

韩敏 编著

Prediction Theory and Method of Chaotic Time Series

混沌时间序列预测 理论与方法



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

本书由大连市人民政府资助出版

The published book is sponsored by the Dalian Municipal Government

混沌时间序列预测理论与方法

Prediction Theory and Method of Chaotic Time Series

韩敏 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

图书在版编目 (CIP) 数据

混沌时间序列预测理论与方法/韩敏编著. —北京：中国水利水电出版社，2007

ISBN 978 - 7 - 5084 - 4534 - 2

I . 混… II . 韩… III . 混沌学—时间序列分析—研究
IV . 0415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 045461 号

| | |
|------|--|
| 书名 | 混沌时间序列预测理论与方法 |
| 作者 | 韩敏 编著 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044) 网址： www.waterpub.com.cn E-mail： sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 63202266 (总机)、68331835 (营销中心) |
| 经售 | 北京科水图书销售中心 (零售) 电话：(010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排版 | 中国水利水电出版社微机排版中心 |
| 印 刷 | 北京市兴怀印刷厂 |
| 规 格 | 880mm×1230mm 32 开本 8.625 印张 232 千字 |
| 版 次 | 2007 年 5 月第 1 版 2007 年 5 月第 1 次印刷 |
| 印 数 | 0001--2000 册 |
| 定 价 | 25.00 元 |

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前言

20世纪60年代，美国气象学家洛伦兹教授在做气象系统模拟计算时，发现了非线性过程“对初始值的极端不稳定性”，后来称为“蝴蝶效应”，使人们认识到混沌现象的奥妙，促使人们日益认识到混沌的普遍性，开始了对混沌理论及其应用的研究。混沌学是研究自然界复杂系统发展规律的工具。普遍认为，混沌系统自身对初始条件的敏感性导致了对混沌系统的行为进行长期预测的困难，但是这并不影响对混沌系统发展规律的研究。近年来在混沌系统相空间重构理论基础上，神经网络、支持向量机等非线性建模工具的应用为发现和研究混沌系统的内部规律创造了条件。

本书从混沌学的基本概念出发介绍混沌信号噪声滤除方法，重点论述了具有混沌特性时间序列的预测方法。针对一些实际问题，给出了多个实际混沌系统预测研究的算例，希望能对感兴趣的读者有所帮助。本书可以作为相关专业本科生、研究生以及研究人员的参考书，在内容上力求做到理论完整、推算翔实，在写作上力求做到深入浅出、通俗易懂，使其具有良好的可读性，以方便读者对书中内容的理解和应用。

本书共分6章。第1章介绍混沌的基本概念，内容涵盖了混沌的起源、定义、特点、研究意义、常见的混沌现象，以及混沌时间序列预测方法在不同领域的应用；第2章在阐述混沌运动特征的基础上，具体介绍了混沌识别的方法和工具，如Lyapunov指数、Kolmogorov熵与拓扑熵、关联维数、功率谱、Poincare截面以及分形与分维等理论，对相空间重构的方法做了详细说明；第3章分别论述了不同的混沌信号噪声平滑方法，其中主要包括基于模型逼近技术的噪声平滑方法、基于小波理论的混沌时间序列噪声平滑方法，以及基于奇异谱和主分量分析的噪声平滑方法，重点阐述了基于局部投影的噪声平滑方法；第4章具体讨论了混沌时间序列预测的四种方法：全局预测法、局域预测法、自适应预测方法和重构系统方程非线性自适应预测方法；第5章全面论述了基于神经网络的混沌时间序列预测方法，分别叙述了前馈神经网络、核方法和支持向量机、自组织特征映射、多重分支时间延迟递归神经网络等非线性工具在混沌时间序列预测中的应用；第6章以前面几章介绍的理论方法为基础，主要讲述了太阳黑子、黄河年径流混沌时间序列的特性，采用不同方法对两种混沌时间序列进行预测，并对仿真结果作了详细的分析。

本书是作者长期研究积累的成果，也参考引用了其他著名学者的著作和研究成果。感谢作者指导的博士研究生席剑辉（现任沈阳航空工业学院副教授）为本书成稿所做的大量工作。参与本课题研究以及书稿编写、校对工作的还有博士研究生韩冰、史志伟、郭伟，硕士研究生魏茹、范明明、殷佳、项牧等，对他们默默无语的

支持和积极认真的工作表示感谢。特别感谢中国水利水电出版社的责任编辑王艺对本书出版所做的认真细致的工作。借此机会，谨向长期以来国内外所有给予作者关心、支持和鼓励的人士以及家人致以最真诚的谢意，出版本书也是为了铭记他们对作者的恩惠。

本书的研究和出版得到国家自然科学基金项目(60374064, 60674073)资助，同时得到大连市学术专著出版基金资助，在此谨表谢意。

由于作者水平和时间有限，书中难免存在错误和不足之处，热诚期待着读者的批评指正。

韩 敏

2007年5月8日

目 录

前言

| | |
|-------------------------------|----|
| 第1章 绪论 | 1 |
| 1.1 混沌理论的起源和发展 | 2 |
| 1.2 混沌的定义和基本概念 | 10 |
| 1.2.1 Li-Yorke (李天岩-约克) 的混沌定义 | 10 |
| 1.2.2 Devaney 的混沌定义 | 11 |
| 1.3 混沌运动的特点以及分类 | 12 |
| 1.3.1 混沌运动的特点 | 12 |
| 1.3.2 混沌的分类 | 14 |
| 1.4 混沌的研究意义 | 15 |
| 1.4.1 混沌学研究对现代化科学发展产生的巨大影响 | 15 |
| 1.4.2 混沌学研究革新了经典的科学观与方法论 | 20 |
| 1.5 常见的混沌现象 | 23 |
| 1.5.1 物理学中混沌现象 | 23 |
| 1.5.2 震荡化学反应 | 24 |
| 1.5.3 生物系统的自组织现象 | 24 |
| 1.5.4 非平衡的宇宙 | 25 |
| 1.5.5 大气运动和气候的复杂性 | 27 |
| 1.6 混沌时间序列预测应用例子 | 28 |
| 1.6.1 混沌时间序列方法在径流预报中的应用 | 28 |
| 1.6.2 混沌时间序列方法在经济预测中的应用 | 30 |
| 1.6.3 混沌时间序列方法在通信信号调制识别中的应用 | 32 |
| 1.6.4 电力负荷时间序列混沌特性的短期负荷预测 | 33 |
| 1.7 小结 | 34 |
| 参考文献 | 35 |

| | |
|-------------------------------|-----|
| 第 2 章 奇异吸引子特征及分析方法 | 42 |
| 2.1 引言 | 42 |
| 2.1.1 耗散系统 | 44 |
| 2.1.2 吸引子 | 45 |
| 2.1.3 相空间和状态空间 | 45 |
| 2.1.4 初值敏感性 | 46 |
| 2.2 混沌识别 | 50 |
| 2.2.1 Lyapunov 指数 | 50 |
| 2.2.2 Kolmogorov 熵与拓扑熵 | 57 |
| 2.2.3 关联维数 | 61 |
| 2.2.4 功率谱 | 64 |
| 2.2.5 Poincare 截面 | 67 |
| 2.2.6 分形与分维 | 68 |
| 2.3 混沌序列相空间重构理论 | 79 |
| 2.3.1 嵌入维数的确定 | 80 |
| 2.3.2 嵌入延迟的确定 | 84 |
| 2.3.3 嵌入窗宽的确定 | 89 |
| 2.4 小结 | 92 |
| 参考文献 | 92 |
| 第 3 章 混沌信号噪声平滑方法 | 97 |
| 3.1 引言 | 97 |
| 3.2 预备知识 | 103 |
| 3.2.1 测量噪声和动力学噪声 | 103 |
| 3.2.2 噪声水平和信噪比 | 103 |
| 3.2.3 去噪效果的评判标准 | 104 |
| 3.3 基于模型逼近技术的去噪方法 | 108 |
| 3.3.1 简单局部平均去噪方法 | 109 |
| 3.3.2 改进的非线性局部平均去噪方法 | 110 |
| 3.3.3 全局逼近去噪方法 | 115 |
| 3.4 小波理论及其在混沌时间序列中的噪声 平滑研究 | 117 |

| | | |
|-------|--------------------------------------|------------|
| 3.4.1 | 小波变换与相空间重构 | 117 |
| 3.4.2 | 常规小波变换噪声平滑方法 | 120 |
| 3.4.3 | 改进的小波变换噪声平滑方法 | 123 |
| 3.5 | 基于奇异谱和主分量分析的去噪方法 | 129 |
| 3.6 | 基于局部投影噪声平滑的方法 | 132 |
| 3.6.1 | 噪声水平估计方法 | 133 |
| 3.6.2 | 子空间维数的动态选取 | 136 |
| 3.6.3 | 局部投影噪声平滑方法的实现步骤及 仿真结果 | 137 |
| 3.6.4 | 一种基于局部投影噪声平滑的优化方法 | 143 |
| 3.7 | 小结 | 149 |
| | 参考文献 | 150 |
| | 第4章 混沌时间序列预测 | 155 |
| 4.1 | 引言 | 155 |
| 4.2 | 全局预测法 | 160 |
| 4.3 | 局域预测法 | 162 |
| 4.3.1 | 零阶局域预测 | 162 |
| 4.3.2 | 加权零阶局域预测 | 163 |
| 4.3.3 | 一阶局域预测 | 164 |
| 4.3.4 | 局域非线性预测法 | 166 |
| 4.3.5 | 基于最大 Lyapunov 指数的预测方法 | 167 |
| 4.4 | 自适应预测模型 | 168 |
| 4.4.1 | Volterra 级数自适应预测模型 | 169 |
| 4.4.2 | 基于 Sigmoid 函数的 Volterra 自适应滤波器 | 172 |
| 4.5 | 重构系统方程非线性自适应预测方法 | 174 |
| 4.5.1 | 基于序列混沌特性参数的初始状态选择方法 | 175 |
| 4.5.2 | 典型混沌系统 | 180 |
| 4.5.3 | 重构系统方程混沌自适应预测方法 | 181 |
| 4.5.4 | 重构系统方程混沌自适应预测方法的特点 | 184 |
| 4.6 | 小结 | 185 |
| | 参考文献 | 185 |

| | |
|---------------------------------|-----|
| 第 5 章 基于神经网络的混沌时间序列预测方法 | 191 |
| 5.1 引言 | 191 |
| 5.2 基于前馈神经网络的混沌时间序列预测方法 | 194 |
| 5.2.1 多层感知机方法 | 194 |
| 5.2.2 径向基函数网络方法 | 195 |
| 5.2.3 前馈网络应用于混沌时间序列预测 | 196 |
| 5.3 基于自组织特征映射的混沌时间序列预测方法 | 199 |
| 5.3.1 自组织特征映射的模型结构 | 199 |
| 5.3.2 自组织特征映射的学习算法 | 200 |
| 5.3.3 自组织特征映射应用于混沌时间序列预测 | 201 |
| 5.4 基于核方法和支持向量机的混沌时间 序列预测方法 | 203 |
| 5.4.1 核方法和统计学习理论 | 204 |
| 5.4.2 支持向量机（回归）方法 | 207 |
| 5.4.3 最小二乘支持向量机方法 | 208 |
| 5.4.4 核方法和支持向量机应用于混沌时间序列预测 | 209 |
| 5.5 基于有限脉冲响应神经网络的混沌时间 序列预测方法 | 210 |
| 5.5.1 有限脉冲响应神经网络的结构 | 210 |
| 5.5.2 有限脉冲响应神经网络的学习算法 | 211 |
| 5.5.3 有限脉冲响应神经网络应用于混沌时间 序列预测 | 214 |
| 5.6 基于多重分支时间延迟递归神经网络预测方法 | 215 |
| 5.6.1 混沌相空间重构理论与时间延迟神经网络 | 215 |
| 5.6.2 多重分支时间延迟神经网络 | 218 |
| 5.6.3 多重分支时间延迟神经网络的逼近能力 | 225 |
| 5.6.4 多重分支时间延迟神经网络预测方法的特点 | 227 |
| 5.7 基于储备池的混沌时间序列预测方法 | 228 |
| 5.7.1 基于储备池的非线性系统辨识原理 | 228 |
| 5.7.2 基于储备池的混沌时间序列的迭代预测方法 | 230 |
| 5.7.3 基于储备池的混沌时间序列的直接预测方法 | 230 |
| 5.7.4 基于储备池的混沌时间序列预测方法的特点 | 233 |

| | |
|---|------------|
| 5.8 小结 | 234 |
| 参考文献 | 234 |
| 第6章 混沌序列预测仿真实例 | 238 |
| 6.1 预测性能指标 | 238 |
| 6.2 应用回声状态网络（ESN）学习蔡氏电路 实测数据 | 241 |
| 6.3 月太阳黑子混沌时间序列预测仿真 | 244 |
| 6.3.1 重构系统方程非线性自适应预测月太阳黑子 | 245 |
| 6.3.2 应用递归预测器网络（RPNN）对月太阳 黑子混沌预测仿真 | 250 |
| 6.4 黄河年径流复杂混沌系统的仿真研究 | 253 |
| 6.4.1 黄河年径流时间序列混沌特性分析 | 255 |
| 6.4.2 黄河年径流序列模型重构和预测研究 | 256 |
| 6.5 小结 | 259 |
| 参考文献 | 259 |

第1章 絮 论

20世纪下半叶，非线性科学获得了前所未有的蓬勃发展。非线性科学是一门研究非线性现象共性的基础科学，被誉为20世纪自然科学中的“三大革命之一”，与量子力学和相对论具有相同的地位^[1~6]。科学界认为：非线性科学的研究不仅具有重大的科学意义，而且具有广泛的应用前景。事实上，这门科学几乎涉及自然科学和社会科学的各个领域，并且不断地改变着人们对现实世界的许多传统看法。非线性科学的研究涉及对确定与随机、有序与无序、偶然与必然、量变与质变、整体与局部等数学范畴和哲学概念的再认识。非线性涉及现代科学的逻辑体系及其变革这样一些根本性的问题，它将深刻影响人类的思维方法。一般来说，非线性科学的主题包括：混沌（chaos）、分岔（bifurcation）、分形（fractal）、孤粒子（soliton）和复杂性（complexity）等的研究。其中，混沌的研究占有极大的分量。

混沌科学是随着现代科学技术的迅猛发展，尤其是在计算机技术的出现和普遍应用的基础上发展起来的新兴交叉学科。混沌是非线性动态系统所特有的一种运动形式，它是既普遍存在又极具复杂性的现象^[7~11]。近半个世纪以来，人们对混沌运动的规律及其在自然科学和社会科学中的表现有了比以前更广泛和深刻的认识。人们认为，开始于20世纪70年代初的混沌学研究正以其广度和深度的磅礴气势揭开了物理学、数学乃至整个现代科学发展的新篇章。混沌学的创立将在确定论和概率论这两大科学体系之间架起桥梁，它将改变人们的自然观，揭示一个形态和结构崭新的物质运动世界。如何应用混沌理论的研究成果为人类服务已经成为21世纪的非线性科学发展的新课题，也是目前数学家和工程技术人员所面临的一个重要挑战。一方面，混沌的应用将



会直接促进人们对混沌本质的更深刻认识；另一方面，混沌应用中提出的许多新问题也将进一步促进混沌研究本身更深入的发展。这为混沌理论及其应用的研究提供了巨大的推动力。

本章首先回顾混沌理论的发展历史及研究现状，之后详述混沌的定义和基本概念，并介绍混沌运动的特点，概述混沌研究的意义，然后列出一些常见的混沌现象，最后介绍混沌预测在实际中的应用。

1.1 混沌理论的起源和发展

自从 17 世纪牛顿建立经典力学以来，人们一直认为力学系统服从确定的规律。即当初始条件确定后，力学系统就将按确定的轨道运动，从而人们可以对系统的运动作出预言。即使遇到为难的三体问题或多体问题，人们仍然可以在经典力学的基础上创立摄动理论，解决计算中的一些困难，并据此预言了海王星和冥王星的存在。因此，人们认为即使是相互作用的多体，它们也在作规则的周期运动。

传统科学所定义的世界几乎具有柏拉图（Platon）式的纯净性。描述行星的运行、棒球的轨迹、或者遗传密码结构的方程和理论，都包含着规则和秩序，包含着一种钟表式的确定性。人们始终相信自然界是规则、和谐、有序的，自然现象的变化是周期的、重复的。这甚至成为一切科学的基础。科学家们总在寻找规则性。

英国哲学家怀特海（Whitehead）特别提到“周期性”这个概念，他说：“在我们的日常经验中，事物的一般重复现象是很明显的。日子、月相、一年的四季、心跳、呼吸等重复出现，绕行的星球也重复回到自己的老位置上去。我们在各方面都有重复的现象发生。没有重复现象就不可能有知识，因为在这种情形下就没有任何东西能根据以往的经验推断出来。同时，没有某些规律性的重复现象，也不可能有度量。当我们获得这一‘精确’观念后，重复现象在我们的经验中便成为基本的东西。”



然而，1963年美国气象学家洛伦兹（Lorenz）发现了大气变化的非周期性。他说：“描述元胞多流的简单系统可用数值方法求解。发现所用的解都是不稳定的，几乎所有的解都是非周期解。”洛伦兹发现，天气预报难就难在天气变化不是周期性的。非周期是混沌运动的根本特征，郝柏林用它来给混沌下定义，他说：“混沌绝不是简单的无序，而更像是不具备周期性和其他明显对称特征的有序态。”

混沌运动的非周期性这一发现触及了认识论的根本问题。这个问题不解决，混沌就可能成为不可知论抓住的最新例证。混沌是否可认识？一些科学家给出了否定的回答。1984年，微铎（Vidal）提出由于初始条件的敏感依赖性，“科学再次看到了自己的局限性”，因为敏感依赖性“使我们不能预见动力系统的未来，不管我们怎样努力”。

一些中外学者认为，混沌是不可认识的，是人类认识的又一条界线。但我们要强调，像周期性现象一样，非周期性现象、混沌现象也是可以认识的。证明混沌是可以认识的最有力的证据就是混沌研究的历史和混沌理论本身。

混沌理论把混沌描述为无序的，非周期的现象。自从科学家不懈地探索自然规律以来，无序、非周期性现象就一直被忽略。自然界中不规则的方面、不连续和不稳定方面，一直是科学的难题，是无法理解的怪物。科学家常常把它们当作噪声或科学垃圾扔掉了。而混沌不同于噪声，有其自身的规律。这正是科学家所要研究的，这种研究开始于19世纪末^[12]。

19世纪自然科学得到了空前的发展，为突破牛顿理论和迎接20世纪的物理学革命奠定了坚实的理论基础。

英国数学家哈密顿（Hamilton）的“哈密顿原理”，建立了与系统的总能量有关的哈密顿函数。根据哈密顿函数的数学形式，可以把动力学系统划分为可积的与不可积的两类。可积系统的典型行为是周期运动和准周期运动，牛顿理论实质上只是关于可积系统的理论。比可积系统更普遍的不可积系统，是牛顿理论



一直未曾问津的陌生领域。到了庞加莱（Poincaré）时代，人们已经明白动力学系统一般是不可积的，混沌是不可积系统的典型行为。

最早对混沌研究作出贡献的是俄国女数学家卡瓦列夫斯卡娅（Kovalevskaya）。1889年，她在给动力学系统稳定性下定义时，提出了度量小偏差增长率平均值概念，这是朝混沌的独立理论迈出的第一步。俄国数学家李亚普诺夫（Lyapunov）是运动稳定性理论及其研究方法的奠基人。他不仅第一个给出了运动稳定性的科学定义，而且推广了卡瓦列夫斯卡娅的概念，使之成为现代描述混沌运动的重要特征量，被称为 Lyapunov 指数。这个指数是确定运动稳定性问题的关键。直到今天，它仍然是判断运动稳定性的基本方法。

这一时期，对混沌研究作出最大贡献的是法国科学家庞加莱，他是真正研究混沌现象的第一个人。他的著作《论微分方程所定义的积分曲线》、《天体力学的新方法》和《论三体问题和动力学方程》等，成为现代混沌研究中许多重要思想和方法的直接渊源。庞加莱为研究行星轨道和卫星轨道的稳定性问题创立了微分方程的定性理论。作为组合拓扑学的奠基人，庞加莱创立了用剖分研究流形的方法。他引进了许多拓扑不变量：基本群、同调、贝蒂数、挠系数，并提出了一些重要概念：同宿、异宿、分岔、极限环和庞加莱截面。如今，拓扑学已成为混沌研究者手中必不可少的利器。

庞加莱在研究天体力学中的三体问题时发现了混沌。庞加莱用拓扑学方法来研究三体问题，他力图解决描述三体问题的微分方程的周期解的存在性问题。正是在这个研究中，他发现了不可积系统的复杂性，发现了在双曲点附近存在着无限复杂的栅栏结构。从这里，庞加莱意识到：仅仅三体的引力的相互作用就能产生惊人的复杂行为，确定性动力学方程的某些解具有不可预见性。这就是我们现在所说的混沌现象。

庞加莱是一位具有哲学头脑的科学家，他对哲学一直怀有浓



厚的兴趣。研究物理学的实践，使他更关心必然性与偶然性的联系。他反对拉普拉斯的决定论，强调偶然性在自然界和社会历史发展中的作用。他不同意偶然性是对我们无知的量度的说法，而认为“对于偶然发生的现象本身，通过概率运算给予我们的信息显然将是真实的，即使到这些现象被更充分地了解的那一天也不失其真”。对决定论的批判和对偶然性的客观性的承认，清除了混沌研究的思想障碍。更重要的是，庞加莱发现了某些系统对初始条件的敏感依赖性和行为的不可预见性。他显然比同时代的人更具远见卓识。

庞加莱向牛顿理论提出了挑战，他的研究本应该给物理学注入一股新的活力。然而却什么也没有发生，历史沿着另一个方向发展了。当时的物理学家普遍认为，物理大厦已经建成，并相当完善，除了两朵乌云以外，这里是晴空万里。在这两朵乌云之中并不包括庞加莱提出的难题，谁也没有觉察到，正是在这里，有一大片未开垦的处女地。

在庞加莱的混沌探索之后不久，德国物理学家普朗克(Planck)提出了量子理论。1905年，著名科学家爱因斯坦(Einstein)发表了论文《论动体的电动力学》，完整地提出了狭义相对论。相对论和量子力学的迅猛发展，吸引了绝大多数物理学家的注意力。庞加莱提出的问题更加受到冷落，极少有人去做进一步的研究。这没有什么值得大惊小怪的，甚至连庞加莱自己都放弃了这些想法，他说：“这些东西太稀奇古怪了，我没耐心仔细考虑他们。”在他生命的晚期，他也加入物理学家的行列，研究起了量子理论，而把混沌搁置一边。英国数学家斯图尔特(Stewart)说：“（庞加莱）注视过混沌的深渊，他辨别出潜藏在里面的几种形式；但深渊依旧昏暗，因而他把数学中某些最美丽的东西错认为怪物。”

尽管这样，庞加莱不愧为混沌探索的先驱，人们仍称他为混沌数学之父，庞加莱不仅创建了研究混沌的数学理论和方法，他还揭开了牛顿力学的新篇章，发现了天体力学全新的研究方向。



现代动力学系统理论的几个重要组成部分，如稳定性理论、分岔理论、奇点理论以及吸引子理论等，都源于庞加莱的研究。庞加莱的这些贡献对 20 世纪的数学发展和混沌理论的建立有着广泛而深刻的影响。斯图尔特说：“庞加莱接触到了深处，但是他缺乏照明手段。要等到下一个时代，这个由庞加莱本人的微分方程稳定性理论武装起来的，再加上计算机及其他技术辅助的时代，才能使混沌的深处照到一些亮光，揭示其中蕴藏的美。但要是庞加莱未曾开辟通向深渊边缘的道路的话，他们是无法做到这一点的。”

在直接继承庞加莱工作的极少数科学家中，首先必须提到的是美国数学家伯克霍夫（Birkhoff），他最重要的工作是关于动力学系统的理论。1912 年，庞加莱去世前把限制性三体问题归结为一个几何问题，但除特殊情况外，未能加以证明。伯克霍夫证明了这个定理（1913 年），他还引进了动力学系统的运动极小集、回归集等概念，证明其存在性，开辟了动力学系统研究的时代。尤其令混沌研究者感兴趣的是伯克霍夫在用几何方法研究天体力学中的稳定性问题时，发现了今天称作奇异吸引子的东西。他把它叫做奇怪曲线，它第一次出现在伯克霍夫 1916 年的著作中。令人遗憾的是，伯克霍夫的工作长期鲜为人知，他所受到的冷遇较庞加莱更厉害。

数学领域中另一项有意义的探索是，发现了一批分形几何对象，如魏尔斯特拉斯的处处连续又处处不可微的曲线、皮亚诺的可以填满整个平面的曲线、康托尔尘埃等。这些使数学家感到惊慌、烦恼的几何对象，被当作“病态”现象，排除在数学研究之外。20 世纪 20 年代，法国数学家尤利亚（Julia）研究复平面上的函数迭代，这是一种特殊类型的混沌运动，可以从中导出一大批美丽的分形图像。直到这时，原来被看做没有数学意义的对象，现在成为数学家研究的问题，这是数学研究的又一转折。尤利亚和法图的工作对数学家芒德勃罗（Mandelbrot）创立分形几何是很有启发和帮助的。