



小波分析的 理论 算法 进展和应用

程正兴 杨守志 冯晓霞 著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

小波分析的 理论 算法 进展和应用

程正兴 杨守志 冯晓霞 著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是关于小波分析的一本比较全面的著作。书中分为三个部分：小波基础、小波进展和小波应用。第一部分包括第1章~第5章,内容包括:小波分析初步,空间的基底与框架,Gabor变换、连续小波变换及小波奇异性分析,小波级数、多分辨分析、小波的分解算法与重构算法及小波包分解,尺度函数与小波的构造。第二部分包括第6章~第11章,内容包括:小波框架,多小波和多带小波、平衡多小波以及平衡化处理,提升格式和双正交小波,多元小波与脊波,抽样理论,向量值小波。第三部分包括第12章~第16章,内容包括:信号的时频分析与音乐和音频信号分析,图像压缩,小波去噪,边缘检测,小波在医疗中的应用。

本书内容丰富、重点突出,既有小波的基础理论,又有算法的详细推导,并且对小波最近进展的重要方面进行了总结,对许多应用也进行了比较详细的叙述。它可以作为理工科各专业研究生学习小波的教材,也可以作为希望研究或应用小波分析的科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

小波分析的理论、算法、进展和应用 / 程正兴, 杨守志, 冯晓霞著. —北京: 国防工业出版社, 2007. 7
ISBN 978 - 7 - 118 - 05101 - 8

I. 小... II. ①程...②杨...③冯... III. 小波分析 IV. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 043716 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787 × 1092 1/16 印张 25 3/4 字数 520 千字

2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 42.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)68428422

发行邮购: (010)68414474

发行传真: (010)68411535

发行业务: (010)68472764

前 言

小波分析的雏形是1980年 Grossmann 与 Morlet 的研究成果(后人称为“原子分解”)。它是20世纪80年代中期基于 Y. Meyer、S. Mallat 及 I. Daubechies 等人的奠基工作而迅速发展起来的一门新兴学科,是调和分析发展的划时代产物。

小波分析一产生,它在理论上的发展与完善就紧密地和实际应用联系在一起。虽然小波分析的发展已经经过了20年,但它的理论研究远没有完善,没有解决的问题还很多,有许多很基本的问题还没有解决。在小波的应用上,虽然并不缺少许许多多应用很好的典范,但应用的普及以及深入解决问题,是随着小波分析理论与算法的进一步发展而发展起来的,许多实际问题的解决本身就推动了小波分析理论的发展。

本书叙述小波分析的理论、算法、进展和应用。全书16章分为三个部分,第一部分讲述小波分析的理论;第二部分讲述小波分析的进展;第三部分讲述小波分析的应用。小波分析的算法融于全书的每一章中。

本书第一部分分为5章,即第1章~第5章。第1章是小波与小波分析初步,讲述小波概念、小波变换、小波级数及多分辨分析来源。第2章是空间的基底与框架,主要讲述为学习小波分析所必备的泛函分析等方面的知识,特别详细地讲述了空间的基底和框架。由于这些知识分散在实分析、线性代数、泛函分析著作以及新的研究中,作为学习与研究小波分析者来说,这些内容显得过于分散,不容易在短时间内了解与基本掌握,所以,本书中以一章的篇幅集中总结这些内容。当然,这些内容并不是学习本书一定要掌握的,也不是容易掌握的,这样比较详细总结的原因是,小波分析的学习者无论以后进行理论研究或实际应用,都要查找和阅读大量文献,这时就变得容易了。第3章讲述 Fourier 变换、Gabor 变换与连续小波变换及小波奇异性分析。第4章讲述小波级数、多分辨分析、小波的分解算法与重构算法以及能够细分高频部分的小波包分解。第5章讲述尺度函数与小波的构造,包括一些著名小波的例子,正交、半正交小波滤波器的构造。第3章~第5章是小波分析的基础。应当注意的是,除频域的 Fourier 变换方法外,从20世纪50年代以后发展起来的时-频分析方法有 Gabor 变换、Zak 变换(也称 Z-变换)以及小波变换。它们各有自己独特的性质和相关的应用领域,总体上来说,Fourier 变换适用于稳定信号,Gabor 变换与 Z-变换更多适用于比较稳定的非稳定信号,而小波变换更适合用于更加不稳定的非稳定信号(有时也称这样的信号为瞬变信号)。所以,在本书3.2节中,也对 Gabor 变换进行了比较详细的讨论,读者可以比较 Gabor 变换与小波变换各自的特点。

本书第二部分分为6章,即第6章~第11章。第6章是小波框架,讲述小波框架的概念,框架多分辨分析,框架的构造方法以及多小波框架。第7章是多小波和多带小波,讲述多小波与多带小波的多分辨分析、逼近、计算以及构造,平衡多小波以及平衡化处理。

这一章把多小波和多带小波综合在一起讲述的原因是,这样处理可以节省篇幅,在 $m=2$ 时就是经典的多小波,在 $r=1$ 时就是经典的多带小波。对于逼近和离散矩以及离散矩与连续矩的关系,在第一部分略去了讨论,因为在 $m=2, r=1$ 的情形就是单小波的相应结论。第 8 章是提升格式和双正交小波,讲述紧支撑双正交小波的构造,双正交小波的提升构造与算法,以及在信号与图像的小波分析处理中有很大大用处的由提升格式给出的整数到整数的小波变换。第 9 章是多元小波与脊波,讲述一元小波生成的二元小波变换,二元张量积小波分析,连续脊波变换与离散脊波变换,以及二元紧支撑不可分小波的构造。第 10 章是抽样理论,讲述小波空间的抽样定理与例子,小波不规则抽样定理,以及小波抽样定理的一些扩展。第 11 章是向量值小波与多通道通信,讲述向量值函数空间,向量值多分辨分析,正交向量值小波,正交向量值小波包,矩阵向量值小波,以及向量值空间中应用上很有用处的全方向平衡对称—反对称多小波的构造。

本书第三部分分为 5 章,即第 12 章~第 16 章。这是本书的另一个重要部分,讲述小波分析在信号处理与图像处理等方面的一些应用。第 12 章是小波分析在信号处理中的应用,讲述对几个基本问题的应用,信号的时—频分析和音乐与音频信号分析。第 13 章是图像压缩,讲述图像压缩问题,图像小波分解后的系数分析,小波向量量化压缩,小波系数零树编码压缩,以及实验结果。第 14 章是小波去噪,讲述小波阈值去噪,小波隐马尔可夫过程树去噪,以及三种基于隐马尔可夫树模型的特殊去噪。第 15 章是边缘检测,讲述边缘与边缘检测概念,边缘检测的 Canny 准则,小波多尺度边缘检测,以及多尺度边缘检测的重构。第 16 章是小波在医疗中的应用,讲述心电图信号分析,脑电图信号的小波谱分析,核磁共振频谱实验,以及在 CT 中的应用。需要说明的是,在各个不同具体的应用实验中,用于实验的原始图像,由于在每个实验中得到的途径不同,质量有时有比较大的差别,这时都把用于分析的原图像也展示出来。

本书可以作为高等院校开设小波分析课程的教材,这时,除全选第一部分外,在第二部分、第三部分也可选择一些用于教学。

由于作者水平所限,书中不妥与错误之处在所难免,希望广大读者和同行批评指正。

程正兴

于西安交通大学理学院

2007 年 1 月

目 录

第 1 章 小波与小波分析	1
1.1 从 Fourier 分析到小波分析	1
1.1.1 历史回顾	1
1.1.2 小波	2
1.2 小波变换	6
1.3 小波级数	8
1.4 多分辨分析	9
第 2 章 空间的基底与框架	12
2.1 Banach 空间与 Hilbert 空间	12
2.1.1 Banach 空间	12
2.1.2 Hilbert 空间	16
2.2 算子与谱	17
2.2.1 线性算子	17
2.2.2 算子的特征值与特征向量	20
2.3 空间的基底	22
2.3.1 Banach 空间的基底	22
2.3.2 Hilbert 空间的正交基	23
2.3.3 Hilbert 空间的双正交基	24
2.3.4 Hilbert 空间的 Riesz 基	26
2.3.5 广义函数	27
2.4 框架	28
2.4.1 紧框架和框架	29
2.4.2 框架算子	31
2.4.3 对偶框架的计算	34
第 3 章 Fourier 变换、Gabor 变换与连续小波变换	38
3.1 Fourier 变换	38
3.1.1 $L^1(\mathbb{R})$ 中的 Fourier 变换	38
3.1.2 $L^2(\mathbb{R})$ 中的 Fourier 变换	42

3.1.3	Poisson 求和公式	43
3.1.4	Shannon 定理	44
3.2	Gabor 变换	45
3.2.1	连续 Gabor 变换	45
3.2.2	例子	47
3.2.3	测不准原理	51
3.2.4	连续 Gabor 变换的性质与重构	53
3.2.5	离散 Gabor 变换	55
3.3	连续小波变换	57
3.3.1	小波变换的计算	57
3.3.2	连续小波变换的性质与重构	58
3.3.3	小波的例	62
3.4	小波奇异性分析	66
3.4.1	Hölder 正则性	66
3.4.2	小波变换对函数的正则性分析	68
第 4 章	多分辨分析	72
4.1	小波级数	72
4.1.1	离散小波变换	72
4.1.2	正交性条件及 Riesz 条件的等价表示	72
4.1.3	Riesz 小波	76
4.2	多分辨分析	77
4.2.1	问题的提出	77
4.2.2	多分辨分析	79
4.2.3	尺度函数的性质	81
4.2.4	小波空间	83
4.3	分解算法与重构算法	85
4.3.1	算法的推导	85
4.3.2	算法的计算	88
4.3.3	边界处理的几种方法	90
4.3.4	初始系数的选择	91
4.3.5	图形显示算法	97
4.4	小波包分解	99
4.4.1	正交小波包概念	99
4.4.2	$L^2(R)$ 的正交分解	103
第 5 章	小波构造	106
5.1	尺度函数与小波	106

5.1.1	V_1 的分解	106
5.1.2	关于 V_1 的对偶基	111
5.2	正交尺度函数与正交小波	113
5.2.1	几个正交小波的例子	113
5.2.2	尺度函数产生小波	116
5.2.3	基数样条空间和 B-样条	119
5.2.4	Franklin 小波与 Battle-Lemané 小波	122
5.2.5	正交小波基的正规性	125
5.3	紧支撑正交尺度函数的构造	127
5.3.1	尺度系数的参数化	127
5.3.2	紧支撑情形 Daubechies 小波	129
5.3.3	正交小波的例	131
5.4	半正交小波	134
5.4.1	基数样条空间的基底	134
5.4.2	两尺度关系	137
5.4.3	样条小波计算	140
第 6 章	小波框架	145
6.1	小波框架	145
6.1.1	$L^2(\mathbb{R})$ 空间的小波框架	145
6.1.2	二进小波框架	149
6.2	框架多分辨分析	150
6.2.1	框架多分辨分析的概念	150
6.2.2	生成框架多分辨分析函数的充分条件	151
6.3	框架的构造	155
6.3.1	小波框架存在的条件	155
6.3.2	小波框架的解	161
6.4	多小波框架	168
6.4.1	两个小波生成的多小波框架	168
6.4.2	多小波框架	169
第 7 章	多小波和多带小波	172
7.1	多小波多分辨分析	172
7.1.1	可加细函数向量	172
7.1.2	正交多分辨分析和多小波	176
7.1.3	双正交多分辨分析和多小波	179
7.2	多小波逼近	182

7.2.1	多小波的矩	182
7.2.2	逼近阶	183
7.3	多小波的计算	186
7.3.1	多小波分解与重构算法	186
7.3.2	预处理和后处理	188
7.3.3	平衡多小波	191
7.3.4	多小波分解信号与图像的例子	193
7.4	多小波的两尺度相似变换构造	195
7.4.1	正规与奇异两尺度相似变换	195
7.4.2	多小波两尺度相似变换	198
第8章	提升格式和双正交小波	206
8.1	紧支撑双正交小波	206
8.1.1	紧支撑正交小波基缺乏对称性	206
8.1.2	双正交小波和对偶	208
8.1.3	对偶尺度函数与对偶小波	211
8.1.4	双正交 Riesz 基	213
8.1.5	对称双正交小波	214
8.2	整数到整数的小波变换	220
8.2.1	S 变换	220
8.2.2	提升整数小波变换	221
8.3	双正交小波的提升	222
8.3.1	双正交小波提升概念	222
8.3.2	提升格式的分解与重构算法	226
第9章	多元小波与脊波	228
9.1	一元小波生成的二元小波变换	228
9.2	二元张量积小波分析	229
9.2.1	张量积空间	229
9.2.2	张量积多分辨分析	229
9.2.3	分解与重构	232
9.3	脊波变换	235
9.3.1	连续脊波变换	235
9.3.2	离散脊波变换	236
9.3.3	规范正交有限脊波变换	239
9.4	二元紧支撑不可分小波的构造	241
9.4.1	二元紧支撑正交小波的构造原理	241

9.4.2	Ayache 型不可分正交小波的构造	242
9.4.3	Belogay 型不可分正交小波的构造	246
第 10 章	抽样理论	249
10.1	小波空间中的抽样定理	249
10.1.1	Shannon 抽样定理与小波子空间	249
10.1.2	空间中的抽样序列	250
10.1.3	抽样定理的例子	252
10.2	小波不规则抽样定理	253
10.2.1	平移的规则抽样定理	253
10.2.2	小波子空间中的不规则抽样定理	255
10.3	小波空间抽样定理的其他扩展	256
10.3.1	尺度函数的过采样性质	256
10.3.2	一类正交基插值尺度函数	260
10.3.3	一类正交基插值尺度函数的例子	262
10.3.4	一类带限的具有快速衰减的正交基插值尺度函数的构造	263
第 11 章	向量值小波与多通道通信	267
11.1	向量值函数空间	267
11.2	向量值多分辨分析	269
11.2.1	多分辨分析	269
11.2.2	正交向量值尺度函数的特征	271
11.3	正交向量值小波	272
11.3.1	正交向量值小波的存在性	272
11.3.2	正交向量值小波的构造	276
11.4	正交向量值小波包	281
11.5	矩阵向量值小波	286
11.5.1	矩阵向量值小波变换	286
11.5.2	矩阵向量值小波的多小波构造	289
11.5.3	多小波平衡	290
11.5.4	全方向平衡	291
11.6	全方向平衡对称—反对称多小波	293
11.6.1	全方向平衡对称—反对称多小波的构造	293
11.6.2	构造过程	294
11.6.3	全方向对称—反对称 5-3 滤波器的构造	296
11.6.4	全方向对称—反对称 7-5 滤波器的构造	299
11.6.5	实验结果	301

第 12 章	小波分析在信号处理中的应用	304
12.1	几个基本问题的应用	304
12.1.1	按预先给出的要求划分频带	304
12.1.2	时频分析	305
12.1.3	信噪分离与提取弱信号	306
12.1.4	求分形指数	307
12.2	一个信号的时频分析	309
12.3	音乐和音频信号	310
第 13 章	图像压缩	314
13.1	图像压缩基础	314
13.1.1	问题提出	314
13.1.2	图像分解	314
13.1.3	小波系数分析	316
13.2	向量量化压缩	319
13.2.1	向量量化方法的基本思想	319
13.2.2	LBG 算法	320
13.2.3	改进的 LBG 算法	322
13.2.4	小波向量量化压缩	323
13.3	小波系数零树编码压缩	324
13.3.1	小波变换与嵌入式编码	324
13.3.2	小波系数零树编码	325
13.3.3	逐次逼近量化	326
13.3.4	简单例子与试验结果	328
第 14 章	小波去噪	332
14.1	小波阈值去噪	332
14.1.1	噪声及去噪	332
14.1.2	阈值图像去噪方法与去噪实验	332
14.2	小波域隐马尔可夫过程树去噪	337
14.2.1	隐马尔可夫过程去噪原理	337
14.2.2	小波域隐马尔可夫树去噪实验	341
14.3	基于隐马尔可夫树模型的特殊去噪	345
14.3.1	贝叶斯隐马尔可夫树估计	345
14.3.2	一般隐马尔可夫树估计	346
14.3.3	平移不变隐马尔可夫树估计	346

14.3.4	三种估计的去噪实验	347
第 15 章	边缘检测	350
15.1	边缘与边缘检测	350
15.1.1	数字图像及数字图像处理	350
15.1.2	边缘及边缘的类型	351
15.1.3	边缘检测重要性	351
15.1.4	边缘检测的方法	352
15.2	Canny 连续准则及其算法	356
15.2.1	边缘检测的 Canny 准则	356
15.2.2	Canny 准则下最优边缘检测滤波器的求解	358
15.2.3	边缘检测的离散三准则	360
15.3	小波多尺度边缘检测	362
15.3.1	问题的提出	362
15.3.2	信号多尺度边缘检测	362
15.3.3	边缘奇异性分析	366
15.4	多尺度边缘检测重构	369
15.4.1	一维信号多尺度边缘检测重构算法	370
15.4.2	多尺度边缘的图像重建	373
15.4.3	小波的构造	378
第 16 章	小波在医疗中的应用	380
16.1	心电图信号	380
16.2	小波分析应用于脑电图信号	382
16.2.1	脑电图信号时频分析导引	382
16.2.2	脑电图信号的小波谱分析	383
16.3	核磁共振频谱实验	385
16.4	在 CT 中的应用	386
参考文献	390

第 1 章 小波与小波分析

1.1 从 Fourier 分析到小波分析

小波分析是自 1986 年以来由于 Y. Meyer、S. Mallat 及 I. Daubechies 等人的奠基工作而迅速发展起来的一门新兴学科,它是 Fourier 分析划时代发展的结果。然而,它的发展历史可以追溯到 1909 年 Haar 的工作。从现代小波分析的观点来看,1930 年前后有许多与小波有关的新方向出现,但以后进展不大,直到 1960 年 Calderón 的研究及 20 年后(1980 年)Grossmann 与 Morlet 的研究,后人称为“原子分解”,才有了现代小波分析的雏形。进而,由于 1986 年以后的工作以及应用的广泛性使这个学科得到了飞速发展。

1.1.1 历史回顾

1909 年,Haar 找到了 $[0,1]$ 区间上平方可积函数的一个正交基 $\{h_n(t)\}$,他是从函数 $h(t)$ 出发,即

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2) \\ -1, & t \in [1/2, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

而 $h_n(t)$ 是函数 $h(t)$ 的伸缩与平移, $h_n(t) = h(2^j t - k)$, $n = 2^j + k, j \geq 0, 0 \leq k \leq 2^j$ 。这样,他打开了通向现代小波分析的道路。

由于 Haar 给出的函数 $h(t)$ 是不连续的,这就导致 Faber 与 Schauder 用 $h(t)$ 的原函数想法代替 $h(t)$ 。该途径的研究从 1910 年一直继续到 1920 年。他们由 $h(t)$ 得到的一个原函数——“三角形”函数 $\Delta(t)$ 的伸缩与平移得到了 $[0,1]$ 上连续函数空间的一个 Schauder 基。

20 世纪 30 年代前后,该方面出现了许多新的研究方向,它们及其后续的研究促使了现代小波分析的形成。

Lève 研究随机信号 Brownian 运动,他希望研究 Brownian 运动的最好的表示,即选择合适的基。此前,人们研究 Brownian 运动的频谱性质,所以用 Fourier 表示。Lève 希望研究 Brownian 运动的多分形结构,所以使用 Schauder 分析研究 Brownian 运动轨迹的 Hölder 正则性。他得到了用 Schauder 展开的系数估计 Brownian 运动 Hölder 正则性的定理。

1930 年,为了确定函数的能量, Littlewood 与 Paler 利用函数的 Fourier 级数展开的部分和定义为“二进块”,这样形成一种函数的新的表示,而这一表示就可以估计能量。Zyg-

mund 与他的合作者,探求把上述周期情形得到的结果拓展到 n 维欧氏空间,这才产生了现在看起来是真正的小波分析。这样,“母小波” $\psi(t)$ 就出现了,它是无限次可微,定义于 R^n 上的急速衰减的函数。用这个函数 $\psi(t)$ 的伸缩与给定函数的卷积就可以给出给定函数的能量。

1927 年, Franklin 建立了一个正交基 $\{f_n\}$, 这个正交基是由 Schauder 基用 Gram - Schmidt 正交化过程得到的。这个 Franklin 正交基同时具有 Haar 基与 Schauder 基两者的优点。今天,我们有了对函数 $f_n(t)$ 的渐近估计,这个估计表明,在某种意义上, Strömberg 在 1980 年发现的由 $\psi(t)$ 的伸缩与平移生成的正交小波基在 Franklin 族内有效地隐藏着。

Lusin 研究的是 Hardy 空间的函数用“原子”或“基元素”的分析与合成。G. Weiss 与 R. Coifman 首先断定, Lusin 的理论是借助于“原子”与“原子分解”。“原子分解”途径之一由 1960 年的由 Calderón 给出的 Calderón 恒等式给出,但之后无人注意它的实质内容。直到 Grossman 与 Morlet 在 20 年后的 1980 年从新发现了 Calderón 恒等式,这才进入了现代小波分析。

现代小波分析的发展大致分为三个阶段。

第一阶段为孤立研究与应用阶段。主要特征是得到了一些特殊的小波,并在一些专业领域得到零散应用。一个代表性的工作是法国地质学家 A. Grossmann 和 J. Morlet 于 1984 年第一次把“小波”用于处理地质数据,得到了以他们的名字命名的 Grossmann - Morlet 小波。另一个代表性的工作是 1981 年 J. Stromberg 与他的合作者发现的正交小波基。这个时期一个有趣的现象是各个领域的专家、学者和工程师在完全不了解别人的研究工作的状况下巧妙地、独立地构造自己的“小波”。

第二阶段为小波分析理论成型期。这个时期,法国数学家 Y. Meyer 成功地构造出了具有一定衰减性质的光滑函数 ψ , 这个函数的二进伸缩和整数平移产生的函数组 $\{2^{j/2}\psi(2^jx - k), j, k \in Z\}$ 构成空间 $L^2(R)$ 的规范正交基。这引起了大家广泛关注,因为在此之前,学术界普遍认为不可能具有如此好性质的函数, Meyer 也是认为这样好的函数不可能存在,在构造反例的过程中,把这个正交小波构造出来。随后, P. Lemarie 和 G. Battle 又分别独立地构造出同样“好”的小波。

随后, Y. Meyer 和计算机学者 S. Mallat 提出了多分辨分析的思想, S. Mallat 又给出了小波分解与重构信号的快速算法——塔式算法(又称 Mallat 算法),成功地给小波分析搭成一个理论架构。之后,比利时数学家 I. Daubechies 基于代数多项式构造出了具有紧支撑的正交小波基。此外,华人学者崔锦泰和我国学者王建忠基于基函数样条构造出了半正交小波。

第三阶段为小波理论和应用全面发展期。一般认为,它是从 20 世纪 90 年代开始的。它的主要特征是,在上述理论框架下,出现了许多很有价值的应用成果,也解决了长期没有解决的应用问题,相反地,在应用中也提出了许多需要解决的问题,从而推动了小波分析理论的发展。

1.1.2 小波

在小波分析的研究和应用中,我们经常提到“信号”一词。以后提到信号 $f(t)$ 都是指

它是能量有限的。所有能量有限的集合形成一个线性空间,记为 $L^2(R)$,即所有满足下式的所有函数 $f(t)$ 的集合

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty \quad (1.1.2)$$

在小波分析中,经常要用到 Fourier 变换。Fourier 变换及性质在第 3 章有比较详细的叙述。对于函数(信号) $f(t) \in L^2(R)$ 的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.1.3)$$

它是时域到频域的一个变换。Fourier 变换的逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.1.4)$$

讲到小波分析,提出来的第一个问题是“什么是小波”。“小波”,顾名思义,是指小的波。波与小波在图 1.1.1 中给出。

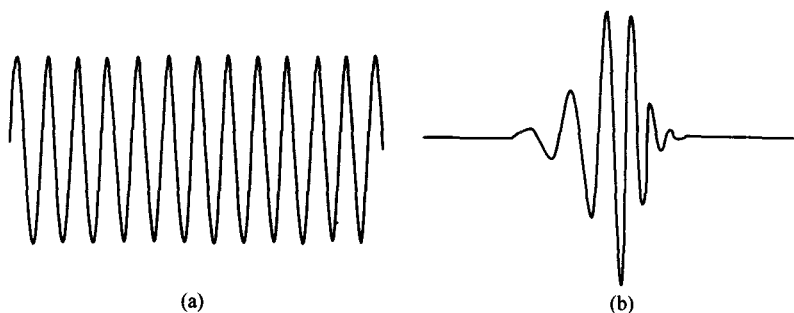


图 1.1.1 波与小波

定义 1.1.1(小波) 对于函数 $\psi(t) \in L^2(R)$,如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (1.1.5)$$

则称 $\psi(t)$ 是一个小波。

这个定义看起来太广泛了,因为满足这一个条件的函数太多了。例如,任何属于 $L^2(R)$ 的连续可微函数 $g(t)$ 的导数 $g'(t)$,都可以作为 $\psi(t)$,在 $\psi(t) = g'(t)$ 时,式(1.1.5)当然是成立的。

满足式(1.1.5)的函数或者说小波直观上都有一些什么样的特点呢?

由于 $\psi(t)$ 在整个实直线 R 上是可积的,所以 $\psi(t)$ 在无穷远点处一定等于 0,也就是说,当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时, $\psi(t)$ 衰减到 0。另外,由积分的几何意义和式(1.1.5)可以看出 $\psi(t)$ 的图像与 x 轴所夹的上半平面中的面积和下半平面中的面积是相等的。也就是说,当 $\psi(t)$ 中的 t 变动的时候,它是上下波动的,这就是“小波”这一个名词的来源,在英文中是 Wavelet。

一般来说,要研究信号 $f(t)$,由于任何实际的信号都是能量有限的,在数学上就说

$f(t) \in L^2(R)$, 这样, 自然也要求 $\psi(t) \in L^2(R)$ 。所以, 通常说到小波时, 一般都是指 $\psi(t) \in L^2(R)$ 并且式(1.1.5)成立。当然, 对于小波 $\psi(t)$ 来说, 式(1.1.5)成立的要求是最基本的。

下面, 给出一些小波的例子。

例 1.1.1(Haar 小波) Haar 小波函数 $f(t)$ 定义为

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

$f(t)$ 在图 1.1.2(a) 中画出, 明显地, 式(1.1.5)成立。作 $f(t)$ 的 Fourier 变换

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \int_0^{1/2} e^{-i\omega t} dt - \int_{1/2}^1 e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\exp(-i\omega/2)}{i\omega} (e^{i\omega/2} - 2 + e^{-i\omega/2}) \\ &= i \exp\left(-\frac{i\omega}{2}\right) \frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

$\hat{f}(\omega)$ 的图如图 1.1.2(b) 所示。

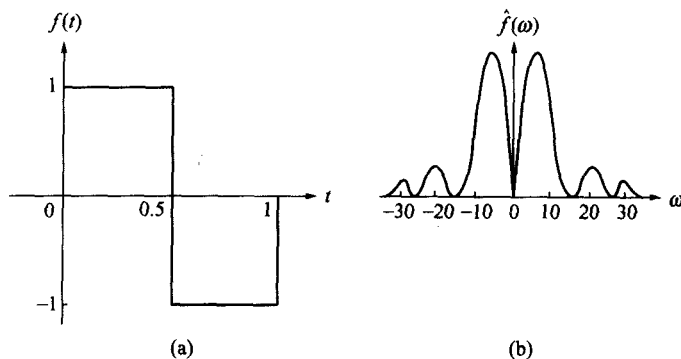


图 1.1.2 Haar 小波 $f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 的图

例 1.1.2(Shannon 小波) Shannon 函数 $f(t)$ 是由它的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 定义的函数, 即

$$\hat{f}(\omega) = \chi_{(\pi, 2\pi)}(|\omega|) = \begin{cases} 1, & \pi < |\omega| < 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

这时, 取 $\hat{f}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换, 得

$$f(t) = \frac{1}{\pi t}(\sin 2\pi t - \sin \pi t) = \frac{2}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right) \quad (1.1.9)$$

式(1.1.5)是满足的,图 1.1.3 是 $f(t)$ 与 $\hat{f}(\omega)$ 的图。

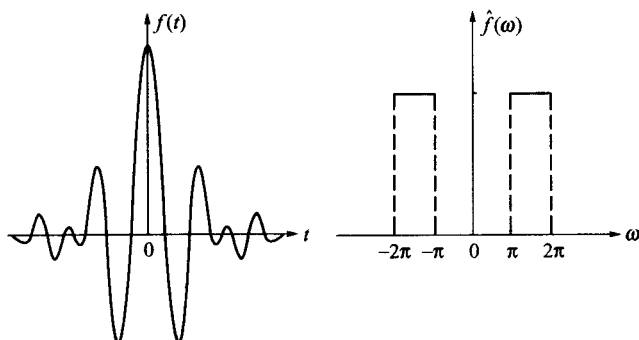


图 1.1.3 $f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 的图

例 1.1.3 (Gauss 小波) Gauss 小波是 Gauss 函数的一阶导数,即

$$\psi(t) = Cte^{-\pi t^2} \quad (1.1.10)$$

它的 Fourier 变换为

$$\hat{\psi}(\omega) = -iC\omega e^{-\pi\omega^2} \quad (1.1.11)$$

$\psi(t)$ 满足式(1.1.5),图 1.1.4 是 $\psi(t)$ 的图。

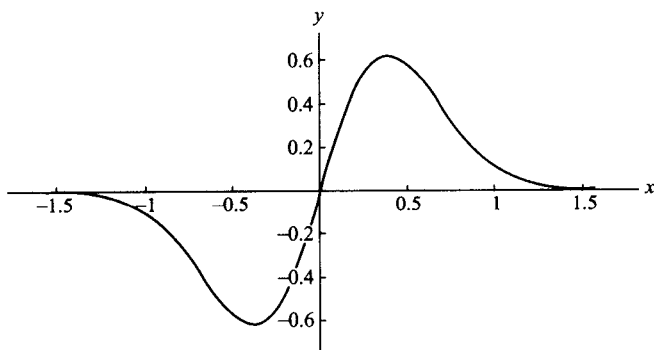


图 1.1.4 $\psi(t)$ 的图

设 $\psi(t)$ 是小波, $\hat{\psi}(\omega)$ 是它的 Fourier 变换,如果 $\hat{\psi}(\omega)$ 在 $\omega=0$ 连续,由 Fourier 变换的定义,得

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

所以,式(1.1.5)的一个等价描述为