. 设 $y=\frac{x}{2}f(t-x)$,且当 $x=1$ 时,$y=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}$,求 $f(x)$.

6. 判定函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$ 的奇偶性.

7. 求函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的周期.

8. 讨论下列函数的单调性:

(1)$f(x)=3x+2$;　　(2)$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

(3)$f(x)=\lg x$.

9. 求由函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$所确定的复合函数$f[f(x)]$的定义域.

1.2　初等函数

1.2.1　基本初等函数

基本初等函数是指:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数这

六类函数.这些函数在中学的数学课程里已经学过.

基本初等函数虽然比较简单,但是由于它们的重要性,希望读者熟悉它们的图形、定义域和某些简单的性质.在这里,仅给出它们的图形,以利于读者复习.

1. 幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$

它的定义域和值域依 α 的取值不同而不同,但是无论 α 取何值,幂函数在 $x\in(0,+\infty)$内总有定义.常见的幂函数的图形如图 1-3 所示.

2. 指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.指数函数的图形如图 1-4 所示.

3. 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.其图形见图 1-5.

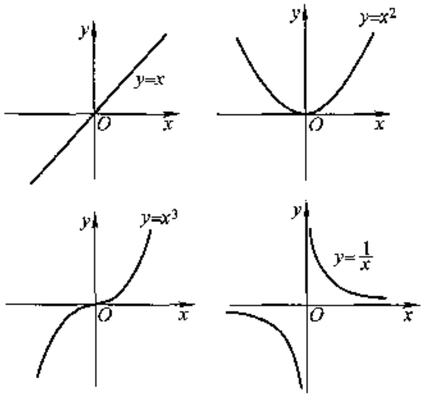

图 1-3

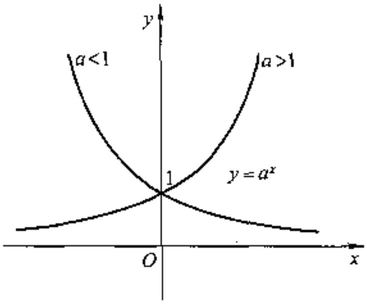

图 1-4

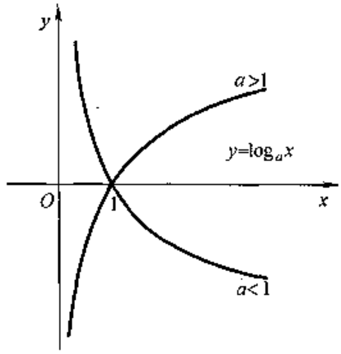

图 1-5

在工程中,常以无理数 e = 2.718 281 828…作为指数函数和对数函数的底,并且记 $e^x=\exp x$,$\log_e x=\ln x$,而后者称为自然对数函数.

4. 三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$.其中正弦、余弦、正切和余切函数的图形见图 1-6.

5. 反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\text{arccot}\ x$ 等.它们的图形如图 1-7 所示.

6. 常量函数 $y=C$(C 为常数)

定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数的图形是一条水平的直线,如图 1-8 所示.

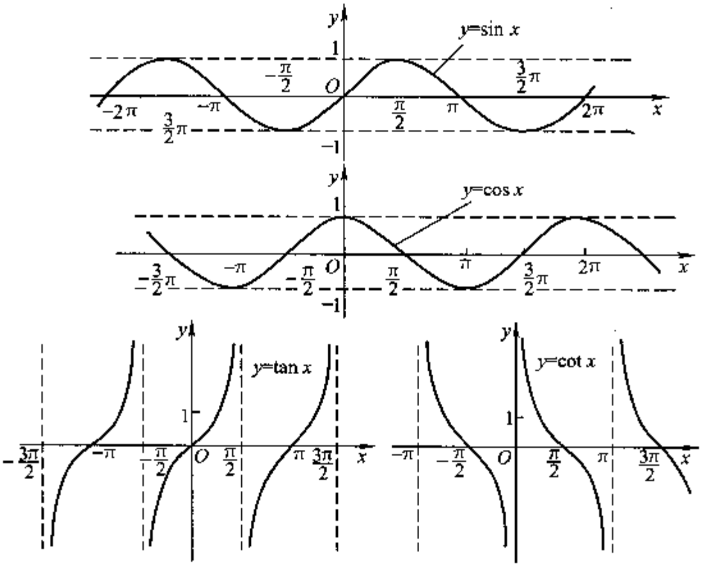
y=sin x
y=cos x
y=tan x
y=cot x

图 1-6

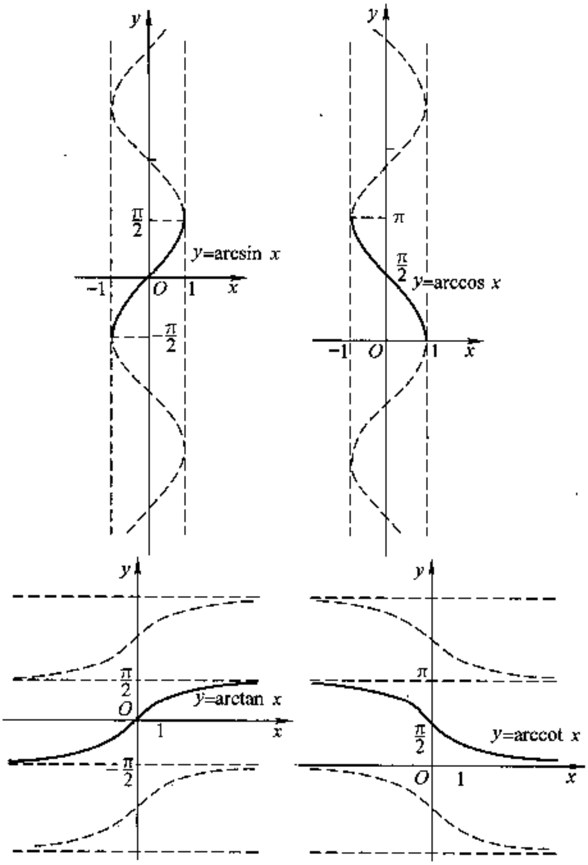
y=arcsin x
y=arccos x
y=arctan x
y=arccot x

图 1-7

1.2.2 初等函数

在自然科学、社会科学及工程技术中,经常遇到的函数大多是由基本初等函数构成的.定义 2.1 给出了初等函数的定义.

定义 2.1 通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的,并用一个解析式表达的函数,称为初等函数.

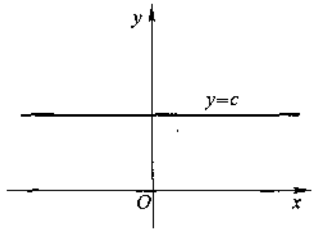

图 1-8

例如, $y=\ln(\sin x+4)$, $y=e^{2x}\sin(3x+1)$, $y=\sqrt[3]{\tan x}$,…都是初等函数.初等函数虽然是常见的重要函数,但是在工程技术中,非初等函数也会经常遇到.例如符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$,取整函数 $y=[x]$ 等分段函数就是非初等函数.

在高等数学的练习题中,常把一个初等函数分解为基本初等函数来研究,因此,学会分析初等函数的结构是十分重要的.

例 2.1 分析函数 $y=\sqrt{2+x^2}$ 的结构.

解 令 $u=2+x^2$,则 $y=u^{\frac{1}{2}}$ 而 $u=2+x^2$ 是两个基本初等函数之和.设 $v(x)=2$, $w(x)=x^2$,则函数的结构是 $y=u^{\frac{1}{2}}$, $u=v(x)+w(x)$, $v(x)=2$, $w(x)=x^2$.

1.2.3 双曲函数

双曲函数是工程技术中常用到的初等函数,其定义如下.

双曲正弦:
$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

双曲余弦:
$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

双曲正切:
$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

双曲余切:
$$\operatorname{coth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

其函数图形见图 1-9.

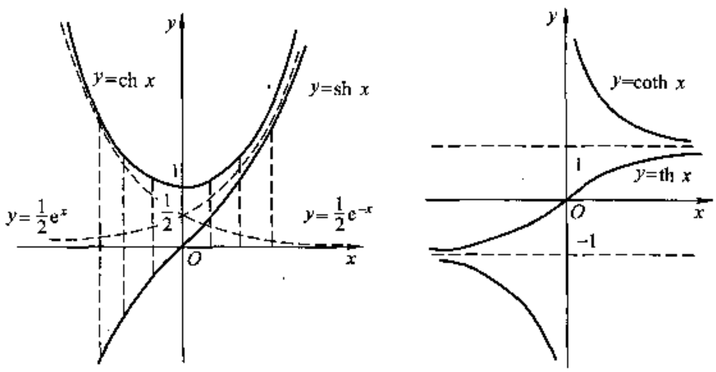

图 1-9