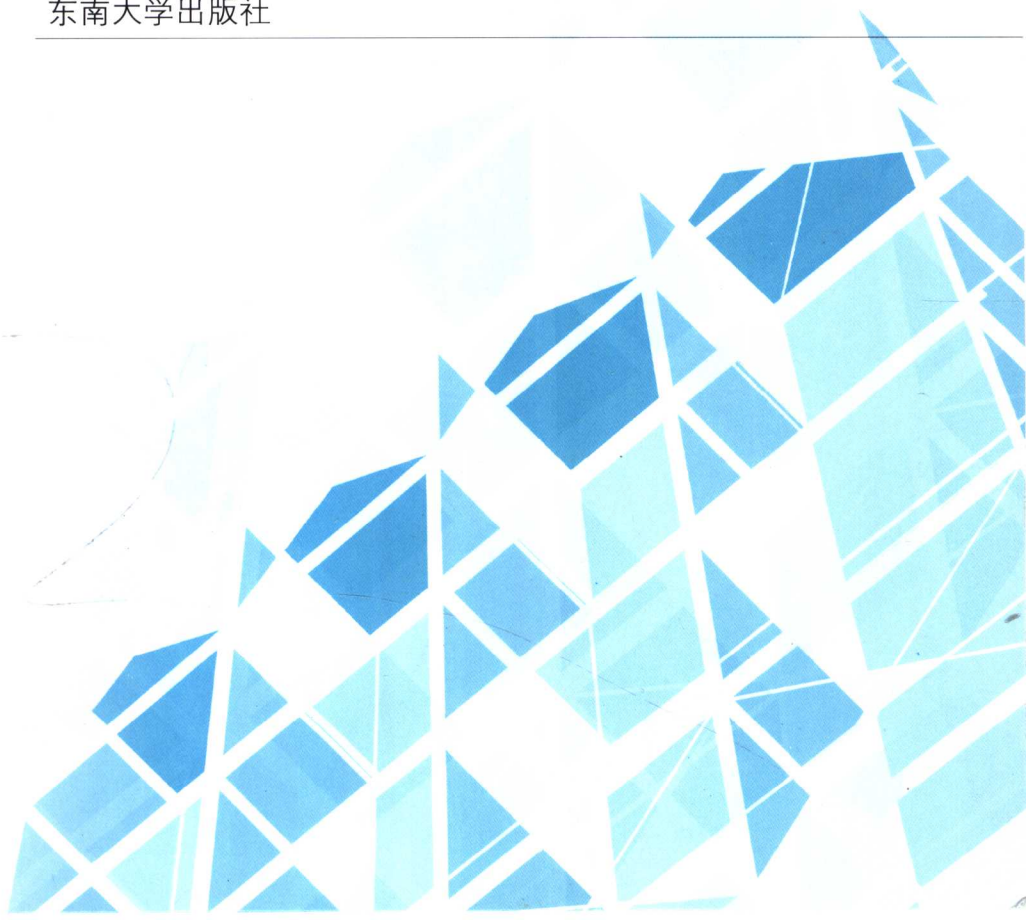


# 结构模态分析及其 损伤诊断

Jiegou Motaif Fenxi  
Jiegou Sushikangyong Zhenzhang

顾培英 邓 昌 吴福生 编著

东南大学出版社



本书获南京水利科学研究院专著出版基金资助

TH113.1/48

2008

# 结构模态分析及其损伤诊断

顾培英 邓昌 吴福生 编著

东南大学出版社  
·南京·

## 内容提要

本书重点是基于应变模态分析的结构损伤诊断技术。全书共七章,分三大部分:第一部分为模态分析理论,包括第一章、第二章和第五章,介绍了模态分析技术及其应用,分别论述了单自由度、多自由度系统位移模态分析原理,并阐述了应变模态分析理论及环境激励下的位移模态识别技术;第二部分为模态参数识别方法,包括第三章和第四章,分别介绍了频域、时域识别方法;第三部分为结构损伤诊断技术,包括第六章和第七章,分别论述了位移类损伤指标法、应变类损伤指标法,提出并阐述了基于损伤应变模态差分原理的损伤位置直接指标法、基于局域应变模态面积的损伤程度直接指标法。

本书可供从事土木工程科学研究、设计、安全鉴定、管理技术人员参考,也可作为高等院校相关专业师生的参考用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

结构模态分析及其损伤诊断/顾培英,邓昌,吴福生  
编著. 南京:东南大学出版社,2008.1

ISBN 978-7-5641-1056-7

I. 结… II. ①顾…②邓…③吴… III. 结构分析:模态  
分析-损伤-诊断 IV. TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 199470 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编:210096)

出版人:江汉

全国各地新华书店经销 兴化市印刷有限责任公司印刷  
开本:700 mm×1000 mm 印张:11.25 字数:233 千字

2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5641-1056-7/O·66

印数:1~2000 册 定价:28.00 元

(本社图书若有印装质量问题,请直接与读者服务部联系。电话(传真):025-83792328)

## 前 言

传统无损检测技术均属局部损伤诊断技术,需对损伤部位有先验认识,适合局部检测。此类方法检测时间长、费用高,难以对整个结构作出完整准确的评价。振动诊断技术是通过分析结构固有频率、阻尼和模态振型等动力特性,进而诊断结构损伤位置、程度。由于结构动力特性只与其本身固有特性有关,反映了结构的整体性态,因此振动诊断技术具有全局损伤诊断能力,可对结构作出整体性安全评定。

目前所涉及的损伤指标法大多数是基于位移类模态参数,基于应变模态的损伤指标法虽然克服了敏感性低的缺点,但就目前的理论基础及技术而言,应变类损伤指标法大多数只能损伤定位,且普遍存在一个弱点,即需同时利用结构损伤前后的模态数据,而在实际工程损伤评估中,要得到结构损伤前的精确状态非常困难。所以这些方法仅局限于实验室或数值模型中,难以在实际工程中推广应用。针对上述不足,本书提出并建立了无原始数据下基于损伤应变模态差分原理的损伤位置直接指标法,在此基础上又提出基于局域应变模态面积的损伤程度直接指标法。

本书在理论分析、数值仿真和试验验证的基础上,论述了结构模态分析及其损伤诊断技术。全书共七章,分三大部分:第一部分为模态分析理论,包括第一章、第二章和第五章,介绍了模态分析技术及其应用,分别论述了单自由度、多自由度系统位移模态分析原理,并阐述了应变模态分析理论及环境激励下的位移模态识别技术;第二部分为模态参数识别方法,包括第三章和第四章,分别介绍了频域、时域识别方法;第三部分为结构损伤诊断技术,包括第六章和第七章,分别阐述了位移类损伤指标法、应变类损伤指标法,并进行了比较分析,论述了基于损伤应变模态差分原理的损伤位置直接指标法、基于局域应变模态面积的损伤程度直接指标法,

应用损伤位置直接指标法,对混凝土早期损伤位置的确定进行了一定的推广应用。

本书得以完成,参考了许多已发表的研究成果,大多数参考文献列于书后,由于参考文献较多,未能一一列尽,请见谅!对有关著者的贡献,作者深表谢意!

最后感谢南京水利科学研究院专著出版基金的资助!

**编著者**

2007年8月于南京

# 目 录

第一章 绪论 .....	(1)
第一节 模态分析技术及其应用 .....	(1)
一、模态分析在结构性能评价中的直接应用 .....	(2)
二、模态分析在结构动态设计中的应用 .....	(2)
三、模态分析在结构损伤诊断和状态监测中的应用 .....	(2)
四、模态分析在声音控制中的应用 .....	(2)
第二节 国内外发展概况 .....	(3)
第二章 模态分析理论 .....	(5)
第一节 单自由度系统振动 .....	(5)
一、粘性阻尼系统 .....	(6)
二、结构阻尼系统 .....	(9)
第二节 单自由度系统频响函数曲线特征 .....	(10)
一、粘性阻尼系统 .....	(10)
二、结构阻尼系统 .....	(13)
第三节 多自由度系统实模态分析 .....	(14)
一、无阻尼系统 .....	(15)
二、粘性比例阻尼系统 .....	(20)
三、结构比例阻尼系统 .....	(23)
第四节 多自由度系统复模态分析 .....	(24)
一、一般粘性阻尼系统 .....	(24)
二、一般结构阻尼系统 .....	(31)
第五节 拉普拉斯变换 .....	(33)
一、单自由度系统 .....	(33)
二、多自由度系统 .....	(34)

<b>第三章 模态参数频域识别法</b> .....	(39)
<b>第一节 单模态识别法</b> .....	(39)
一、实模态系统 .....	(40)
二、复模态系统 .....	(43)
<b>第二节 多模态识别法原则及最小二乘法</b> .....	(45)
一、最小二乘估计 .....	(46)
二、加权最小二乘法估计 .....	(48)
三、最小二乘估计数学特性与统计特性 .....	(49)
<b>第三节 非线性加权最小二乘法</b> .....	(50)
一、理论模型 .....	(50)
二、模态参数识别 .....	(52)
<b>第四节 正交多项式拟合法</b> .....	(55)
<b>第四章 模态参数时域识别法</b> .....	(59)
<b>第一节 随机减量法</b> .....	(59)
一、单自由度系统 .....	(59)
二、多自由度系统 .....	(61)
<b>第二节 ITD 识别法</b> .....	(62)
一、数学模型 .....	(62)
二、参数识别 .....	(63)
三、估算模态参数 .....	(66)
四、增加采样点以提高识别精度 .....	(67)
五、考虑噪声模态的 ITD 法 .....	(68)
<b>第三节 最小二乘复指数法(LSCE 法)</b> .....	(69)
一、数学模型 .....	(69)
二、自回归(AR)模型 .....	(70)
三、估算模态参数 .....	(71)
四、改善识别精度的方法 .....	(73)
五、模型定阶问题 .....	(73)
<b>第四节 ARMA 时序分析法</b> .....	(74)
一、ARMA 模型 .....	(74)
二、强迫振动方程与 ARMA 模型的等价关系 .....	(75)
三、传递函数与 ARMA 模型的等价关系 .....	(76)
四、估算模态参数 .....	(78)

第五节	特征系统实现法(ERA 法)·····	(79)
<b>第五章</b>	<b>应变模态及环境激励模态分析</b> ·····	<b>(83)</b>
第一节	应变模态技术发展现状·····	(83)
第二节	应变模态正交性·····	(84)
第三节	应变频响函数·····	(85)
第四节	环境激励信号分析·····	(86)
一、	脉动风的基本特性·····	(87)
二、	风对大跨度结构的作用·····	(87)
三、	环境激励下大跨度结构振动特点·····	(88)
第五节	基于环境激励的位移模态识别技术·····	(89)
一、	频率识别·····	(90)
二、	工作模态幅值识别·····	(91)
三、	工作模态相位识别·····	(93)
四、	模态阻尼识别·····	(94)
第六节	试验验证·····	(97)
<b>第六章</b>	<b>结构损伤诊断</b> ·····	<b>(100)</b>
第一节	位移类损伤指标法·····	(101)
一、	坐标模态确认准则·····	(101)
二、	模态曲率指标·····	(101)
三、	模态柔度指标·····	(102)
四、	模态应变能指标·····	(103)
第二节	应变类损伤指标法·····	(103)
一、	绝对变化量指标·····	(103)
二、	相对变化量与应变模态差的变化率指标·····	(104)
三、	坐标应变模态确认准则及其改进方法·····	(104)
四、	弯矩指标·····	(105)
五、	广义应变比能指标·····	(105)
第三节	模态测试系统·····	(105)
一、	试验结构的支撑方式·····	(106)
二、	激励方式·····	(107)
三、	激励装置·····	(110)
四、	测量分析系统·····	(112)
五、	损伤诊断现场模态试验步骤·····	(115)



六、简支梁损伤位移模态与应变模态数值仿真分析·····	(116)
七、试验验证·····	(128)
<b>第七章 结构损伤直接指标法</b> ·····	<b>(135)</b>
第一节 基于应变模态差分原理的损伤位置直接指标法·····	(135)
一、基于损伤应变模态的差分数学模型·····	(135)
二、差分曲线零值点确定方法·····	(138)
三、损伤位置直接指标法·····	(142)
四、混凝土梁早期损伤定位数值仿真计算分析·····	(153)
第二节 基于局域应变模态面积的损伤程度直接指标法·····	(161)
一、完好应变模态曲线拟合·····	(161)
二、局域应变模态面积损伤程度数学模型·····	(165)
<b>参考文献</b> ·····	<b>(169)</b>

# 第一章 绪 论

## 第一节 模态分析技术及其应用

随着振动理论及其相关学科的发展,人们早已改变了仅仅依靠静强度理论进行结构设计的观念。许多结构是在外部激励或自身动力作用下处于运动状态,这种运动或其主要成分往往是振动。如旋转机械的振动,空间飞行器的颤振,车辆、船舶等交通运输工具的振动,机床的振动,武器在发射状态下的振动等等。这些机械的设计、评估自然必须考虑动态特性。有些看起来是静态的问题,在结构设计时也必须考虑动态因素的影响。如海工结构设计,除考虑静态因素外,风载、浪载、地震荷载及自身动力都是必须涉及的因素;高层建筑也必须进行风载、地震荷载的影响预估;桥梁,特别是大跨度桥梁,除风载和地震荷载外,还必须考虑桥上车辆荷载的影响,过去和现在都发生过由于共振引起的桥梁毁塌事故;载有旋转机械的厂房,如电厂,特别是核电站的防护层和厂房,动态荷载往往是设计的主要考虑因素之一。还有一些结构,静强度或动强度并不是设计的主要标准,但要求有良好的振动特性。如空调、洗衣机、微波炉等电器产品的设计不当会引发很大的噪声;音箱、乐器等要求有良好的发声效果。事实表明,振动特性分析在结构设计和评价中具有极其重要的位置。特别是随着现代工业的进步,许多产品朝着更大、更快、更轻和更安全可靠的方向发展,对动态特性的要求随之越来越高,振动分析因此愈显重要。

模态分析是振动工程理论的一个重要分支,是研究结构动力特性的一种近代方法,是系统辨别方法在工程振动领域中的应用。模态是结构的固有振动特性,每一个模态具有特定的固有频率、阻尼比和模态振型。这些模态参数可由计算或试验分析取得,这样一个计算或试验分析过程称为模态分析。模态分析为各种产品的结构设计和性能评估提供了一个强有力的工具,其可靠的试验结果往往作为产品性能评估的有效标准,而围绕其结果开展的各种动态设计方法更使模态分析成为结构设计的重要基础。特别是计算机技术和各种计算方法(如 FEM)的发展,为模态分析的应用创造了更为广阔的环境。模态分析技术已经在航空、航天、造船、机械、建筑、交通运输、海洋平台和兵器等几乎所有的工程领域中得到广泛应用。它最早应用于航空、航天领域。在技术先进的国家,试验模态分析技术早已进入工厂化应用阶段。

模态分析的应用可分为四类:① 模态分析在结构性能评价中的直接应用;② 模态分析在结构动态设计中的应用;③ 模态分析在结构损伤诊断和状态监测中的应

用;④ 模态分析在声音控制中的应用。

### 一、模态分析在结构性能评价中的直接应用

根据模态分析的结果,即模态频率、模态振型、模态阻尼等模态参数,对被测结构进行直接的动态性能评估。对一般结构,要求各阶模态频率远离工作频率,或工作频率不落在某阶模态的半功率带宽内;对结构振动贡献较大的振型,应使其不影响结构正常工作为佳。这是模态分析的直接应用,已成为工程界的基本方法。

### 二、模态分析在结构动态设计中的应用

以模态分析为基础的结构动态设计,是近年来振动工程界开展最为广泛的研究领域之一。众所周知,传统的结构设计,在考虑动态因素的结构修改时,是以经验和反复实测为主要手段。尽管依据模态分析结果和响应试验容易初步判断出结构的性能缺陷,但在结构修改问题上却往往不知所措,设计人员只能依据经验、条件进行反复修改和实测,有时甚至将原方案完全推翻重新设计。这大大减缓了设计速度,设计质量也难以达到最优。为此,科技工作者不断探索有依据的结构动态修改方法,以期达到优化设计的目的。

有限元法(FEM)和试验模态分析(EMA)为结构动态设计提供了两条最有效的途径。在围绕这两种基本方法所开展的结构动态设计研究工作中,人们提出了很多方法。可归纳为以下六类<sup>[1]</sup>:① 荷载识别;② 灵敏度分析;③ 物理参数修改;④ 物理参数识别;⑤ 再分析;⑥ 结构优化设计。它们分别从不同方面解决了结构动态设计中的部分问题,某几种方法的组合可做到结构优化设计。

### 三、模态分析在结构损伤诊断和状态监测中的应用

利用模态分析得到的模态参数等结果进行损伤判别,日益成为一种有效而实用的故障诊断和安全检验方法。损伤诊断包括通常意义上机械工程的故障诊断和土木工程中的结构损伤(破损)诊断。如根据模态频率的变化判断裂纹的出现,根据模态分析判断裂纹的位置,根据转子支撑系统阻尼的改变判断和预报转子的失稳。土木工程中依据模态频率的变化判断水泥桩中是否有裂纹和空隙,以及根据位移模态、曲率模态、应变模态、模态柔度、模态应变能等指标诊断结构损伤位置及程度等内容,将在第六章中作详细介绍。

### 四、模态分析在声音控制中的应用

声音控制包括利用振动和抑制振动两个方面。抑制振动结构的辐射噪声,在很多问题中都很突出,如汽车、内燃机、工程机械等。模态分析为分析噪声产生的原因及治理措施提供了有效的方法。

事实上,模态分析在工程中的应用远不止以上列举的四类情形,科技工作者正在试图将模态分析的应用扩大到更广的范围。

## 第二节 国内外发展概况

模态分析技术源于20世纪30年代提出的将机电进行比拟的机械阻抗技术<sup>[2]</sup>。由于当时测试技术及计算机技术的限制,它在很长时期内发展非常缓慢。至20世纪50年代末,该技术仅限于离散稳态正弦激振方法。20世纪60年代初,跟踪滤波器的问世使得频响函数的测试大大节约了时间,四相测试仪的出现并利用模态正交性,将相邻较近的模态加以分离成为可能。与此同时,开始利用计算机对模态参数进行识别,先将跟踪滤波器输出的模拟量经模数转换输入计算机,并应用数值计算方法进行参数识别。

模态参数识别分为频域法和时域法。频域法主要是利用实测的频率响应数据或曲线,根据频响函数模态展开式,求解系统模态参数。该法发展较早,20世纪70年代中期以前发展成熟的有多点稳态正弦激振法和单点激振频响函数法。对单点激振频响函数法发展最有影响的是于20世纪60年代末问世的快速傅立叶变换计算方法(FFT),此后又发展了许多其他激振方法,如脉冲、随机、伪随机等。单点激振频响函数法简单易行,使用经济,应用较广,常用于精度要求不高的故障诊断。多点稳态正弦激振法能分离密集模态,丢失模态的机会少,但由于试验设备庞大,费用昂贵,试验费时,且激振力的选择很大程度上依赖于试验人员的经验,故该法多用于宇航部门。因此,人们一直在寻求一种能综合它们优点于一体的多点激振方法,在多通道数据采集及计算机小型化、高速度、大容量技术条件下,于20世纪70年代末80年代初开始取得实质性进展。20世纪80年代中后期先后推出了商品化系统分析软件,其中有代表性的是美国结构动力研究公司(SDRC公司)的多参考点复指数法和多点激振频域法。

频域法又称曲线拟合法,即用理论曲线拟合实测曲线,使之误差最小。主要包括最小二乘圆拟合法、非线性加权最小二乘法、直接偏导数法、Levy法、正交多项式拟合法、分区模态综合法、频域总体识别法等。按输入输出方式又可分为单输入单输出(SISO)识别、单输入多输出(SIMO)识别和多输入多输出(MIMO)识别。模态参数频域法又可分为单模态识别法和多模态识别法,对各模态耦合较小的系统,单模态识别法可达到满意的识别精度,而对模态耦合较强的系统,必须用多模态识别法。

20世纪80年代初,频域法的基本原理、技术实现和产品设备已发展得相当成熟,识别效果也相当令人满意。事实上,目前频域法仍是模态分析的主流方法。频域法的最大优点是利用频域平均技术,最大限度地抑制了噪声影响,使模态定阶问题容易解决。然而,该方法也存在若干不足,如功率泄漏、频率混叠、离线分析等,并且,由

于该方法对非线性参数需用迭代法识别,因而分析周期长;必须使用激励信号,特别是对大型结构,尽管可采用多点激振技术,但有时仍难以实现有效激振,如大型海工结构、超大建筑物、超大运输工具等,往往只能得到自然力或工作状态激励下的响应信号。

为此,从 20 世纪 70 年代起,陆续有人开始研究只基于响应信号的模式识别技术<sup>[1]</sup>。1973 年, S. R. Ibrabim 提出了一种模式参数识别的时域法,但是该方法必须同时利用位移、速度、加速度三种自由响应信号,应用并不方便。1977 年,他对该法做了重大改进,只利用位移、速度、加速度三种自由响应信号中的一种,即可识别系统的模式参数,通常称为 ITD 法。其特点是同时使用全部测点自由响应数据,实际是一种整体模式参数识别方法,这种方法成为后来发展起来的多种整体识别法的基础。1986 年, Ibrabim 又提出了省时算法,使 ITD 法计算量大为降低。

20 世纪 70 年代末发展起来的另一种时域识别法是最小二乘复指数(LSCE)法,该法使用了 Prony 多项式,所以又称 Prony 法。另外,在单参考点复指数法的基础上, Harvard Vold 于 1982 年提出了多参考点复指数(PRCE)法。1984 年, NASA 所属的 Langley 研究中心又发展了一种特征系统实现(ERA)法。这两种方法均属于 MIMO 整体识别法,比单参考点 LSCE 法的识别精度有较大提高,特别是能识别密集模式和重根情形,对大型复杂结构效果良好。

另一类时域识别方法是时间序列法。20 世纪 70 年代中期,美籍华人吴贤铭和 Pandit 将时序法成功用于机械制造业,对该数学方法赋予了清晰的物理概念,讨论并阐明了时序模型方程与振动微分方程间的关系。时序法使用的数学模型(差分方程)主要是 AR 模型和 ARMA 模型。AR 模型只采用响应信号, ARMA 模型需采用激励和响应两种信号,二者均为平稳随机信号。1986 年, J. M. Leuridan 等人利用 ARMA 模型提出另一种 MIMO 时域识别法 DPMI(Direct Parameter Model Identification),该方法将 LSCE、PRCE 及 ITD 法统一起来。

时域参数识别法主要优点是只使用实测响应信号,无需 FFT 变换,因而可进行在线分析,使用设备简单。当然,其缺点也很明显,由于不采用脉冲响应信号,不使用平均技术,因而分析信号中包含噪声干扰,所识别的模式中除系统模式外,还包含噪声模式。人们已提出若干方法和对策,如采用模式置信因子(MCF)或总体模式置信因子(OAMCF)、模式形状相关系数(MSCC)等判断其是否为噪声模式,采用增加测点数给噪声以出口,采用逐步扩阶最小二乘法确定模式有效阶数等方法,都在一定程度上解决了模式定阶问题。

## 第二章 模态分析理论

本书讨论的是线性系统,并且假设系统是定常与稳定的,即线性时不变系统。所谓线性是指描述系统振动的微分方程为线性方程,其响应对激励具有叠加性。所谓定常是指振动系统的动态特性(如质量、阻尼、刚度等)不随时间变化;所谓稳定是指系统对有限激励将产生一个有限的响应,即系统满足傅氏变换和拉氏变换的条件。

一个振动系统可以有多种分类方法。从空间角度来分,有离散(有限自由度)系统和连续(无限自由度)系统两种;从时间角度来分,有连续时间系统和离散时间系统两种。所谓连续时间系统,是指激励和响应是连续时间的函数;而离散时间系统是指激励和响应是离散时间点的函数。本章只讨论空间离散的连续时间系统,后续章节将涉及空间、时间都离散的系统。

本章研究振动系统的物理参数模型、模态参数模型和非参数模型的关系,即三种模型的理论建模问题。研究方法有坐标变换法和拉氏变换法。坐标变换法只适用于简谐激励的情形,它能给出各种模型及参数的明确物理意义;拉氏变换法非常简明,只适用于一般激励情形。

不管何种方法,总是先建立结构的物理参数模型,即以质量、阻尼、刚度为参数的关于位移的振动微分方程;其次是研究特征值问题,求得特征值和特征矢量,进而得到模态参数模型,即系统的模态频率、模态矢量、模态阻尼比、模态质量、模态刚度、模态阻尼等参数。为了研究模态参数模型的物理意义,有时也讨论自由响应。最后,在讨论以上两种模型的基础上,通过研究强迫动力响应问题,得到系统的非参数模型,即频响函数(或传递函数)和脉冲响应函数。非参数模型是进行试验模态分析系统识别的基础,故对非参数模型的研究显得尤其重要。

根据阻尼模型的不同,分为无阻尼、比例阻尼、结构阻尼和一般粘性阻尼四种情形进行讨论。

### 第一节 单自由度系统振动

单自由度系统是最简单的离散振动系统。单自由度系统具有一般线性振动系统所共有的基本特性;对多自由度系统或弹性体系的振动,各阶模态显示和单自由度系统相同的性态。所以,单自由度系统具有重要地位,研究单自由度系统振动可给出最基本的概念,其理论在单模态系统识别中可直接应用。在振动分析中,往往需将系统简化为由若干“无质量”弹簧和若干“无弹性”质量块组成的力学模型,称之为弹簧—质

量系统。

### 一、粘性阻尼系统

所谓粘性阻尼是指阻尼力与速度成正比且反向的阻尼模型。单自由度振动系统的物理参数模型如图 2-1 所示,振动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2-1)$$

式中  $m, c, k$  —— 分别为质量、粘性阻尼系数、刚度;

$x, \dot{x}, \ddot{x}$  —— 分别为位移、速度、加速度;

$t$  —— 时间;

$f(t)$  —— 激振力。

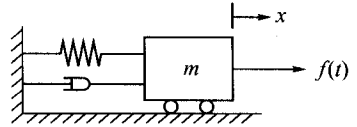


图 2-1 单自由度振动系统

#### 1. 自由振动

令  $f(t) = 0$ , 式(2-1) 变为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2-2)$$

或改写成

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2-3)$$

式中  $\sigma$  —— 衰减系数,  $\sigma = \frac{c}{2m}$ ;

$\omega_0$  —— 固有频率,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

引入相对阻尼比

$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_0} = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{c_c}$$

称  $c_c = 2\sqrt{mk}$  为临界阻尼系数。

式(2-3) 可写为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2-4)$$

为解上述微分方程, 可令特解

$$x = \phi e^{\lambda t} \quad (2-5)$$

式中  $\lambda$  —— 系统特征值。

将  $x$  代入方程后得

$$(\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2)\phi e^{\lambda t} = 0 \quad (2-6)$$

为了使系统有非零解, 应有

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2-7)$$

式(2-7) 的根为

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d \quad (2-8)$$

式中  $\omega_d$ ——阻尼固有频率,  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ 。

根据阻尼大小不同,系统运动分三种情况:①  $\zeta > 1$ ,过阻尼,系统不产生振动;②  $\zeta = 1$ ,临界阻尼,无振动发生;③  $\zeta < 1$ ,欠阻尼,系统产生振动。以下讨论均是欠阻尼情况。

式(2-8)说明系统的特征值实部、虚部分别代表系统的衰减系数和阻尼固有频率,特征值的模  $|\lambda_{1,2}| = \omega_0$ ,所以振动理论中,有时也把特征值称为复频率。

容易求得方程(2-2)的通解即自由振动响应

$$x = Ae^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (2-9)$$

式中  $A, \varphi$ ——常数,由初始条件确定。

如果初始条件  $t = 0$  时,  $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ , 则

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \sigma x_0}{\omega_d}\right)^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \sigma x_0} \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

## 2. 频响函数

假设系统作用简谐激励  $f(t) = Fe^{j\omega t}$ ,  $F$  为激励(幅)值,  $\omega$  为激励频率,则  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  经过短时间的过渡过程之后,将变为稳定的简谐振动响应  $x = Xe^{j\omega t}$ ,  $X$  为稳态位移响应幅值。

微分方程式(2-1)化为代数方程

$$(k - m\omega^2 + j\omega c)X = F \quad (2-11)$$

在简谐激励下,定义系统位移频响函数为稳态位移响应与激励幅值之比,用  $H(\omega)$  表示,即

$$H(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\omega c} \quad (2-12)$$

则

$$X = H(\omega)F \quad (2-13)$$

除位移频响函数外,还可导出速度频响函数  $H_V(\omega)$ 、加速度频响函数  $H_A(\omega)$ , 即

$$H_V(\omega) = \frac{V}{F} = \frac{j\omega}{k - m\omega^2 + j\omega c} \quad (2-14)$$

$$H_A(\omega) = \frac{A}{F} = -\frac{\omega^2}{k - m\omega^2 + j\omega c} \quad (2-15)$$

位移频响函数、速度频响函数和加速度频响函数统称为频响函数,因位移频响函数应用最广,所以,通常提到的频响函数即指位移频响函数。

从频响函数表达式可知,频响函数与  $m, k, c$  有关,它反映系统的固有特性,是以激励频率  $\omega$  为参变量的非参数模型。

若系统受任意激励作用,频响函数可定义为系统的稳态响应与激励的傅氏变换



之比,即

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)}, X(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

频响函数的倒数称为阻抗,分析问题时,有时使用阻抗更为方便。位移阻抗  $Z(\omega)$ 、速度阻抗  $Z_V(\omega)$  和加速度阻抗  $Z_A(\omega)$  分别表示产生单位位移响应、速度响应和加速度响应所提供的激振力。三种阻抗定义如下:

$$\left. \begin{aligned} \text{位移阻抗} \quad Z(\omega) &= \frac{1}{H(\omega)} = k - m\omega^2 + j\omega c \\ \text{速度阻抗} \quad Z_V(\omega) &= \frac{1}{H_V(\omega)} = \frac{k - m\omega^2 + j\omega c}{j\omega} \\ \text{加速度阻抗} \quad Z_A(\omega) &= \frac{1}{H_A(\omega)} = -\frac{k - m\omega^2 + j\omega c}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

三种频响函数和阻抗的定义及惯用名如表 2-1 所列:

表 2-1 频响函数和阻抗的定义及惯用名

名称(惯用名)	位移频响函数(位移导纳、动柔度)	速度频响函数(速度导纳、导纳)	加速度频响函数(加速度导纳)	位移阻抗(动刚度)	速度阻抗(机械阻抗)	加速度阻抗(动质量、表观质量)
定义	$H(\omega) = \frac{X}{F}$	$H_V(\omega) = \frac{V}{F}$	$H_A(\omega) = \frac{A}{F}$	$Z(\omega) = \frac{F}{X}$	$Z_V(\omega) = \frac{F}{V}$	$Z_A(\omega) = \frac{F}{A}$

### 3. 脉冲响应函数

振动系统在单位脉冲力作用下的自由响应称为单位脉冲响应函数,简称脉冲响应函数。所谓单位脉冲力,是指冲量为 1、作用时间无限短的瞬时力。用  $\delta$  函数描述单位脉冲力为

$$\left. \begin{aligned} \delta(t - \tau) &= \begin{cases} \infty & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

对于单自由度系统,质点在受单位脉冲力后获得的动量  $m\dot{x} = 1$ ,假设初始状态 ( $t = 0$ ) 受单位脉冲力,则自由振动的初始条件为:

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = \frac{1}{m} \quad (2-18)$$

代入式(2-10),由式(2-9)得到系统自由振动响应,即脉冲响应函数

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\sigma t} \sin\omega_d t \quad (2-19)$$

容易证明脉冲响应函数与频响函数是一傅氏变换对,即  $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$ 。

脉冲响应函数与频响函数一样能反映振动系统动态特性,只不过频响函数在频