教育部高职高专规划教材
JIAOYUBU GAOZHI GAOZHUAN GUIHUA JIAOCAI

高等数学与经济数学

阎章杭　韩成标　许鹊君　主编

GAODENG SHUXUE YU JINGJI SHUXUE

第二版

化学工业出版社

教育部高职高专规划教材

高等数学与经济数学

第二版

阎章杭　韩成标　许鹊君　主编

化学工业出版社
·北京·

本书紧密结合当前高职高专教育改革的实际，在内容上既保证基础又具有特色，力争使教材具有科学性、基础性和实用性．主要内容包括：函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数积分学、定积分的应用、概率论与数理统计基础、矩阵与线性方程组和线性规划初步等内容．

本书属立体化教材，即同时出版有配套的《高等数学与经济数学训练教程》，编制有配套电子教案，并免费赠送教师使用，建有专门网站：数学规划教材网（www.shuxue999.net），提供如教材分析、教学建议、教学辅导等相应网上服务．

本书可作为高职、高专院校、成人高校和本科院校开办的二级院校经济、管理类各专业的数学教材，也可供在职人员自学使用．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学与经济数学/阎章杭，韩成标，许鹊君主编．2版．—北京：化学工业出版社，2007.1
教育部高职高专规划教材
ISBN 978-7-5025-9656-9

Ⅰ．高… Ⅱ．①阎…②韩…③毛… Ⅲ．①高等数学-高等学校：技术学院-教材②经济数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ．①O13②F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 003106 号

责任编辑：高 钰
责任校对：洪雅姝　　　　装帧设计：3A 设计艺术工作室

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 17½　字数 432 千字　　2007 年 4 月北京第 2 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：26.00 元

出 版 说 明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分. 改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材. 但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要. 为此，1999 年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”.

“教育部高职高专规划教材”计划出版 500 种，用 5 年左右时间完成. 这 500 种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例. 专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量. 专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养. 在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持. 我们计划先用 2～3 年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分吸取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用 2～3 年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系.

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用. 希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高.

教育部高等教育司

前　言

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临发展的大好机遇．同时，国家的经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了更高的要求．而大学数学是高职高专院校各专业必修的一门重要的基础课，它对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用．为了进一步推动全国大学数学课程的改革及相应的教材建设，使其更加适应当前形式发展的需要，开封大学、河南大学、石家庄铁路职业技术学院、包头职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、天津渤海职业技术学院、石家庄职业技术学院、吉林交通职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、三门峡职业技术学院、无锡职业技术学院、漳州职业技术学院、雅安职业技术学院、邵阳职业技术学院、盐城纺织职业技术学院、山西工程职业技术学院等院校的优秀教师和专家，先后经过长达八年的通力合作，于近几年联合编写并成功出版了《高等数学与工程数学》、《高等数学与经济数学》、《应用数学基础》（五年制）、《高等数学》（少学时）、《高等应用数学》（少学时）等多套教育部高职高专规划教材．为了使教材更上一个层次，教材编委会还于近两年投入相当大的人力、财力、物力将该系列教材完善成立体化教材．由于教材很有自身特色，多年来，所编教材深受全国几十所使用该教材院校的欢迎，其中《高等数学与工程数学》（修订）已被列为“十一五”国家级规划教材．

《高等数学与经济数学》（第二版）教材是在第一版的基础上，对原教材进行认真整理和修订的，从而确保了新教材的质量和自身特色．

《高等数学与经济数学》（第二版）教材的主要内容有：微积分学及应用，概率论与数理统计基础，线性代数初步及应用以及数学实验等．另外还同时出版有配套的辅助教材《高等数学与经济数学训练教程》．

《高等数学与经济数学》（第二版）教材所用的学时数约为 90～150 学时左右，“*”部分为选学内容．教材比较贴近各学校经济、管理及相关专业的教学实际，可作为高职高专院校经济、管理及相关各专业学生用书．

该套书的编者全部是由 10 多所高职高专院校的优秀教师所组成，他们都是来自教学第一线、具有丰富教学经验、非常熟悉当前教学实际的教师．

编者在编写该套教材的过程中，充分吸收了当前我国现有的高职高专数学教材的长处，密切结合当前高职高专教学改革的实际，努力编出具有自身特色的高水平的高职高专教材，其特色具体反映为：

1. 努力贯彻“拓宽基础、强化能力、立足应用”的原则，结合高职高专教学特点，淡化数学理论，对一些较烦琐的定理、公式及明显的结论，或者只给出结果，或者以几何直观予以说明．

2. 本书融高等数学与经济数学为一体，内容精炼，实用性强．

3. 所选的例题和习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的，删掉单纯性的技巧和难度较大的习题，增加富有启发性、应用性、为专业服务的题目．

4. 针对学生容易出现的问题，本书还特意用冠以符号“?”、“!”提出思考问题或指出问题的原因，帮助学生正确理解有关知识，提高学习效果. 另外考虑到在学时上，各个学校有差异，不同的专业有差异，故增大了选修的内容，以满足不同学校、不同专业的需求.

5. 为使该教材更具有使用性和前瞻性，并考虑到计算机已经越来越普及，以及 Mathematica 软件的广泛使用，本书以数学实验的形式，将 Mathematica 软件的应用及应用的内容穿插到有关的章节中去，以供有条件的学校选学.

6. 出版有配套的电子教案，并免费赠送教师使用.

7. 建有专门的网站：数学规划教材网（www. shuxue999. net)，提供如教材分析、教学建议、典型教案、教学辅导等相应的网上服务.

8. 同时出版有配套的辅助教材《高等数学与经济数学训练教程》，其内容主要包括：每一章内容小结；常见问题分类及解题方法；复习题及全解；主教材习题答案及典型习题解答；自我测验（备选习题）及往届试卷选.

本书由阎章杭策划并负责组织实施. 本书的主编为：阎章杭、韩成标、许鹊君；副主编为：邱学凤、杨瑞蕊、张振山；主审为：白水周.

参加每一篇编审人员有（按章节顺序排列)：

第一篇　马幼梅　李嫒媛　拜云胜　毛珍玲　郭建萍　敦冬梅　张明虎　韩成标　任树华　张振山

第二篇　白景华　阎章杭　许鹊君　邱学凤

第三篇　辛自力　杨瑞蕊　阎育华　尤小慧

在本书的编写过程中，曾得到有关院校的领导、系部领导和有关专家的大力支持和帮助，杜跃鹏老师积极参与了利用 Mathematica 软件进行数学实验以及在电子教案中积极参与数学动画库的制作. 余平洋、张嫒媛、路世英、陶娜娜、赵科等教师积极参与了该套书的电子教案及相应的网站建设等项工作. 河南大学的教授、专家阎育华、王国胜曾对本书的应用数学部分进行了认真的审核，并提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的谢意！

由于我们水平有限，不足之处恳请广大读者批评指正.

数学立体化系列教材编审委员会

2007 年 1 月

目　　录

第一篇　微积分及应用

第二篇　概率论与数理统计基础

第三篇　线性代数初步及应用

附　　录

第一篇 微积分及应用

主要内容

- 函数极限和连续
- 一元函数积分学
- 导数与微分
- 定积分应用
- 导数的应用

引子

人类文明史上灿烂的一页

在17世纪，一代科学巨人牛顿、莱布尼兹创立了微积分. 微积分的创立是人类历史上伟大的数学发现；它为近代科学的发展开辟了崭新的道路，在人类的文明史上写下了极其灿烂的一页. 微积分的伟大意义可以从以下四个方面看.

1. 对数学自身影响

自从有了微积分就开始了变量数学的时代，因而数学开始描述变化，描述运动. 微积分改变了整个数学世界. 数学家们在微积分提供的思维和工具的基础上阔步前进，迅速创立了许多数学分支，诸如：微分方程、无穷级数、变分法等，可以说，有了微积分之后的两三百年期间，数学获得了极大的发展，获得了空前的繁荣.

2. 对其他自然科学和工程技术的影响

有了微积分，整个力学、物理学都得到了全面的改造，微积分成为了物理学的基本语言，而且许多物理学的问题要依靠微积分寻求答案，离开了微积分不可能有现代物理，无论是力学、电学还是光学、热学.

微积分的创立得到了天文学的启示，以后天文学也离不开微积分了.

19世纪初，可能还认为化学只需要简单的代数知识，而生物学基本上与数学没有联系，现在化学、生物学、地理学等都必须深入地同微积分打交道了.

3. 对物质文明的影响

工程技术是最直接影响人类物质生活的，然而工程技术的基础是数学科学，也可以说，现代工程技术少不了微积分的支撑. 从机械到材料力学，从大坝到电站的建设，都要利用微积分的思想和方法.

如果说在落后的生产方式之下，只需要少量的几何、三角知识就可以工作的话，那么如今，任何一个未学过微积分的人都不可能从事科学技术工作.

在今天人类广泛的经济活动、金融活动中，微积分也成了必不可少的工具. 微积分诞生之初的主要背景是物理学和几何学，而今，它几乎为一切领域所运用. 它对人类物质生活的影响是越来越大.

4. 对人类文化的影响

只要研究变化规律就要用上微积分，在人文、社会科学领域亦如此，因而微积分也渗透于人文、社会科学，并用它来描述和研究规律性的东西.

第一章　函数、极限与连续

微积分是数学中的重要分支，是高等数学的核心．而函数和极限分别是微积分的研究对象和工具，因此本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限和函数的连续性等问题．

第一节　函数与经济类函数

在日常生活、生产活动和经济活动中，变化的量随处可见，这些变化的量往往不是孤立地存在的，而是普遍存在着相互制约的关系，这种关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念——函数．函数是数学中最重要的概念之一，是研究各种变化的量的一个非常重要的工具，也为进一步学习数学奠定了基础．

一、函数的概念

1. 常量与变量

在某一变化过程中始终保持不变、取一个固定数值的量称为常量．

例如，圆周率 π、物体的重力加速度是不变的量，某种商品的价格、某图书馆的藏书是在某一段时间内保持不变的量．

把在某一变化过程中可以取不同数值的量称为**变量**．

例如，人的身高，自然界中的温度，经济问题中的产量、成本都是在不断变化的，它们都是变量．

应该指出，常量和变量的概念是相对的，同一个量，在某一过程中是常量而在另一过程中则可能是变量；反之亦然．例如，某商品的价格在一段时间内是常量，但在较长时间内则是变量．对于一个变量，它可能取得的数值构成的集合称为这个变量的变动区域，简称为变域．

常量习惯用字母 a，b，c，d 等表示；变量习惯用字母 x，y，z，s，t 等表示；变域常用大写字母表示，如 X 表示变量 x 的变域；当某些变量有其特定的经济含义时，也用大写字母表示，如常用 C 表示成本、R 表示收入、L 表示利润等．

2. 函数的定义

定义　设 D 是一非空实数集．如果对属于 D 的每一数 x，按照某种对应规则 f，x 都有确定的值和它对应，则 y 称为定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$．x 称为**自变量**，数集 D 称为函数的**定义域**，y 称为**因变量**或**函数**，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**，f 是函数的对应规则．

在函数的定义中，如果对于每一个 $x\in D$，都有惟一的 $y\in M$ 与之对应，则这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**．本书只讨论单值函数．

3. 函数与函数值的记号

由函数的定义可知，y 是 x 的函数可记为 $y=f(x)$，但在同一个问题中，如需要讨论几个不同的函数，为区别清楚起见，就要用不同的函数记号来表示，例如，以 x 为自变量的函数还可表示为 $F(x),\Phi(x),y(x),s(x)$ 等.

函数 $y=f(x)$ 当 $x=x_0\in D$ 时，对应的函数值可记为 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 1 若 $f(x)=\dfrac{x+3}{|x-1|}+1$，求 $f(2)$，$f(a+b)$.

解 $f(2)=\dfrac{2+3}{|2-1|}+1=6$，$f(a+b)=\dfrac{a+b+3}{|a+b-1|}+1$

例 2 已知某种产品的成本 C（单位：元）与产量 q（单位：个）之间的函数关系为$C=1000+\dfrac{q^2}{2}$，求当生产 50 个该产品时的成本为多少元？

解 由题意，产量 q 为 50 个时的成本为

$$C(50)=1000+\frac{50^2}{2}=2250\ (\text{元})$$

4. 函数的两决定性要素

由函数的定义可知，函数的定义域和对应规则是函数的两决定性要素. 如果两个函数的定义域和对应规则完全相同，则称这两个函数是**同一函数**. 例如当 u，t 的变化范围相同时，

$$y=2u+5,\quad y=2t+5$$

就是相同的函数. 由此可见，函数与表示其变量的字母无关.

5. 函数的表示法

(1) **解析法**（又称**公式法**） 用数学式子来表示两个变量之间的对应关系. 如本节例 1 和例 2 都是用解析法表示的函数.

对于表示函数的解析法，需要作以下几点说明.

① 有些问题中，两个变量之间的关系无法只用一个数学式子表达，需要用两个或两个以上的式子才能表达完整，这样的函数称为**分段函数**.（? 分段函数表示的是一个函数，还是几个函数?）

例如，某商场销售某种商品 5000 件，每件原价 50 元，当销售量在 3000 件以内时，按原价出售，超过 3000 件后的商品，打八折出售. 这样，销售收入 R 与销售量 Q 之间的关系函数为

$$R=\begin{cases}50Q, & 0\leqslant Q\leqslant 3000\\ 50\times 3000+50\times 0.8\times(Q-3000), & 3000<Q\leqslant 5000\end{cases}$$

这是一个分段函数. 其定义域是各段自变量取值集合的并集. 分段函数是微积分中常见的一种函数.

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算.

例如，在上面的分段函数中，$R(1000)=50\times1000=50000$(元)，$R(4000)=50\times3000+50\times0.8\times(4000-3000)=190000$(元).

用解析法表示两个经济量之间的函数关系，便于利用相应的数学方法进行研究，可以比

较全面地反映出两个经济量之间的内在联系．这种函数解析式，在经济学中也称为**经济方程**．

② 如果函数 y 可以用含自变量 x 的关系式 $y=f(x)$ 来表示，如 $y=x+3$，$y=e^x+1$ 等，这种形式的函数称为显函数．

如果函数 y 是一个含 x 和 y 的方程 $F(x,y)=0$ 所确定的，如 $x-y+3=0$，$x^2+y^2=R^2$（R 为常数）等，这种形式的函数称为隐函数．

③ 对用解析法表示的函数 $y=f(x)$，如果没有加以特殊的限制，则该函数的定义域就是使表达式有意义的所有 x 构成的集合，这种定义域又称为函数的自然定义域．例如：

在分式中，分母不能为零；

在根式中，负数不能开偶次方根；

在对数中，真数要大于零；

在反三角函数式中，要符合反三角函数的定义域．

如果函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则函数的定义域应取各部分定义域的交集．

在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域．

(2) **表格法**（又称**列表法**） 用一个表格来表达一个函数关系式的方法，如表 1-1．

表 1-1 某种名牌汽车去年全年的月销售情况

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y/辆	100	89	92	70	87	98	103	100	65	76	85	110

这是用表格表示的函数．当自变量 x 取 1 到 12 之间任意一个整数时，从表 1-1 中可以查到 y 的一个对应值．

(3) **图式法**（又称**图像法**） 在坐标平面上用一条曲线来表示函数关系的方法．如图1-1所示的是某种产品所获得的利润与月产量 Q 之间的关系．

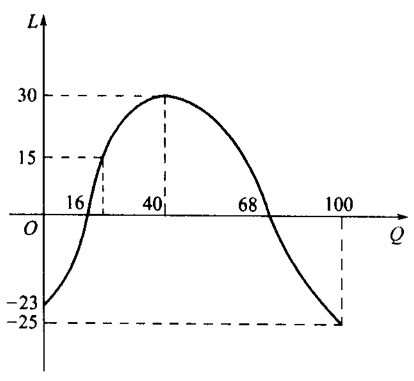


图 1-1 利润与月产量关系

由图 1-1 分析可知，当月产量 Q 为 40 时所获利润最大．当月产量 Q 小于 16 或大于 68 时，所获得的是负利润，也就是蚀本．

例 3 求下列函数的定义域．

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3+x}}{9-x^2}$；(2) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$；

(3) $y=\arccos\dfrac{x-1}{2}$．

解 (1) 因 $\begin{cases}3+x\geqslant 0\\ 9-x^2\neq 0\end{cases}$，所以 $-3<x<3$ 或 $3<x<+\infty$，即函数的定义域为 $(-3,3)\cup(3,+\infty)$；

(2) 因为 $\dfrac{x}{x-1}>0$，则 $x>1$ 或 $x<0$，即函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$；

(3) 因 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，则 $-1\leqslant x\leqslant 3$，即函数的定义域为 $[-1,3]$．

例 4　设分段函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<2\\ -x+4, & 2\leqslant x<4\\ x-4, & 4\leqslant x\leqslant 6\end{cases}$

确定其定义域，求 $f(1)$，$f(3)$，$f(6)$ 并作出其图像.

解　函数的定义域为 $[0,2)\cup[2,4)\cup[4,6]=[0,6]$

因 $1\in[0,2)$，则 $f(1)=1$

因 $3\in[2,4)$，则 $f(3)=-3+4=1$

因 $6\in[4,6]$，则 $f(6)=6-4=2$

其图像见图 1-2.

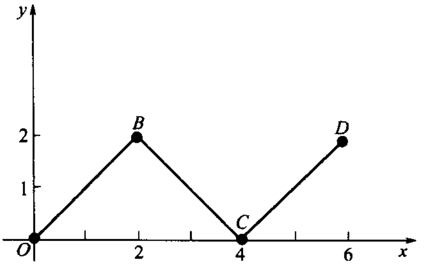


图 1-2　分段函数的图像

二、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义　设函数 $y=f(x)$，其定义域 D 是关于原点对称的，如果对 D 内的任意 x，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的**奇函数**. 如果对 D 内的任意 x，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的**偶函数**. 如果函数 $f(x)$ 对于 D 内的任意 x 既非奇函数，也非偶函数，则称 $f(x)$ 是 D 上的**非奇非偶函数**.（注 定义域是对称的区间.）

奇函数和偶函数都具有对称性，从图像可知，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称. 在研究这类函数时，只要知其一半，便可知其全部（见图 1-3 和图 1-4）.

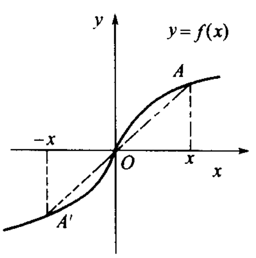


图 1-3　奇函数

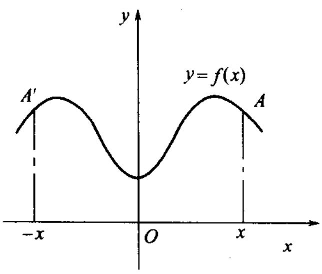


图 1-4　偶函数

例 5　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2+1$；　(2) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　(3) $f(x)=3x^3-x+1$.

解　(1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称.

对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$，因此 $f(x)=x^2+1$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数；

(2) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称.

对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)$，因此 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数；

(3) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称.

对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(-x)=3(-x)^3-(-x)+1=-3x^3+x+1$

$f(-x) \neq -f(x)$且$f(-x) \neq f(x)$，因此$f(x)=3x^3-x+1$为$(-\infty,+\infty)$上的非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

定义 设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果对于(a,b)内的任意两点x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内是**单调增加的**，(a,b)称为函数$f(x)$的**单调增加区间**；当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内是**单调减少的**，(a,b)称为函数$f(x)$的**单调减少区间**.（注 单调性是讨论函数的局部特性.）

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.

单调增加区间和单调减少区间统称为**单调区间**.

上述定义也适用于其他有限区间或无限区间的情形.

单调增加的函数的图像是沿x轴正向逐渐上升的，如图1-5所示；单调减少的函数的图像是沿x轴正向逐渐下降的，如图1-6所示.

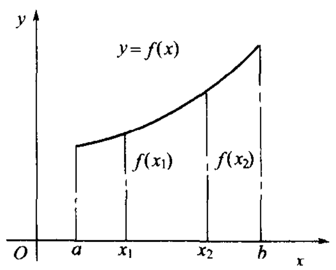


图1-5 单调递增函数

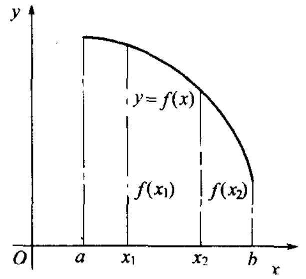


图1-6 单调递减函数

例6 证明$f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(-1,0)$内单调减少.

证 在区间$(-1,0)$内任取两点x_1、x_2，设$x_1<x_2$，则$x_1-x_2<0$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$$

所以$f(x_1)>f(x_2)$.

根据函数单调减少的定义可知，$f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(-1,0)$内单调减少.

3. 函数的有界性

定义 设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在一个正数M使得对于区间(a,b)内的一切x值，对应的函数值$y=f(x)$都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内**有界**. 如果这样的数M不存在，则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内**无界**.

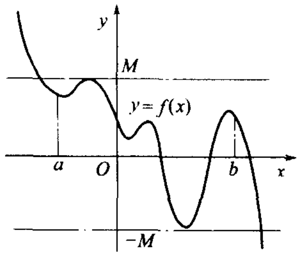


图1-7 有界函数

定义中的正数M称为函数$y=f(x)$的界. 从几何直观上看，有界函数的图像必介于平行于x轴的两条平行线$y=\pm M$之间，如图1-7所示.

上述定义也适用于其他有限区间与无限区间.

例如，函数$f(x)=\cos x$在定义域$(-\infty,+\infty)$内是有界的.

因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\cos x|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$.

又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 内是有界的. 因为对于任意 $x\in[1,2]$，都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$. 但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的. 因为对于任意 $x\in(0,1)$，不存在正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立.

在实际问题中，一些用解析法表示的函数，由于问题的要求，常常成为有界函数.

例如，某种商品的市场需求量 Q 与该商品的价格 P 满足关系式 $Q=30-2P$，由于 Q 表示需求量，$Q\geqslant 0$，于是当 $0<P\leqslant 15$ 时，则 $|Q|<30$，这说明它是一个有界函数.

4. 函数的周期性

定义 对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的正数 T，使得对于定义域内的一切 x，等式

$$f(x+T)=f(x)$$

都成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**. T 称为这个函数 $y=f(x)$ 的**一个周期数**.

一个以 T 为周期的周期函数，它的图像在定义域内每隔长度为 T 的相邻区间上，有相同的形状. 如图 1-8 所示.

由定义可知，若 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期，则 $\pm 2T$，$\pm 3T$ 及 T 的任意整数倍也是 $f(x)$ 的周期. 最小正数 T 称为周期函数的最小正周期. 因此，今后在讨论周期函数的周期时只讨论它的最小正周期.

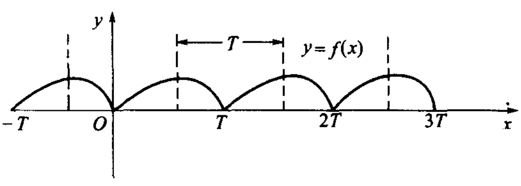


图 1-8 周期函数

例如，函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是以 $T=2\pi$ 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 和 $\cot x$ 是以 $T=\pi$ 为周期的周期函数.

三、反函数

设某种商品的单价为 P（常数），销售量为 Q，则收入 R 是销售量 Q 的函数 $R=P\cdot Q$. 这时 Q 是自变量，R 是 Q 的函数. 若已知收入 R，反过来求销售量 Q，则有 $Q=\dfrac{R}{P}$. 这时 R 是自变量，Q 变成 R 的函数. 一般地，有如下定义.

定义 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 值，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定惟一的 x 值（$x\in D$）与之对应，这样由 y 确定 x 的函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 它的定义域为 M，值域为 D. 并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

习惯上，用 x 表示函数的自变量，用 y 表示函数的因变量，所以在理论反函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中，将字母 x、y 互换，得到实际应用的反函数关系式 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

当然也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，也就是说，它们互为反函数.

例 7 求函数 $y=e^{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=e^{x+1}$ 得到 $x+1=\ln y$.

$$x=\ln y-1$$

交换 x 和 y，得 $y=\ln x-1$，即 $y=\ln x-1$ 是 $y=e^{x+1}$ 的反函数.

四、初等函数

1. 基本初等函数

以下六种函数称为基本初等函数.

(1) 常数函数：$y=c$（c 为常数）.

(2) 幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）.

(3) 指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

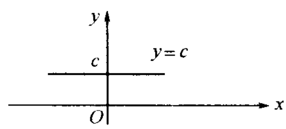
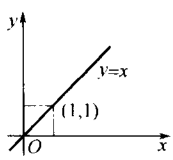
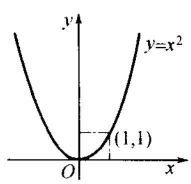
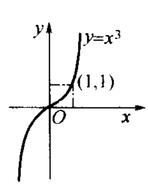
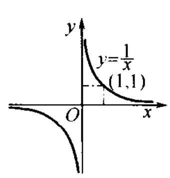
(4) 对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）. 特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，$y=\ln x$ 称为自然对数，当 $a=10$ 时，$y=\lg x$ 称为常用对数.

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6) 常用反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这些函数在中学都已学过，其主要性质和图像见表 1-2. 它们是微积分中所研究对象的基础.

表 1-2 基本初等函数

种类	函数	定义域与值域	图像	特性
常数函数	$y=c$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		偶函数 有界
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{2}$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调递减 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^{3}$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调减少