DIANDONGLIXUE

电动力学

刘迎春　王秀江　编

吉林大学
出版社

电 动 力 学

刘迎春 王秀江 编

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

电动力学 / 刘迎春，王秀江编. —3 版—长春：吉林大学出版社，2007.3

ISBN 7－5601－2421－6

Ⅰ．电… Ⅱ．①刘… ②王… Ⅲ．电动力学－高等学校－教材 Ⅳ．0442

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 026684 号

电 动 力 学

刘迎春　王秀江　编

责任编辑、责任校对：唐万新	封面设计：孙　群
吉林大学出版社出版	吉林大学出版社发行
（长春市明德路 421 号）	吉林农业大学印刷厂印刷
开本：787×1092 毫米　1/16	2006 年 12 月第 3 版
印张：17.875	2006 年 12 月第 1 次印刷
字数：418 千字	印数：1－1000 册
ISBN 978－7－5601－2421－6	定价：23.00 元

前　　言

电动力学是研究电磁场和电磁波的基本属性、运动规律以及场与带电物质相互作用的基本理论。自 1862 年麦克斯韦概括和发展了电磁学研究的成果，成功地总结出电磁场的基本规律，使电动力学成为一门学科并得到了飞速的发展。随着人们对各种物理现象和物理规律的探索研究不断取得新的突破，特别是爱因斯坦狭义相对论及广义相对论的创立，对 20 世纪物理学产生了重大的影响。电动力学这门学科也在不断地充实和发展，因此，作为教科书也必须跟上时代的要求，不断地改善和丰富。

本书就是在 2000 年吉林大学出版的《电动力学》基础上进一步全面修订的。目的是为适应面向 21 世纪课程体系与教学内容改革的需要，适应经典电磁场理论与现代科技相联系的需要。本书保留了原书理论的系统性、概念的清晰性、例题的多样性等好的特点，删除了与电磁学相重复的内容，对繁杂的数学内容进行了精简。而加进了一些与现代科技发展的新观点和新方法，并借鉴了国内及国外一些优秀教材，对例题和习题作了一些更新，使学生不仅能掌握物理学的基本知识，还了解了本学科的前沿课题和研究动向，提高学生的科学素质，使本书更适合于新世纪本科生的教学使用。

全书共分七章，第一章至第五章系统介绍宏观电磁场的基本理论。从电磁现象的基本规律出发，阐述了静电场、稳恒电磁场、似稳电磁场、辐射和传播的主要内容，强调在各种条件下，如何从基本方程出发去计算和分析电磁场。第六章介绍狭义相对论；第七章介绍带电粒子与电磁场之间的相互作用。为便于学习，书后加有附录和习题答案，另外还编制了为教学用的 CAI 课件。

本书适合于各综合性大学物理学科、电子信息学科及相关学科的本科生作为教科书或参考书。

编者力求将此书修订得完美，但是限于水平，缺点、错误在所难免，恳请专家和读者批评指正，谢谢！

编　者

目　　录

第一章　电磁现象的基本规律

本章从电磁现象的实验定律出发，对电荷守恒定律、库仑定律、毕奥-萨伐尔定律、法拉第电磁感应定律等进行概括、总结和提高，得出电动力学的基本方程，即麦克斯韦方程组.

在电磁运动中有电荷和电场、电流和磁场、电荷和电流、电场和磁场这四对基本关系，通过对它们的考察分析，从而全面地认识电磁现象的基本规律.

电磁现象的基本规律包括三部分内容：

(1)电荷的自身规律，即电荷守恒定律.

(2)电磁场的基本规律，即麦克斯韦(Maxwell)方程组.

(3)带电体与电磁场之间的相互作用，即洛伦兹(Lorentg)力公式.

在这一章中我们将分别加以讨论.

§1　静电场的散度和旋度

一、库仑(Coulomb)定律和电场强度

库仑定律是描述真空中两个静止点电荷之间相互作用力的定律，其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 \boldsymbol{r}_{21}}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3} \tag{1.1.1}$$

如图 1.1 所示，式中符号 $\boldsymbol{r}_{21} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$，表示点电荷 q_1 到 q_2 之间的矢径；$\boldsymbol{F}_{12}$表示点电荷 q_2 对 q_1 的作用力.同理 $\boldsymbol{F}_{12}$表示点电荷 q_2 对 q_1 的作用力，

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \boldsymbol{r}_{12}}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^3} \tag{1.1.2}$$

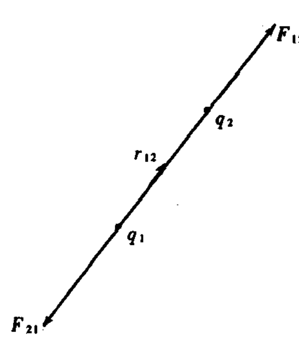

图 1.1

库仑定律的内容已为大家所熟知，这里要着重指出的是，该定律在电磁学发展史上的重要地位.库仑定律的发现使人们对电磁现象的研究由定性过渡到定量的研究，这是电磁学研究的转折点.特别是现代物理实验已证明，库仑定律反比于 $r^{2+\delta}$，而 δ 的极限值为$(2.7 \pm 3.1) \times 10^{-15}$，因此库仑定律是目前自然界中最精确的定律之一.

近代物理认为，库仑定律实质上是一个电荷在空间激发的电场，该电场对另一个电荷产生作用力，反之依然.以后通过讨论我们将看到，电场具有更深刻的物理意义，它是物质

存在的一种形式.为了描述电场的性质,引入电场强度的概念.电场强度是的一个矢量,它等于作用在单位正电荷上的力.于是电荷 2 在电荷 1 的电场中所受的作用力可写成:

$$\boldsymbol{F}_{12} = q_2\boldsymbol{E} \tag{1.1.3}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \tag{1.1.4}$$

$\boldsymbol{E}$ 是电荷 q_1 在 $\boldsymbol{r}_{12}$处的电场强度,在 SI 单位制中,电场强度的单位是伏特每米(V/m).

实验还发现电场满足叠加原理,在几个点电荷同时存在的情况下,如图 1.2 所示,空间某点处的电场强度,等于各个点电荷在该点产生的电场矢量和.即

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_1\boldsymbol{r}_i}{r_i^3} \tag{1.1.5}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个点电荷 q_i 到待求场点 $P(x,y,z)$处的矢径.

当电荷连续分布在某一空间区域时,电荷体密度定义为

$$\rho(x,y,z) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{1.1.6}$$

ΔV 是(x,y,z)点周围一个小体积元,Δq 是 ΔV 内的电量,这时区域 V 内的电荷在$P(x,y,z)$点的电场强度应为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \tag{1.1.7}$$

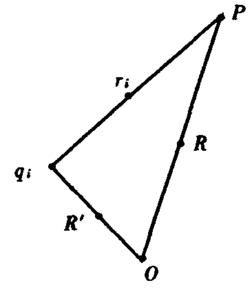

图 1.2

式中各量如图 1.3 所示.与此相类似,如果电荷分布在一薄层内,可以引入面电荷密度 $\sigma(x,y,z)$,它的定义是

$$\sigma(x,y,z) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S} \tag{1.1.8}$$

ΔS 是(x,y,z)点周围一个小面积元,Δq 是 ΔS 面元内的电量,这时应注意,面电荷密度是一个抽象的概念,实际的电荷是分布在薄层内,对抽象后的面电荷,体密度为无限大.区域 S 内的电荷在$P(x,y,z)$点的电场强度应为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\sigma(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S' \tag{1.1.9}$$

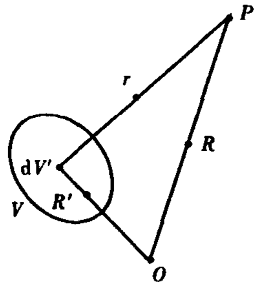

图 1.3

如果电荷分布在一条线上,可以定义单位长度上的线电荷密度 $\lambda(x,y,z)$是

$$\lambda(x,y,z) = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta\lambda} \tag{1.1.10}$$

则电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L\frac{\lambda(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}L' \tag{1.1.11}$$

引入电场强度以后,计算一个电荷受到其它电荷的作用力,就归结为计算该电荷处的电场强度.同时我们可清楚地看到,电荷之间的相互作用不再是“超距”的,它们之间是通过电场传递才发生作用的,电场可以在空间的无源区域存在,且遵守叠加原理.

二、高斯(Gauss)定理和静电场的散度

在普通物理电磁学中大家已熟悉高斯定理的内容:静电场中,通过任意闭合曲面的电通量,等于曲面所包围的总电量的代数和除以真空介电常数.即

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{R})\mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.1.12}$$

这是一个积分方程,将其化成微分形式,利用场论中的散度定理有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\mathrm{d}V$$

因为上式对任意区域都成立,故得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{1.1.13}$$

此便是高斯定理的微分形式,也称静电场的散度方程.它表明了静电场是一个有源场.须注意,上式的得出利用了散度定理,这要求 E 在空间 V 内连续可微.从场论中知道,要确定一个矢量场,除了给出散度方程外,还必须同时给出其旋度方程.

三、静电场的旋度

由电场强度出发,

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \tag{1.1.14}$$

对空间任意一个闭合回路作线积分,并利用斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_l \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}V'\rho(\boldsymbol{R}')\oint_l \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'\int_S\left(\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

由于

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\nabla \times \nabla \frac{1}{r} = 0$$

所以

$$\oint_L \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{1.1.15}$$

再利用斯托克斯公式可得

$$\oint_L \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}S = 0 \tag{1.1.16}$$

上式对任意曲面都成立,故有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

上式表明:静电场的旋度处处为零,是一个无旋的场.

根据以上的讨论可知:

(1) 静电场是有源无旋场,电场线不闭合,从正电荷出发到负电荷终止.

(2) 静电场的场强是一个保守力场,所以可以引入标量函数 ϕ,即 $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$.

(3) 因为 $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$, $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$,故有

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1.17}$$

这就是静电场标势 ϕ 所满足的泊松方程. 此方程是确定静电场的基本方程,它是从库仑定律推出来的,它把计算电场的问题归结为求解微分方程的问题,从而更便于求解静电场的问题.

§2 静磁场的散度和旋度

一、电荷守恒定律

电荷的运动形成电流,为了描述电流的大小,引入几个相关的物理量.

电流密度矢量:电荷的运动产生电流,通常用电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 来描述,其定义为

$$\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v} \tag{1.2.1}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 表示电荷密度 ρ 运动的速度. 亦称 $\boldsymbol{J}$ 为体电流密度.

电流强度:单位时间垂直通过导体截面的电量,一般用 I 来表示,它与 $\boldsymbol{J}$ 的关系是

$$I=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.2.2}$$

电荷守恒定律:此定律是自然界所遵循的最精确的规律之一,即单位时间内任一体积内电荷的减少,都等于流出其包围面的总电量. 其积分形式为

$$\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho\mathrm{d}V \tag{1.2.3}$$

利用数学上高斯公式

$$\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{J})\mathrm{d}v=-\int_V\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

因为 S 面是任意的,所以 V 也是任意的,故有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1.2.4}$$

此为电荷守恒定律的微分形式.

在稳定电流情况下,各处的电荷分布和电流分布不随时间变化,因此$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$,所以有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0 \tag{1.2.5}$$

二、毕奥-萨伐尔(Bio-Savart)定律

真空中磁场的大小用磁感应强度 B 来描述. 在 1820 年毕奥-萨伐尔总结了实验资料,得出磁感应强度与电流强度之间的关系,后来被称做毕奥-萨伐尔定律. 其内容为:通

有电流强度为 I 的电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，在距它为 r(见图 1.4)处产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1.2.6}$$

如果电流是体电流分布，上式中的电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 应换为 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$，于是有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}\mathrm{d}V\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1.2.7}$$

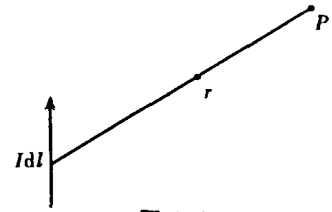

图 1.4

则在区域 V 内的闭合电流产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \tag{1.2.8}$$

此式为稳恒电流产生磁场的基本实验定律，称之为毕奥-萨伐尔定律.

三、安培(Ampere)作用定律

1822 年安培总结实验资料得到电流在磁场中受力的公式，称为安培定律，它的内容是：在磁场中一个线电流元所受到的力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{1.2.9}$$

如果在磁场中是一个体电流元，所受到的力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J}\mathrm{d}V\times\boldsymbol{B} \tag{1.2.10}$$

若真空中有两个稳定的电流元 $\boldsymbol{J}_1\mathrm{d}V_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2\mathrm{d}V_2$(见图 1.5)，则电流元 1 受到电流元 2 的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}_1\mathrm{d}V_1\times\left(\frac{\boldsymbol{J}_2\mathrm{d}V_2\times\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right) \tag{1.2.11}$$

其中 $\boldsymbol{r}_{12}$ 为电流元 2 到电流元 1 的距离.

同理电流元 2 受到电流元 1 的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{21}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}_2\mathrm{d}V_2\times\left(\frac{\boldsymbol{J}_1\mathrm{d}V_1\times\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}\right) \tag{1.2.12}$$

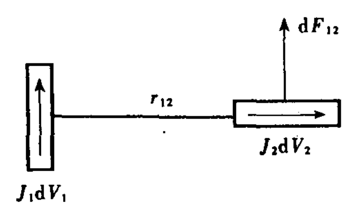

图 1.5

其中 $\boldsymbol{r}_{21}$ 为电流元 1 到电流元 2 的距离.

将其与库仑定律相比较看到：电流元之间的相互作用力也服从与 r 平方成反比，但是不满足牛顿第三定律，即：$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}\neq\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{21}$，这与库仑定律完全不同.其原因是：实际中不可能存在稳定的电流元，实验所能做的只能是闭合的稳恒电流回路(见图 1.6).而两个闭合回路之间的相互作用力为

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3} \tag{1.2.13}$$

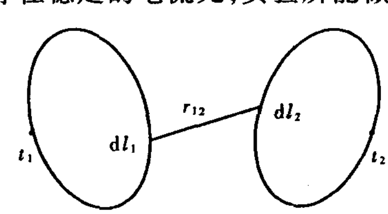

图 1.6

可以证明，闭合回路的电流之间的相互作用力满足牛顿第三定律，即

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

四、静磁场的散度和旋度

由于稳恒电流产生的磁场,不随时间而变化,亦称静磁场.由安培环路定理知,

$$\oint_L \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.2.14}$$

利用斯托克斯公式

$$\oint_L \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times \boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由于 L 是任意的,S 是以 L 为周界的任意一个曲面,所以 S 也是任意的,因此有

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{1.2.15}$$

即稳恒电流的磁场是一个有旋场,此式称为安培环路定理的微分形式.

再将磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})$对任一闭合曲面作积分,

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\times \boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V' = \frac{-\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{d}V\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\times\nabla\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathrm{d}V'\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\right)$$

由于电流 $\boldsymbol{J}$ 只是 $\boldsymbol{R}'$ 的函数,∇ 算符对其无微商作用,与其交换位置仅差一个负号.再利用高斯公式得

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\right) = \int_V \nabla\cdot\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\right)\mathrm{d}V$$

而 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\equiv 0$,其中 $\boldsymbol{A}$ 为任意一矢量,所以

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V = 0$$

因为 S 面任意,它所包围的体积 V 也任意,所以有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{1.2.16}$$

即稳恒电流的磁场是一个无源的场.稳恒电流的磁场,亦称静磁场,是一个无源有旋的场,磁感线是闭合的,没有起点也没有终点.

静磁场是非保守力场,电流激发的磁场以涡旋形式出现,与静电场完全不同.

§3　真空中的麦克斯韦方程组

一、法拉第电磁感应定律

电磁感应　1831 年法拉第(Faraday)首先从实验定量地研究了变化磁场与电场之间的联系,发现在任意一个闭合的导体回路里,当回路所围成的面积中磁通量变化时,回路中将出现电流,这种现象称为电磁感应现象.

感应电动势　在电磁感应现象中,回路中有电流,说明回路中存在电动势,这种电动势称为感应电动势.

法拉第首先从实验中确定了感应电动势的大小与穿过回路的磁通量变化率成正比，后来楞次(Lenz)又从实验中确定了感应电动势的方向，即感应电流的磁通量总是力图补偿原来引起感应电流的那种磁通量的变化，被称之为楞次定律.把这两个实验定律结合起来，就得到感应电动势的定量表达式：

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{1.3.1}$$

这就是电磁感应定律或称法拉第电磁感应定律.

此定律说明，只要回路中有磁通量的变化，不管是什么原因引起的这种变化，回路中都会产生感应电动势.引起磁通量变化的原因有三种：第一种是磁场不随时间变化，但回路的整体或局部运动，这样产生的电动势称为动生电动势；第二种是回路不动但磁场随时间变化，这样产生的电动势称为感生电动势；第三种是前两种情况同时出现，因而出现的电动势就是两者叠加.

另一方面，导体回路中的感应电动势又可以写成

$$\varepsilon = \oint_L \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.3.2}$$

用 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}$ 表示感应电场，再利用闭合回路磁通量的定义

$$\phi = \oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

代入法拉第电磁感应定律中，有

$$\oint_l \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式右端对时间的微商可以移到积分号内，而一般磁场 $\boldsymbol{B}$ 还是空间的函数，故对时间的微商应该写为偏微商，于是有

$$\oint_l \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.3.3}$$

利用斯托克斯公式，上式左端又可写为

$$\oint_l \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以(1.3.3)式可以改写为

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式对任意区域都成立，故得

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.3.4}$$

(1.3.3) 和(1.3.4)式给出了感应电场旋度的积分形式和微分形式.从场论中知道，要确定一个矢量场还必须知道它的散度方程.实验上没有直接给出关于 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}$ 的散度性质，麦克斯韦从理论上假定

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.3.5}$$

这个假定的正确性是由理论与实验的对比来证明的，大量事实表明，这个假定是正确的.

再利用散度定理有

$$\oint_S \boldsymbol{E}_\mathrm{b} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{b}) \mathrm{d}V = 0$$

由于上式对任意体积均成立，故得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{b} = 0 \tag{1.3.6}$$

由(1.3.4)和(1.3.6)式看出，感应电场是有旋、无源的场，而静电场是无旋、有源的场，两种电场的性质有本质的差别.

若用 $\boldsymbol{E}_\mathrm{e}$表示静电场，可以将这两种场的方程作比较.

1.静电场

$$\oint_S \boldsymbol{E}_\mathrm{e} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \cdot \mathrm{d}V$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}_\mathrm{e} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_\mathrm{e} = 0$$

2.感应电场

$$\oint_S \boldsymbol{E}_\mathrm{b} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{b} = 0$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}_\mathrm{b} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_\mathrm{b} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$\boldsymbol{E}_\mathrm{e}$是由电荷所激发的纵场，所谓纵场是指散度不为零而旋度为零的场，而 $\boldsymbol{E}_\mathrm{b}$是由变化的磁场所激发的横场，所谓横场是指散度为零而旋度不为零的场.

一般情况下的场是由纵场和横场叠加而成，因此其场的普遍方程式为

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \cdot \mathrm{d}V$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

二、真空中麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组是描述电磁场的基本规律的方程组，我们首先讨论真空中的麦克斯韦方程组.

总结一下前面所讲述的电磁现象的基本规律用微分形式的方程表示如下：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=0\quad(\text{静止电荷产生的场})$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}\quad(\text{稳恒电流产生的场})$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad(\text{变化磁场})$$

这些方程都是在各种特殊条件下才满足的，我们将把它们推广到普遍情况都成立的方程.

一般的电场应包含静电场和感应电场

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}$$

静电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}$是一个有源、无旋的场，而感应电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}$是有旋、无源的场（麦克斯韦理论假定），所以总电场的性质应为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.3.7}$$

是一个既有源又有旋的场.

下面讨论一般情况下磁场所应满足的方程.

由法拉第电磁感应定律知：变化的磁场可以激发电场，那么变化的电场能否激发磁场呢？而当初在实验中并未发现这方面的效应，但是麦克斯韦在总结电磁场理论时，发现必须作相关的假设，才能使整个电磁场理论成为合理的、自恰的.

由稳恒电流所激发的磁场知

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}\tag{1.3.8}$$

将其两端同时取散度，有

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J}\tag{1.3.9}$$

方程左端：$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\equiv0$，因此只有在 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ 的情况下此式才能成立，即仅在稳恒的条件下才成立.在非稳恒时，由电荷守恒定律知

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}&=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{J}&\neq0\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

又因为电场与电荷之间有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\tag{1.3.11}$$

的关系，代入到电荷守恒定律表达式中，有

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=0\tag{1.3.12}$$

将此式与(1.3.9)式相比较可以给我们提示：稳恒电流可产生静止的磁场，变化的电场也会产生变化的磁场.

令

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{D}}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

为位移电流.将稳恒情况的(1.3.8)式修改为一般情况下的磁场方程有

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{D}})$$

即位移电流也会产生磁场,且它们都是无源的场,即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

此式满足电荷守恒定律的要求,可适用于普遍情况.

位移电流并非真实电荷的定向运动所产生的电流,它的物理实质是说:变化的电场同样能够激发磁场,位移电流和传导电流的作用相同.位移电流假设的正确性,被后来电磁场的大量实验所证实.引入位移电流是麦克斯韦在建立电磁场理论时做出的重要贡献之一.

因此,真空中麦克斯韦方程组微分形式为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{1.3.13}$$

积分形式为:

$$\begin{cases} \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_{V'} \rho \mathrm{d}V' \\ \oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \\ \oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{cases} \tag{1.3.14}$$

麦克斯韦方程组是从特殊情况下的一些实验定律推广而得到的,其中最重要的推广是假定存在位移电流,即变化电场能产生磁场,并且这种磁场是旋涡场.另一个重要的假定是认为变化磁场产生的电场也是旋涡场.这里得到的麦克斯韦方程组在当初建立时,看成是逻辑上允许的一种假设,后来用它计算普遍情况下的电磁场问题,不仅已有的事实都能由它解释,而且它的解中还预言了许多新的物理现象,例如电磁波,这些现象都被实验证实.它建立后的一百多年来,人们用它解决了许多实际问题,理论预言都和实验一致.因此可以认为麦克斯韦方程组是电磁场的最普遍运动方程.

三、洛伦兹力公式

麦克斯韦方程组反映了电荷、电流激发电磁场的一般规律,而电磁场反过来对电荷、电流的作用,在方程中并没有给出.

库仑定律给出了静止情况下电荷受电场力的公式,安培定律给出了稳恒电流受磁场

的作用力公式.现在把这两个特殊情况下的作用力公式推广到普遍情况.

设一带电体有连续电荷分布,体电荷密度为 ρ,在静电场 E 中,在单位体积内静止电荷上受到的力为

$$f_e = \rho \boldsymbol{E}$$

若带电体等速运动,其速度为 $\boldsymbol{v}$,则在空间形成的电流密度 $\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v}$,在稳恒磁场中,单位体积的电流元上受到的力为

$$\boldsymbol{f}_m = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} = \rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

综合以上公式,将其推广到普遍情况.假定不论带电体的运动状态如何,电磁场作用在带电体单位体积上的力为

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} = \rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.3.15}$$

上式称为洛伦兹力密度公式.第一项是电场力,第二项是磁场力.$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是带电体所在处总的电场和磁场,对电荷连续分布的带电体,总的电磁场包括带电体自身的电磁场.对点电荷洛伦兹力公式为

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.3.16}$$

这时的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不包括电荷自身的电磁场.洛伦兹力公式已被大量的实验证明是正确的.

§4　介质中的麦克斯韦方程组

以上几节讨论的是真空中电磁场的基本方程,当空间存在介质时,基本方程又如何,正是这一节所要讨论的.

空间存在介质时,电磁场将与介质内的电荷、电流相互作用,使介质产生极化和磁化,从而改变了原来的电磁场.

介质分电介质和磁介质.电介质在外电场的作用下发生极化,使介质内部或表面出现宏观的附加电荷和电流,反过来这些附加的电荷和电流又会激发新的电磁场,叠加在原来的电场上.磁介质在外加磁场作用下会产生磁化,即介质内部及表面出现了宏观的电流分布,称之为磁化电流,这些电流又激发新的磁场叠加在原来的磁场上,使原来的电磁场又有所改变.

一、介质的极化及极化电荷与极化强度的关系

在有电场的情况下,对无极分子的介质,正负电荷分别受到方向相反的力的作用,因此正负电荷间的距离被拉开了.另外,那些正负电荷本来就有一定距离的有极性分子在电场作用下按一定方向有序排列.从宏观效果来看这两种行为都相当于产生一个电偶极矩,我们把这种现象称为介质的极化.

对于均匀、线性、各向同性介质引进极化强度矢量来描述,其定义为:

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V} \tag{1.4.1}$$