

21世纪应用型公共
基础系列规划教材

高等数学

崔永新 主编



北京航空航天大学出版社

21 世纪应用型公共基础系列规划教材

013/421

2007

高等数学

崔永新 主编

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本教材力求贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”和“侧重掌握概念、强化应用”的原则。在概念的引入上力求自然,通过实例阐述其直观背景和现实意义,着眼于培养学生分析问题和解决问题的能力。适当增添工程应用和经济应用的内容,以增强其实用性。

全书共分10章,包括:函数、极限、连续,导数和微分,导数的应用,不定积分,定积分,常微分方程及应用,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数和高等数学在经济中的应用。

本书适合应用型本科高等院校、高职高专院校作为基础课高等数学的教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/崔永新主编. —北京:北京航空航天大学出版社,2007.9

ISBN 978-7-81124-223-2

I. 高… II. 崔… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 124960 号

高等数学

崔永新 主编

责任编辑 王鹏

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

<http://www.buaapress.com.cn> E-mail: bhpresse@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×960 1/16 印张:17.75 字数:398 千字

2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月第 1 次印刷 印数:5 000 册

ISBN 978-7-81124-223-2 定价:28.00 元

本书编委会

主 编 崔永新(鸡西大学)

副主编 李建民(平顶山学院)

马晓峰(黑龙江工程学院)

陈丽丽(黑龙江农垦林业职业学院)

主 审 高美华(黑龙江农垦农业职业学院)

前 言

本书积累了作者多年的教学经验和体会,凝聚着老师们的诸多建议和同学们的反馈意见,现在终于定稿了。

本书力求贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”和“侧重掌握概念、强化应用”的原则,在概念的引入上力求自然,通过实例阐述其直观背景和现实意义,着眼于培养学生分析问题和解决问题的能力,适当增添工程应用和经济应用的内容,以增强其实用性。

本书可作为应用型本科、高职高专院校“高等数学”课程的基础教材,依照教育部制定的“数学课堂教学基本要求”,并结合作者 20 多年来为工科类、经济类、管理类学生讲授数学课程所积累的教学经验编写而成。全书共分 10 章,内容包括函数、极限、连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分,常微分方程及应用,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数和高等数学在经济中的应用。书中带“*”号的内容,可针对不同专业的学生酌情选用。每章按节配置适量的习题,书末附有参考答案和解法提示,并在附录中给出了常用的数学公式和积分表,以便于学生学习查阅。

本书具有如下特点:

(1) 体系的实用性。以实用为宗旨,注重实际运用,在一定程度上体现了理工结合、文理渗透,有利于拓宽学生视野。

(2) 内容的通俗性。力求原理简洁,推断简明,举例简单实用,章节紧凑,便于读者阅读,也可作自学选用。

(3) 使用的广泛性。在部分章节的安排上考虑到不同专业的教学内容,可以有选择地进行数学(建议学时 90 左右)。

本书第 1、2、6 章的编写及全书统稿工作由鸡西大学崔永新教授负责,第 4、7、8 章由平顶山学院李建民教授编写,第 3、5 章由黑龙江农垦林业职业技术学院陈丽丽副教授编写,第 9、10 章由黑龙江工程学院马晓峰老师编写。主审工作由黑龙江农业农垦职业学院高美华教授完成。张进瑞、陈兴、石鑫、吴广志、王长安、沙文、张雷、范斌、王琳、王冠珠等老师在编写过程中做了修改、校对工作,在此表示感谢。

由于水平所限,难免存在不尽然之处,敬请诸位同仁师友不吝舍墨指正,赐至邮箱 cui-yongxin6@163.com,我们必将诚恳回谢!

作 者

2007 年 6 月

目 录

第1章 函数、极限、连续	1
1.1 函数的概念及其性质	1
1.1.1 函数概念	1
1.1.2 函数特性	4
1.1.3 反函数	5
1.1.4 基本初等函数	5
1.1.5 复合函数与初等函数	7
* 1.1.6 双曲函数和反双曲函数	8
习题 1.1	9
1.2 极限的概念	10
1.2.1 引 例	10
1.2.2 数列的极限	10
1.2.3 函数的极限	11
1.2.4 无穷小量和无穷大量	12
1.2.5 无穷小量的性质	13
习题 1.2	13
1.3 极限的性质与计算	14
1.3.1 极限的性质	14
1.3.2 极限的四则运算法则	14
1.3.3 两个重要极限	15
习题 1.3	18
1.4 无穷小量阶的比较	18
习题 1.4	20
1.5 函数的连续性	20
1.5.1 连续性概念	20
1.5.2 初等函数的连续性	21
1.5.3 函数的间断点	22
1.5.4 闭区间上连续函数的性质	23
* 1.5.5 函数一致连续性的涵义	24
习题 1.5	25

第 2 章 导数与微分	26
2.1 导数的概念	26
2.1.1 变化率问题举例	26
2.1.2 导数的定义	27
2.1.3 求导举例	28
2.1.4 导数的几何意义	29
2.1.5 可导与连续的关系	29
习题 2.1	30
2.2 函数的求导方法和基本公式	30
2.2.1 导数的四则运算法则	30
2.2.2 反函数的求导法则	31
2.2.3 复合函数的导数	32
2.2.4 隐函数的导数	34
2.2.5 对数求导法	35
2.2.6 由参数方程所确定的函数的导数	36
2.2.7 导数基本公式	37
习题 2.2	38
2.3 高阶导数	39
习题 2.3	40
2.4 函数的微分及其应用	40
2.4.1 微分的概念	40
2.4.2 微分的计算	42
2.4.3 微分形式的不变性	43
2.4.4 微分的应用	43
习题 2.4	46
第 3 章 导数的应用	47
3.1 微分中值定理	47
3.1.1 罗尔定理	47
3.1.2 拉格朗日中值定理	48
3.1.3 柯西中值定理	50
习题 3.1	52
3.2 洛必达(L'Hospital)法则	52
习题 3.2	54
3.3 函数的单调性	55

习题 3.3	57
3.4 函数的极值和最值	58
3.4.1 函数的极值及其求法	58
3.4.2 函数的最值及其求法	61
习题 3.4	65
3.5 对函数性态分析及作图	65
3.5.1 函数的凹凸性与拐点	65
3.5.2 曲线的渐近线	67
3.5.3 函数作图	68
习题 3.5	69
* 3.6 曲 率	70
3.6.1 弧微分	70
3.6.2 曲率及其计算公式	70
3.6.3 曲率圆与曲率半径	72
习题 3.6	74
第 4 章 不定积分	75
4.1 不定积分的概念及其性质	75
4.1.1 原函数与不定积分	75
4.1.2 不定积分的几何意义	76
4.1.3 不定积分的性质	77
4.1.4 基本积分表	77
习题 4.1	79
4.2 换元积分法	80
4.2.1 第一类换元法(凑微分法)	80
4.2.2 第二类换元法	83
习题 4.2	86
4.3 分部积分法	87
习题 4.3	89
* 4.4 特殊类型函数的积分	89
4.4.1 有理函数的积分	89
4.4.2 三角函数有理式的积分	91
4.4.3 简单无理函数的积分	92
习题 4.4	93
* 4.5 积分表的使用方法	93

4.5.1 含有 $ax+b$ 的积分	93
4.5.2 含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分	94
4.5.3 含 $x^2 \pm a^2$ 的积分	94
4.5.4 含有 $ax^2+b(a>0)$ 的积分	94
4.5.5 含有 $\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$ 的积分	95
4.5.6 含有 $\sqrt{x^2-a^2}(a>0)$ 的积分	95
4.5.7 含有 $\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$ 的积分	96
4.5.8 含有三角函数的积分	96
习题 4.5	99
第 5 章 定积分	100
5.1 定积分的概念与性质	100
5.1.1 引 例	100
5.1.2 定积分的概念	101
5.1.3 定积分的几何意义	102
5.1.4 定积分的性质	103
习题 5.1	104
5.2 微积分的基本定理——牛-莱公式	104
5.2.1 变上限定积分	104
5.2.2 微积分基本定理	106
习题 5.2	107
5.3 定积分的计算	107
5.3.1 定积分的换元积分法	107
5.3.2 定积分的分部积分法	109
习题 5.3	110
5.4 广义积分	111
5.4.1 无限区间上的广义积分	111
5.4.2 无界函数的广义积分	112
5.4.3 广义积分的计算	113
习题 5.4	114
5.5 定积分的应用	115
5.5.1 平面图形的面积	115
5.5.2 体 积	117
5.5.3 平面曲线的弧长	119

习题 5.5	120
第 6 章 常微分方程及其应用	122
6.1 微分方程的一般概念	122
6.1.1 引 例	122
6.1.2 微分方程的基本概念	123
习题 6.1	125
6.2 一阶微分方程的解法	125
6.2.1 可分离变量的一阶微分方程	125
6.2.2 一阶线性微分方程	126
习题 6.2	128
6.3 特殊二阶微分方程的解法	129
习题 6.3	134
6.4 微分方程的简单应用	134
6.4.1 几何上的应用	135
6.4.2 物理上的应用	135
6.4.3 经济上的应用	136
* 6.4.4 数学建模中的应用	136
习题 6.4	141
第 7 章 多元函数微分学	142
7.1 空间直角坐标系简介	142
7.1.1 空间直角坐标系	142
7.1.2 曲面及其方程	143
习题 7.1	145
7.2 二元函数的概念、极限与连续	146
7.2.1 二元函数的概念	146
7.2.2 二元函数的极限与连续	147
习题 7.2	148
7.3 偏导数与全微分	149
7.3.1 偏导数	149
7.3.2 全微分	152
习题 7.3	154
7.4 复合函数与隐函数的微分法	154
7.4.1 复合函数的微分法	154
7.4.2 隐函数的微分法	156

习题 7.4	157
7.5 二元函数的极值和应用	158
7.5.1 二元函数的极值	158
7.5.2 二元函数微分学的几何应用	161
习题 7.5	163
第 8 章 多元函数积分学	165
8.1 二重积分的概念与性质	165
8.1.1 二重积分的概念	165
8.1.2 二重积分的性质	167
习题 8.1	167
8.2 二重积分的计算	168
8.2.1 利用直角坐标计算二重积分	168
8.2.2 利用极坐标计算二重积分	171
习题 8.2	173
8.3 二重积分的应用	174
8.3.1 求柱体的体积	174
8.3.2 求曲面的面积	175
8.3.3 经济应用	176
习题 8.3	177
* 8.4 三重积分简介	177
8.4.1 三重积分的概念	177
8.4.2 三重积分的计算与应用	178
习题 8.4	181
* 8.5 曲线积分与曲面积分	181
8.5.1 第一类曲线积分(对弧线)	181
8.5.2 第二类曲线积分(对坐标)	183
8.5.3 两类曲线积分之间的联系	185
8.5.4 第一类曲面积分(对面积)	187
8.5.5 第二类曲面积分(对坐标)	189
8.5.6 两类曲面积分之间的联系	193
8.5.7 散度与旋度	196
习题 8.5	198
第 9 章 无穷级数	200
9.1 常数项级数的概念和性质	200

9.1.1 无穷级数的概念	200
9.1.2 无穷级数的性质	202
习题 9.1	203
9.2 无穷级数审敛法	204
9.2.1 比较法	204
9.2.2 比值法	206
9.2.3 根值法	206
9.2.4 交错级数及其审敛法	207
9.2.5 绝对收敛与条件收敛	208
习题 9.2	209
9.3 幂级数及其展开形式	209
9.3.1 幂级数的基本原理	209
9.3.2 函数展开成幂级数的方法	213
习题 9.3	215
9.4 傅里叶级数简介	216
9.4.1 三角级数的有关概念	216
9.4.2 傅里叶级数及其展开式	217
9.4.3 奇函数、偶函数的傅里叶级数	220
9.4.4 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	221
习题 9.4	222
* 第 10 章 高等数学在经济中的应用	223
10.1 常用经济函数	223
10.1.1 需求函数和供给函数	223
10.1.2 总成本函数、收入函数和利润函数	224
10.1.3 经济函数的应用	225
习题 10.1	226
10.2 边际分析和弹性分析	227
10.2.1 边际分析	227
10.2.2 弹性分析	227
10.2.3 导数在边际分析和弹性分析中的应用	228
* 10.2.4 盈亏平衡分析	230
习题 10.2	232
10.3 微积分学的经济应用举例	232
10.3.1 极限的应用举例	232

10.3.2 最值的应用举例.....	233
10.3.3 积分的应用举例.....	234
10.3.4 微分方程的应用举例.....	235
10.3.5 经济模型的应用举例.....	237
习题 10.3	241
附录 A 常用数学公式	243
附录 B 积分表	246
习题参考答案.....	256
参考文献.....	267

第 1 章 函数、极限、连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学则以变量为研究对象。函数是微积分学研究的对象,所谓函数关系就是变量之间的依赖关系;极限则是研究变量的一种基本方法;连续是函数的一个重要性态。本章将介绍函数、极限和连续的概念以及它们的基本性质。

1.1 函数的概念及其性质

重温中学所学习过的函数的概念及其性质,对于做好初等数学和高等数学的衔接是至关重要的。

1.1.1 函数概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中,经常遇到各种不同的量。这些量可以分为两类:一类是在考察的过程中不发生变化,只取一个固定的值,称之为**常量**;另一类在所考察的过程中是变化的,可以取不同的数值,称之为**变量**。

在理解常量与变量时,应注意下面几点:

① 常量和变量依赖于所研究的过程。同一个量,在某一过程中可以认为是常量,而在另一过程中则可能是变量;反过来也是同样的。这说明常量和变量具有相对性。

② 从几何意义上讲,常量对应着数轴上的定点,变量则对应数轴上的动点。

对于一个变量,它如果取介于两个实数之间的任意实数值,则称之为连续变量,连续变量的变动范围常用区间表示。

2. 区间和邻域

(1) 有限区间

设 $a < b$, 称数集 $\{x | a < x < b\}$ 为开区间, 记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

类似地有:

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间;

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 称为半开区间。

其中, a 和 b 称为区间 (a, b) 、 $[a, b]$ 、 $[a, b)$ 、 $(a, b]$ 的端点, $b - a$ 称为区间长度。

(2) 无限区间

有以下几种情况:

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\} \quad [a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\} \quad (-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | |x| < +\infty\}$$

(3) 邻域

以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0)$ 。设 δ 是一正数, 则称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$\begin{aligned} U(x_0, \delta) &= \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \\ &= \{x \mid |x - x_0| < \delta\} \end{aligned}$$

其中, 点 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径, 见图 1-1(a)。

去掉邻域的中心 x_0 , 即满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$, 则称为点 x_0 的去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 记作: $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$, 见图 1-1(b)。

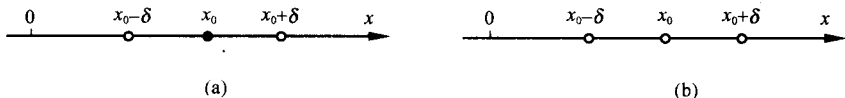


图 1-1

3. 函数的概念及表示法

在某个变化过程中, 往往出现多个变量, 这些变量不是彼此孤立的, 而是相互影响和相互制约的, 一个量(或一些量)的变化会引起另一个量的变化。如果这些影响是确定的, 是依照某一规则变化的, 那么我们说这些变量之间存在着函数关系。

定义 设 x 和 y 两个变量, 若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时, 变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$ 。这里, x 称为自变量; y 称为因变量或函数; f 是函数符号, 它表示 y 与 x 的对应规则。有时函数符号也可用其他字母表示。

x 的取值集合 D 称为函数的定义域, 相应的 y 值的集合 R 则称为函数的值域。

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时, 因变量 y 按照所给函数关系 $y = f(x)$ 求出的对应值 y_0 , 叫做当 $x = x_0$ 时的函数值, 记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$ 。

函数的定义域通常按以下两种情形来确定。

一种是对有实际背景的函数, 根据实际背景中变量的实际意义确定。例如, 在自由落体运动中, 设物体下落的时间为 t , 下落的距离为 s , 开始下落的时刻 $t = 0$, 落地的时刻 $t = T$, 则 s 与 t 之间的函数关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad t \in [0, T]$$

这个函数的定义域就是区间 $[0, T]$ 。

另一种是对抽象地用算式表达的函数, 通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合, 这种定义域称为函数的自然定义域。例如, 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$, 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$ 。

【例 1.1】 求函数 $y = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - 4}$ 的定义域。

【解】 要使函数有意义, 必须 $x \neq 0$, 且 $x^2 - 4 \geq 0$, 解不等式得 $|x| \geq 2$, 所以函数的定义域为 $D = \{x \mid |x| \geq 2\}$, 或 $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ 。

应当指出, 在实际应用问题中, 除了要根据解析式本身来确定自变量的取值范围外, 还要考虑到变量的实际意义。一般而言, 对于实际应用中的量往往取正值, 即变量都是大于 0 的。

4. 分段函数

把定义域分成若干部分, 函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数。分段函数是微积分中常见的一种函数。例如, 在中学数学所学过的绝对值函数可以表示成

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = [0, +\infty)$ 。

注意: 分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数, 而不是几个函数。对于自变量 x 在定义域内的某个值, 分段函数 y 只能确定唯一的值。分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集。

【例 1.2】 函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

称为符号函数, 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 如图 1-2 所示。

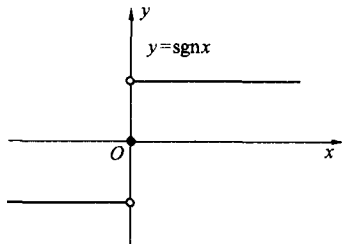


图 1-2

【例 1.3】 设函数 y 是不超过 x 的最大整数 (x 的整数部分记作 $[x]$), 函数 $y = [x]$ 称为整数函数, 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = \mathbf{Z}$ (整数集合), 如图 1-3 所示。例如: $[\frac{5}{7}] = 0, [\sqrt{2}] = 1, [\pi] = 3, [-1] = -1, [-3.5] = -4$ 。

【例 1.4】 函数 $y = \begin{cases} 2\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x & x > 1 \end{cases}$

这是一个分段函数, 其定义域为

$$D = [0, 1] \cup (1, +\infty) = [0, +\infty)$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y = 2\sqrt{x}$; 当 $x > 1$ 时, $y = 1 + x$, 如图 1-4 所示。

例如: $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$; $f(3) = 1 + 3 = 4$ 。

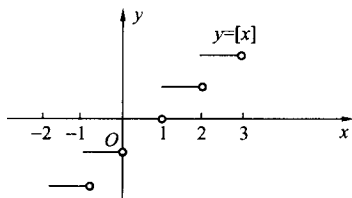


图 1-3

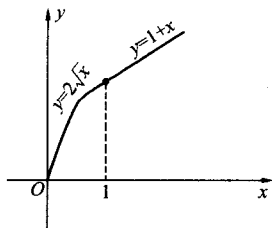


图 1-4

1.1.2 函数特性

1. 函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在一个正数 M , 对于所有的 $x \in D$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的。如果不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的。

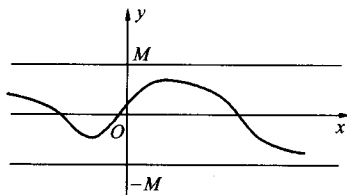


图 1-5

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界的几何意义是: 曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间, 如图 1-5 所示。

对于有界性, 要注意以下两点:

① 当一个函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界时, 正数 M 的取法不是唯一的;

② 有界性是依赖于自变量变化区间的。

2. 函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数。

由定义可知, 对任意的 $x \in D$, 必有一 $x \in D$; 否则, $f(-x)$ 没有意义。因此, 函数具有奇偶性时, 其定义域定是关于原点对称的。

偶函数的图像是关于 y 轴对称的, 奇函数的图像是关于原点对称的。

3. 函数的单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调递增的; 如果对于 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调递减的。

单调递增函数与单调递减函数统称为单调函数。

单调递增函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的, 单调递减函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的, 如图 1-6(a) 和图 1-6(b) 所示。