通识教育平台数学课程系列教材

XIANXINGDAISHU

线性代数

彭亚新　易学军　主编

科学出版社
www.sciencep.com

·通识教育平台数学课程系列教材·

线性代数

彭亚新　易学军　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是为高等本科院校非数学专业学生编写的数学课程系列教材之一，内容包括行列式、矩阵理论、向量空间、线性方程组及二次型等. 各节后配有适量习题，书末附有习题参考答案.

本书结构严谨，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.

本书可供高等院校非数学专业学生使用，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/彭亚新，易学军主编.—北京：科学出版社，2007
（通识教育平台数学课程系列教材）
ISBN 978-7-03-019518-0

Ⅰ.线… Ⅱ.①彭…②易… Ⅲ.线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 118259 号

责任编辑：王雨舸／责任校对：梅　莹
责任印制：高　嵘／封面设计：宝　典

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2007 年 8 月第 一 版　开本：B5（720×1000）
2007 年 8 月第一次印刷　印张：10
印数：1—5 000　字数：187 000

定价：16.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前 言

教材是体现教学内容和教学方法的知识载体，是进行教育教学的基本工具，也是高等学校深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养新世纪创新人才的重要保证. 教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》(教高[2005]1号)指出："加强教材建设，确保高质量教材进课堂. 要大力锤炼精品教材，并把精品教材作为教材选用的主要目标. 对发展迅速和应用性强的课程，要不断更新教材内容，积极开发新教材，并使高质量的新版教材成为教材选用的主体."

数学作为科学和技术基础，在决定国家各级人才的素质方面正起着日益重要的作用. 高等学校作为培育人才的摇篮，数学课程的开设也就具有特别重要的意义. 高等数学是高等教育中涉及学生人数多、专业门类广、对学生影响深远的基础课程之一，其教材建设工作受到广大教育工作者的普遍关注和重视.

湖南大学历来十分重视高等数学课程建设，其高等数学课程已被评定为国家精品课程. 由湖南大学数学与计量经济学院组织编写的《大学数学》系列教材(供非数学专业理工科学生公共数学基础课程使用)被列为普通高等教育"十五"国家级规划教材，其修订版已被列为普通高等教育"十一五"国家级规划教材. 为了在教材建设中引进竞争机制，进一步打造精品教材，学院经广泛征求任课教师意见及教学指导委员会研究讨论，决定再组织编写一套高质量的高等数学课程教材，在不同年级学生的教学中交替使用两套教材，并不断修改、完善. 本套教材适合本科院校非数学专业学生作为数学公共课教材或参考书使用，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用.

《线性代数》是本套教材的第三册，由彭亚新、易学军主编，参加本册编写的人员还有刘开宇、孙学峰、刘长荣、白敏茹等，他们都是长期从事非数学专业本科生数学公共课教学的教师. 本书包含行列式、矩阵、向量空间、线性方程组及二次型等内容，其中标注"*"号的内容可根据学时多少进行选讲. 本书概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.

湖南大学数学与计量经济学院刘楚中教授在本套教材编写的前期组织中做了大量工作，在此表示衷心感谢.

由于编写时间有限，本教材难免存在不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

湖南大学数学与计量经济学院
《线性代数》教材编写组
2007 年 8 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　行　列　式

线性方程组的求解问题是一类应用相当广泛的线性代数问题，它几乎渗透到自然科学与工程技术的各个方面. 例如，数值天气预报、土木结构设计、大地测量与地质勘探等大量的实际问题都可归结为大规模线性方程组的求解. 与线性方程组求解问题密切相关的是行列式，本章首先引入 n 阶行列式的定义并讨论其性质和计算方法，然后介绍 n 元线性方程组的求解公式 —— 克拉默法则.

第一节　n 阶行列式的定义

一、连加与连乘

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个实数，它们的和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 常简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$，即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \tag{1}$$

这里 $\sum$ 是求和符号，a_i 表示一般项，下标变量 i 为求和指标，它是一个整变量. $\sum$ 上、下端的数字表示下标变量的变化范围，即求和范围. 求和范围也可以是其他形式，如

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \sum_{k+1 \leqslant i \leqslant n} a_i = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n$$

等.

对于 $m \times n$ 个数 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}$ 的和，可表示为

$$\begin{aligned} S &= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) + \cdots + (a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \end{aligned}$$

上式中的 $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ 称为二重求和. 由于加法满足交换律与结合律，因而二重求和还可表示为 $S = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$ 或 $S = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{ij}$.

n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的连乘积 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 常简记为 $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$，对于二重求积，也有

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}a_{ij}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a_{ij}=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}a_{ij}.$$

二、二元和三元线性方程组的克拉默法则

给出一个二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 均为给定的系数. 利用中学代数中学过的消元法,将第一个方程乘以 a_{22},第二个方程乘以 a_{12},然后相减,可消去变元 x_2,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\tag{3}$$

将式(3) 代入第一个方程并化简,有

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\tag{4}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix},$$

其中 D 称为方程组(2) 的系数行列式,而 D_1,D_2 分别是用方程组(2) 中常数项 b_1,b_2 代替 D 中 x_1,x_2 的系数后得到的行列式. 式(3) 和式(4) 表明:当系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组(2) 的解可简单地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.\tag{5}$$

式(5) 称为解二元线性方程组的克拉默法则.

类似地,给出一个三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{6}$$

在方程组(6) 中,通过消去 x_2 和 x_3,方程将变成 $Dx_1=D_1$ 的形式. 其中

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

$$D_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{13}b_2a_{32}+a_{12}a_{23}b_3-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D \neq 0$ 时，通过消元，同样可得线性方程组(6) 的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{7}$$

式(7) 称为解三元线性方程组的克拉默法则.

三、排列及其逆序数

当线性方程组(2) 和(6) 的系数行列式 $D \neq 0$ 时，其解可以很简单地用二阶或三阶行列式表示出来. 我们自然会问，对于含有 n 个变量的线性方程组，其解是否同样也能用类似于(5) 和(7) 的公式来表达呢？为此我们要定义 n 阶行列式. 首先我们引入排列及其逆序数的概念.

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列. 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即大数排在小数的前面，则称它们为一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数. 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$，简记为 τ.

n 级排列的逆序数可以按从左到右方式或从右到左的方式计算. 若按第一种方式计算，则有

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}.$$

这里 t_j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ 表示排在 i_j 的右边且比 i_j 小的元素的个数.

例如，五级排列中，

$$\tau(43512)=3+2+2+0=7, \quad \tau(54321)=4+3+2+1=10.$$

排列 54321 是偶排列，而排列 43512 是奇排列.

又如，在 n 级排列中，排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 21$ 的逆序数为

$$\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

将一个排列中某两个元素的位置互换，而其余的元素不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个对换. 如经过 1,3 对换，排列 123 变成 321，排列 652314 变成 652134. 容易看出，排列 123 是偶排列，而对它作一次对换后的排列 321 却是奇排列；排列 652314 是奇排列，而对它作一次对换后的排列 652134 却是偶排列. 下面的定理表明，上面的结论具有普遍性.

定理 1 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

***证** 先考虑相邻两个数的对换. 设排列

$$\cdots jk \cdots$$

经 j,k 对换变成排列

$$\cdots kj \cdots.$$

显然，这时排列中除 j,k 两个数本身顺序改变外，其他数的顺序并没有改变. 而 j,k 之间，若 $j<k$，则经过对换后的排列的逆序数比原排列的逆序数增加 1；若 $j>k$，则经对换后的排列的逆序数比原排列的逆序数减少 1. 因此，对换 j,k 的位置改变排列的奇偶性.

再看一般的情形. 设排列

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_m k \cdots$$

经 j,k 对换变成排列

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_m j \cdots.$$

现先对原排列施行 m 次相邻两个数的对换：依次对换 k 与 $i_m, i_{m-1}, \cdots, i_2, i_1$ 的位置，则原排列变为 $\cdots jki_1i_2\cdots i_m\cdots$；然后，再经过 $m+1$ 个相邻两个数的对换：依次对换 j 与 k 及 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 的位置，则原排列就变成了 $\cdots ki_1i_2\cdots i_mj\cdots$.

因为每次相邻两个数的对换都改变排列的奇偶性，上面一共施行了 $2m+1$ 次相邻两个数的对换，于是奇数次相邻两个数的对换仍然改变了排列的奇偶性.

由上面的定理可推知，在 $n\ (\geqslant 2)$ 级排列中，奇偶排列各占一半（即各有 $\frac{n!}{2}$ 个）.

四、n 阶行列式的定义

根据排列与逆序数的概念可以看出，二阶行列式和三阶行列式可分别表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2)} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中在第一个式子中，$\sum\limits_{(j_1j_2)}$ 表示对所有的二级排列求和；在第二个式子中，$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对所有的三级排列求和.

类似地，我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 2 设 $n\ (\geqslant 2)$ 为自然数，由 n^2 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为一个 n 阶行列式，其中 a_{ij} 称为第 i 行，第 j 列的元素. 该行列式的值等于所有取

此为试读，需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和

$$\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为 n 级排列，$\sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \tag{8}$$

由定义立即看出，n 阶行列式由 $n!$ 项组成，其中一半带正号，一半带负号. n 阶行列式(8) 有时简记为 $|a_{ij}|$.

定理 2 n 阶行列式的定义也可写成

$$D = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

证 将项

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \tag{9}$$

重新排成如下形式：

$$a_{1j'_1} a_{2j'_2} \cdots a_{nj'_n}. \tag{10}$$

因为乘法满足交换律，因此形式(9) 和形式(10) 是相等的.

又因为形式(10) 是由形式(9) 经过一系列元素的对换得来的，而每做一次元素对换，相应的行下标和列下标所成排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 也同时做了一次对换. 因此由定理 1 知，行下标和列下标的排列的逆序数同时改变了奇偶性，因而行下标和列下标的排列的逆序数之和不改变奇偶性，于是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12 \cdots n) + \tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)} = (-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)},$$

故

$$\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} = \sum_{(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)} (-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)} a_{1j'_1} a_{2j'_2} \cdots a_{nj'_n}.$$

按定理 2 决定行列式中每一项的符号的好处在于，行下标与列下标的地位是对称的. 因此，行列式的每一项也可以将列下标以自然顺序排起来，即得如下推论：

推论 1

$$D = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \tag{11}$$

例 1 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 这是一个四阶行列式. 根据行列式的定义，应该有 $4! = 24$ 项，但由于有

许多零元素，使得不为零的项大大减少. 实际上，分析项

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

知，如果 $j_1 \neq 4$，则 $a_{1j_1} = 0$，即只需考虑列下标 $j_1 = 4$ 的项. 同理，只需考虑列下标 $j_2 = 3, j_3 = 2, j_4 = 1$ 的项. 换句话说，行列式中不为零的项只有一项，即 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$. 由于逆序数 $\tau(4321) = 6$，故这一项带正号. 所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

例 2 设 D 是一 n 阶行列式，则在下述各种情形中，D 的值均为零.

(1) D 中零元素个数多于 $n^2 - n$；

(2) D 中某一行的元素全为零；

(3) D 中某一列的元素全为零.

解 (1) 因为行列式中不为零的元素的个数少于 n，而行列式的每项是各行与各列中取的 n 个元素的乘积，所以这 n 个因子中至少有一个零因子，因而行列式为零.

(2) 和(3) 的情形：因行列式的每项都有零元素作为因子，因而每项都是零，从而行列式为零.

例 3 计算下列 n 阶行列式

$$(1)\ D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \qquad (2)\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式的定义，行列式 D_1 应该有 $n!$项，但由于该行列式中有许多零元素，使得许多项为零. 注意到行列式 D_1 的第一行元素除了 a_{11} 以外，其余全为零，因而，只需考虑 $j_1 = 1$ 的项. D_1 的第二行元素除了 a_{21} 和 a_{22} 以外，其余全为零，因而只需考虑 $j_2 = 1$ 或 $j_2 = 2$ 的项. 但由于 $j_1 = 1$，j_2 不能再取 1，因而只需考虑 $j_2 = 2$ 的项. 这样逐步递推，不难看出，在行列式的各项中，除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 以外，其余全为零. 于是

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地可以证明

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}.$$

我们称形如 D_1 的行列式，即主对角线（从左上角元素到右下角元素的连线）的右上方元素全为零的行列式为下三角形行列式；而形如 D_2 的行列式，即主对角线的左下方元素全为零的行列式为上三角形行列式. 下三角形行列式和上三角形行列式统称为三角形行列式. 从上例中可以看出，三角形行列式的值非常容易计算，就等于主对角线上元素（简称为对角元）的乘积. 作为特殊情形，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

我们称上述行列式，即对角元以外的元素全为零的行列式为对角形行列式，它的值也等于对角元的乘积.

例 4 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，记 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，证明：$D = a_{11}D_1$.

证

$$\begin{aligned} D &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(1 j_2 \cdots j_n)} a_{11} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11} \sum_{(j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_2 \cdots j_n)} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11} D_1. \end{aligned}$$

习　题　1-1

1. 计算下列各式：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} i(i-1)$；　(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{i+j}{n}$；　(3) $\prod\limits_{i=1}^{n} 2^i$；　(4) $\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m} a^{i+j}$.

2. 分别选择 i 和 j，使得

(1) $1274i56j9$ 成奇排列；　(2) $1i25j4897$ 成偶排列.

3. 求 $2n$ 级排列 $(2n)(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n$ 的逆序数.

4. 写出 4 阶行列式中所有带负号且含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

5. 根据行列式的定义计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

第二节　行列式的性质及计算

一、行列式的性质

当行列式的阶数较高时,利用定义直接计算很麻烦,计算量较大. 本节我们研究行列式的基本性质,从而将复杂行列式的计算化为简单行列式的计算(如三角形行列式的计算),使计算简化.

将 n 阶行列式 D 的行和列互换得到的行列式称为 D 的转置,记为 D^{T}. 若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　$D = D^{\mathrm{T}}$.

证　D 中位于第 i 行,第 j 列的元素 a_{ij} 在 D^{T} 中位于第 j 行,第 i 列. 记

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则有 $b_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$. 由行列式的定义及上一节推论 1,有

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{T}}&=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}\\&=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}\\&=D.\end{aligned}$$

性质 1 表明,在行列式中行与列的地位是对称的,因此凡是有关行的性质,对列也同样成立.

性质 2 互换 n 阶行列式的任意两行(列),行列式仅改变符号.

证 设行列式

$$D=\begin{array}{c}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\text{第 } i \text{ 行}\\\\\text{第 } k \text{ 行}\\\\\\\end{array},$$

互换 D 的第 i 行和第 k 行,得行列式

$$D_1=\begin{array}{c}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\text{第 } i \text{ 行}\\\\\text{第 } k \text{ 行}\\\\\\\end{array}.$$

因 D 中任意一项 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ 也是 D_1 中的一项 $a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$,其中 a_{kj_k} 是 D_1 中第 i 行第 j_k 列元素,a_{ij_i} 是 D_1 中第 k 行第 j_i 列元素. 故项 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ 在 D 中的符号为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}$,项 $a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$ 在 D_1 中的符号为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}$. 又因为排列 $j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n$ 是由排列 $j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n$ 对换 j_i 和 j_k 的位置后得到的,所以

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}.$$

因此

$$D=-D_1.$$

推论 1 若行列式中某两行(列)的元素对应相等,则行列式为零.

性质 3 行列式的某一行(列)的所有元素同乘以一个数 c,等于以 c 乘以这个

行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots ca_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= c\sum_{(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} = cD. \end{aligned}$$

推论 2 若行列式的某行(列)的元素有一公因子 c,则可将因子 c 提到行列式外与行列式相乘.

性质 4 若行列式的两行(列)的元素对应成比例,则该行列式为 0.

性质 5 若行列式的某行(列)的各元素是两个数之和,则该行列式等于两个行列式之和,而这两个行列式除了这一行(列)以外与原来行列式的对应行(列)一样,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 设

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com