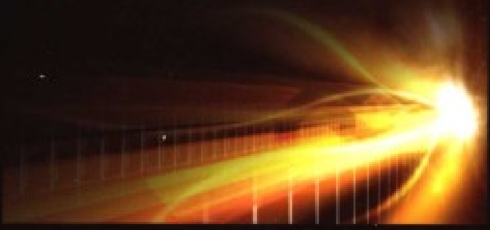
JS

《数学竞赛之窗》编辑部 编

国外高中数学竞赛真题库

GUOWAI GAOZHONG SHUXUE JINGSAI ZHENTIKU

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社



★ 冲刺全国高中数学联赛

★ 冲刺全国高中物理联赛

★ 冲刺全国高中化学联赛

★ 高中数学竞赛 2000 题

★ 高中数学竞赛方法

★ 高中物理竞赛方法

★ 高中化学竞赛方法

★ 高中生物竞赛方法

★ 国内高中数学竞赛真题库

★ 国外高中数学竞赛真题库

★ 全国高中化学竞赛真题库

★ 全国高中物理竞赛真题库

ISBN 978-7-308-05344-0

9 787308 053440 >

定价：29.00 元

国外高中数学竞赛真题库

《数学竞赛之窗》编辑部　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

国外高中数学竞赛真题库/《数学竞赛之窗》编辑部编. 一杭州:浙江大学出版社,2007.5
ISBN 978-7-308-05344-0

Ⅰ.国... Ⅱ.数... Ⅲ.数学课一高中一习题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 076809 号

国外高中数学竞赛真题库

《数学竞赛之窗》编辑部 编

责任编辑 杨晓鸣 夏晓冬

出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)

排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心

印　　刷 杭州浙大同力教育彩印有限公司

开　　本 787mm×1092mm 1/16

印　　张 22.75

字　　数 560 千

版 印 次 2007 年 5 月第 1 版 2007 年 7 月第 2 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-308-05344-0

定　　价 29.00 元

前 言

自世界上第一次真正有组织的数学竞赛——匈牙利数学竞赛举办(1894)以来,数学竞赛已经有130多年的历史了,国际数学奥林匹克(International Mathematics Olympiad,简称IMO)也已经举办了46届。在这130多年数学竞赛中,培养了无数的数学大师。在2006年度国际数学的最高奖项——菲尔兹奖的四位获奖者中就有两位曾是国际数学奥林匹克的金牌得主,他们分别是俄罗斯数学怪杰Grigory Perelman和澳大利亚华裔数学天才陶哲轩(Terence Tao)。

对于数学奥林匹克活动而言,其中最吸引人的,无疑就是那一道道闪耀着数学智慧、发散着数学美的试题。数学大师华罗庚教授曾经说过:"出题比做题要难,题目要出得妙,出得好,要测得出水平。"一次数学竞赛成功与否,主要取决于命题。

基于数学竞赛试题的重要作用,对竞赛试题的研究和分析就成为一项重要的工作。

经过多年来的实践,世界各国都基本形成了"地区竞赛→国家数学奥林匹克→国家队选拔→国际数学奥林匹克"的选拔机制。在这一选拔过程中,各国的数学工作者每年都会命制一大批精美的数学竞赛试题,《数学竞赛之窗》杂志也会在每年的第一时间对这些试题加以收集、整理和研究。本书的试题就是来源于这些竞赛。

需要特别感谢的是香港科技大学的李健贤先生,他给我们提供了历年国际数学奥林匹克期间各国领队交流的各国当年数学竞赛试题;感谢中国科技大学苏淳教授,他给我们提供了最近几年俄罗斯数学奥林匹克的试题;感谢林常教授对很多试题进行了翻译和解答。

在本刊编辑部对试题进行翻译、解答、整理、筛选的过程中,林昊、赵斌、李潜、王兴、费振鹏、黎金传、顾滨、董士鬲、虞金龙、成俊锋、陈尚俊、李红等同志参与了这些工作,王卫华对本书进行了统稿。

在本书的编写过程中,我们还参考了国内外的大量资料,部分试题和解答引自《数学竞赛之窗》、《数学通讯》、《中等数学》、《数理天

地》、《中学生数学》等杂志，在此对这些问题的翻译者和解答人表示感谢。“中国奥数教学联盟”协作学校的部分老师和同学也提供了一些解答，在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，欢迎读者批评指正。对于读者提供的有代表性的问题，我们将在《数学竞赛之窗》杂志上予以发表。

也欢迎大家与我们进行数学竞赛问题的探讨、数学竞赛资料的交流。您可以拨打《数学竞赛之窗》的热线电话：0512－66297080，也欢迎大家给我们发邮件：sxjszcbjb@163. com，同时也欢迎大家登陆我们的网站（http://www. jsmaths. com）给我们提供宝贵意见。我们将综合大家的意见，再版时作出修订。凡提出建议者，均可获得本刊内部资料一份。

《数学竞赛之窗》编辑部

2006 年 10 月

目　录

§1 代 数

1. 证明：不存在定义在正实数集上的函数 f，使得对任意 $y > x > 0$，均有 $f(y) > (y - x)f^2(x)$. (2003 • 爱尔兰)

证明：若存在满足条件的函数 f，则对任意 $y > 0$，存在 x，使得 $0 < x < y$，故 $f(y) > (y - x)f^2(x) > 0$，即 f 为正实数集到正实数集的函数.

我们令 $z_0 = 1 + \frac{4}{f^2(1)}$，对任意 $y \geqslant z_0$，取 $x = 1$，就有

$$f(y) > (y-1)f^2(1) \geqslant (z_0 - 1)f^2(1) = 4. \quad (1)$$

下面令 $z_n = z_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$，我们证明：对任意 $y \geqslant z_n$，均有

$$f(y) \geqslant 2^{n+2}.$$

事实上，当 $n = 0$ 时，由(1)可知命题成立，现设命题对 $n = k$ 时成立，考虑 $n = k + 1$ 的情形，对任意 $y \geqslant z_{k+1}$，取 $x = z_k$，就有

$$f(y) > (y - z_k)f^2(z_k) \geqslant (z_{k+1} - z_k)f^2(z_k) = \frac{1}{2^{k+1}}f^2(k) \geqslant \frac{1}{2^{k+1}} \times 2^{2k+4} = 2^{k+3}.$$

所以命题对 $k+1$ 成立. 从而对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，只要 $y \geqslant z_n$，就有 $f(y) \geqslant 2^{n+2}$.

注意到，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，均有 $z_0 + 1 > z_n$，故 $f(z_0 + 1) > 2^{n+2}$ 对任意正整数 n 成立，这是一个矛盾.

所以不存在符合要求的函数 f.

2. 设 T 是一个周长为 2 的三角形，a,b,c 为 T 的三边长，证明：

1) $abc + \frac{28}{27} \geqslant ab + bc + ca$；

2) $ab + bc + ca \geqslant abc + 1$.

(2003 • 爱尔兰)

证明：由条件可知 $0 \leqslant a,b,c \leqslant 1$，$a + b + c = 2$. 于是 $0 \leqslant (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant \left(\frac{1-a+1-b+1-c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$，

所以 $0 \leqslant 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc \leqslant \frac{1}{27}$. 从而，再结合 $a + b + c = 2$，可知

$$1 \leqslant ab + bc + ca - abc \leqslant \frac{28}{27}.$$

两个不等式全部获证.

3. 设 $a,b > 0$，求最大的正整数 c，使得对任意正实数 x，均有

$$c \leqslant \max\left\{ax + \frac{1}{ax}, bx + \frac{1}{bx}\right\}.$$

(2003 • 爱尔兰)

解：设 $f(t) = t + \frac{1}{t}$，$t > 0$，$g(x) = \max(f(ax), f(bx))$，转为求 $g(x)$ 在 $x > 0$ 时的最小值.

若 $a = b$，则 $g(x) = ax + \frac{1}{ax} \geqslant 2$，等号当 $x = \frac{1}{a}$ 时取到，此时 $c = 2$.

若 $a \neq b$，不妨设 $0 < a < b$，则

$$f(bx) - f(ax) = bx - ax + \frac{1}{bx} - \frac{1}{ax} = (b-a) \times \left(1 - \frac{1}{abx^2}\right).$$

所以 $g(x) = \begin{cases} f(bx), 若\ x \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}}; \\ f(ax), 若\ 0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{ab}}. \end{cases}$

利用 $f(t) = t + \frac{1}{t}$ 的单调区间，可知当 $1 \leqslant s < t$ 时，$f(s) < f(t)$；当 $0 < s < t \leqslant 1$ 时，$f(s) > f(t)$.

因此当 $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 时，$f(bx) \geqslant f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$；

当 $0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 时，亦有 $f(bx) \geqslant f\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. 故 $g(x) \geqslant f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. 所以 $c = f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$，等号在 $x =$

$\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 时取到.

综上，$c_{\max}=\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$.

4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ 都是非负实数，证明：

$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}+(b_1\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant((a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n))^{\frac{1}{n}}$.　　(2003・普特兰)

证明：不妨设对每个 i，都有 $a_i+b_i>0$，此时，由平均值不等式，可知

$$\left(\frac{a_1\cdots a_n}{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right),$$

$$\left(\frac{b_1\cdots b_n}{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right).$$

故 $\left(\frac{a_1\cdots a_n}{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{b_1\cdots b_n}{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(1+\cdots+1)=1$，去分母即可得欲证的不等式.

5. 求下述代数式的最小值：

$|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$，其中 x 为实数.　　(2003・普特兰)

解：我们令

$f(x)=\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x=\sin x+\cos x+\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$.

记 $t=\sin x+\cos x$，则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，这里 $|t|\leqslant\sqrt{2}$，且 $|t|\neq1$.

$f(x)=t+\frac{2}{t^2-1}+\frac{2t}{t^2-1}=t+\frac{2}{t-1}=t-1+\frac{2}{t-1}+1$.

当 $t>1$ 时，$t-1+\frac{2}{t-1}\geqslant2\sqrt{2}$，此时 $f(x)\geqslant1+2\sqrt{2}$（事实上，等号不能取到，因为当 $t=1+\sqrt{2}$ 时等号成立，已超过 t 的范围）.

当 $t<1$ 时，$-f(x)=-1+(1-t)+\frac{2}{1-t}\geqslant-1+2\sqrt{2}$（等号在 $t=1-\sqrt{2}$ 时取到）. 这些讨论表明 $|f(x)|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-1$.

6. 设 a,b,c,A,B,C 都是实数，$a\neq0$，$A\neq0$，且对任意实数 x，都有

$|ax^2+bx+c|\leqslant|Ax^2+Bx+C|$，

证明：$|b^2-4ac|\leqslant|B^2-4AC|$.

(2003・普特兰)

证明：注意到，在条件中取 x 充分大，可知 $|a|\leqslant|A|$. 下面分两种情形讨论.

情形一：$B^2-4AC>0$，此时 $Ax^2+Bx+C=0$ 有两个不同的根 x_1,x_2. 由条件可知 x_1,x_2 也必须是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，所以 $b^2-4ac>0$，并且

$B^2-4AC=A^2(x_1-x_2)^2\geqslant a^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac$.

情形二：$B^2-4AC\leqslant0$，不妨设 $A\geqslant a>0$，则对一切实数 x，均有 $Ax^2+Bx+C\geqslant ax^2+bx+c\geqslant0$，即 $(A-a)x^2+(B-b)x+(C-c)\geqslant0$，所以 $(B-b)^2\leqslant4(A-a)(C-c)$. 类似地，对任意实数 x，有 $(A+a)x^2+(B+b)x+(C+c)\geqslant0$，故 $(B+b)^2\leqslant4(A+a)(C+c)$. 这样，我们有 $(B^2-b^2)^2\leqslant16(A^2-a^2)(C^2-c^2)$，故

$$\begin{aligned}B^2-b^2&\leqslant|B^2-b^2|\\&\leqslant4\sqrt{A^2C^2+a^2c^2-(A^2c^2+a^2C^2)}\\&\leqslant4\sqrt{(AC)^2+(ac)^2-2ACac}\\&=4|AC-ac|.\end{aligned}$$

结合前面的条件，可知 $C-c\geqslant0$，$C+c\geqslant0$，

即 $C\geqslant|c|$，又 $A\geqslant a>0$，

从而有 $B^2-b^2\leqslant4(AC-ac)$，

即 $4ac-b^2\leqslant4AC-B^2$.

另一方面，$B^2+b^2=\frac{1}{2}((B-b)^2+(B+b)^2)\leqslant2((A-a)(C-c)+(A+a)(C+c))=4(AC+ac)$，即 $b^2-4ac\leqslant4AC-B^2$.

结合上述两方面，可知 $|b^2-4ac|\leqslant4AC-B^2$.

所以命题成立.

7. 是否存在多项式 $a(x),b(x),c(y),d(y)$，使得

$1+xy+x^2y^2=a(x)c(y)+b(x)d(y)$ 恒成立？　　(2003・普特兰)

解：如果存在满足条件的多项式，我们可设 $a(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$，$b(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$，$c(y)=c_2y^2+c_1y+c_0$，$d(y)=d_2y^2+d_1y+d_0$. 对比 $1+xy+x^2y^2=a(x)c(y)+b(x)d(y)$ 两边各项的系数，要求

$1=a_ic_i+b_id_i$，$i=0,1,2$；

$0=a_ic_j+b_id_j, i\neq j$.

由前面的方程可知 a_i 和 b_i 不全为零,c_i 和 d_i 也不全为零. 从而结合后面的方程,可得 $\frac{a_i}{b_i}=-\frac{d_j}{c_j}, i\neq j$. 这里若 $b_i=0$,则 $c_j=0$. 因此我们有

$$\frac{a_0}{b_0}=-\frac{d_1}{c_1}=\frac{a_2}{b_2}=-\frac{d_0}{c_0}$$

这表明 $a_0c_0+b_0d_0=0$,矛盾. 因此不存在满足条件的多项式.

8. 设 n 为正整数,从数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}$ 中分别求相邻两个数的算术平均数,得出新数列 $\frac{3}{4},\frac{5}{12},\cdots,\frac{2n-1}{2n(n-1)}$. 对新数列继续上述操作,直至最后剩下一个数 x_n,证明:$x_n<\frac{2}{n}$.

(2003 • 普特兰)

证明:利用数学归纳法易证:第 k 个数列的第 j 个元素为 $\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}/(2^{k-1}(i+j-1))$,这里最初的数列为第 1 个数列. 因此 $x_n=$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{n-1}{i-1}}{i}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\binom{n}{i}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}=\frac{2^n-1}{n\cdot 2^{n-1}}<\frac{2}{n}.$$

9. 设实数 a_{ij} 满足:当 $i=j$ 时,a_{ij} 为正数,当 $i\neq j$ 时,a_{ij} 为负数,其中 $i=1,2,3, j=1,2,3$. 证明:存在正实数 c_1,c_2,c_3,使得下列三个数

$$a_{11}c_1+a_{12}c_2+a_{13}c_3, a_{21}c_1+a_{22}c_2+a_{23}c_3,$$
$$a_{31}c_1+a_{32}c_2+a_{33}c_3,$$

要么都是负数,要么都是正数,要么都是零.

(2003 • IMO 预选题)

证明:设在空间直角坐标系中,$O(0,0,0)$,$P(a_{11},a_{21},a_{31})$,$Q(a_{12},a_{22},a_{32})$,$R(a_{13},a_{23},a_{33})$. 只要证明,在 $\triangle PQR$ 中存在一点,其坐标要么都是负数,要么都是正数,要么都是零.

设 P,Q,R 在 xOy 平面上的投影分别为 P',Q',R',则 P',Q',R' 分别在第四象限、第二象限、第三象限.

如图 1 所示,若 O 在 $\triangle P'Q'R'$ 的外部或边界上,设 $P'Q'$ 与 OR' 交于 S',S 是线段 PQ 上的点,其在 xOy 平面上的投影为 S'. 因为点 P,Q 在 z 轴上的坐标均为负数,所以点 S 在 z 轴上的坐标也为负数. 于是在线段 SR 上,且足够接近点 S 的任意一点的坐标都是负数.

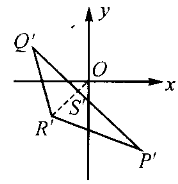


图1

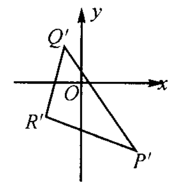


图2

如图 2 所示,若 O 在 $\triangle P'Q'R'$ 的内部,设 T 是平面 PQR 上的一点,T 在 xOy 平面上的投影为 O. 若 $T=O$,则 T 的坐标都是 0;若 T 在 z 轴上的坐标为负数(或正数),那么在 $\triangle PQR$ 内取一点 U,且足够接近点 T,使得其在 x 轴和 y 轴上的坐标均为负数(或正数). 于是点 U 的坐标全为负数(或正数).

10. 求所有非减函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得

(1) $f(0)=0, f(1)=1$;

(2) 对于所有满足 $a<1<b$ 的实数 a、b,有 $f(a)+f(b)=f(a)f(b)+f(a+b-ab)$.

(2003 • IMO 预选题)

解:设 $g(x)=f(x+1)-1$,则 $g(x)$ 也是非减函数,且 $g(0)=0, g(-1)=-1$.

当 $a<1<b$ 时,有

$g(-(a-1)(b-1))=-g(a-1)g(b-1)$.

于是对于所有实数 x、y,若 $x<0<y$,则有

$g(-xy)=-g(x)g(y)$;

或对于所有 y、$z>0$,有

$g(yz)=-g(y)g(-z)$.

反之,若 g 满足这个条件,则 $f(x)$ 满足原条件.

若 $g(1)=0$,则对任意 $z>0$,有 $g(z)=0$.

设 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是任意一个非减函数,且满足 $g(-1)=-1, g(x)=0(x\geqslant 0)$.

于是 g 满足条件. 从而可得满足条件的函数

$f(x)=g(x-1)+1$.

若 $g(1)>0$,令 $y=1$,则有 $g(-z)=\frac{-g(z)}{g(1)}$,其中 $z>0$. 于是

$$g(yz)=\frac{g(y)g(z)}{g(1)}, y、z>0.$$

设 $h(x)=\dfrac{g(x)}{g(1)}$，则 $h(x)$ 也是非减函数，且 $h(0)=0$，$h(1)=1$，$h(xy)=h(x)h(y)$，x、$y>0$.

于是，对于任意正整数 n，有

$h(x^n)=h^n(x)$.

令 $x=y^{\frac{1}{n}}$，则 $h(y)=h^n(y^{\frac{1}{n}})$，即

$h(y^{\frac{1}{n}})=h^{\frac{1}{n}}(y)$.

又因为 $h\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{h(x)}=h^{-1}(x)$，因此对于任意有理数 q，有

$h(x^q)=h^q(x)$.

因为 $h(x)$ 是非减函数，所以存在非负数 k，对于所有 $x>0$，有 $h(x)=x^k$.

设 $g(1)=c$，则 $g(x)=cx^k$，$x>0$.

于是当 $x>0$ 时，有

$g(-x)=-\dfrac{g(x)}{g(1)}=-x^k$.

故对于 $k\geqslant 0$，$c>0$，有

$$g(x)=\begin{cases}cx^k & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -(-x)^k & x<0.\end{cases}$$

因此，$g(x)$ 是非减函数，$g(0)=0$，$g(-1)=-1$，且 $g(-xy)=-g(x)g(y)$ 对所有的 $x<0<y$ 成立，故 g 满足条件.

综上所述，满足条件的非减函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 1,\\ 0 & x=0,\end{cases}$$

和
$$f(x)=\begin{cases}c(x-1)^k+1 & x>1,\\ 1 & x=1,\\ -(1-x)^k+1 & x<1.\end{cases}$$

$(c>0,k\geqslant 0)$.

11. 考虑两个正实数列 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots$，$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\cdots$，记 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，$n=1,2,3,\cdots$. 设 $c_i=\min\{a_i,b_i\}$，$C_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，$n=1,2,3,\cdots$.

(1) 是否存在数列 $\{a_i\}$、$\{b_i\}$，使得数列 $\{A_n\}$、$\{B_n\}$ 无界，而数列 $\{C_n\}$ 有界？

(2) 若 $b_i=\dfrac{1}{i}$，$i=1,2,\cdots$，则(1)的结论是否会改变？证明你的结论.

(2003 · IMO 预选题)

解：(1) 存在.

设 $\{c_i\}$ 是任意正数列，且满足 $c_i\geqslant c_{i+1}$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}c_i<+\infty$，又设整数列 $\{k_m\}$ 满足 $1=k_1<k_2<k_3<\cdots$，且 $(k_{m+1}-k_m)c_{k_m}\geqslant 1$.

定义数列 $\{a_i\}$、$\{b_i\}$ 如下：

当 n 为奇数，且 $k_n\leqslant i<k_{n+1}$ 时，定义 $a_i=c_{k_n}$，$b_i=c_i$，则

$A_{k_{n+1}-1}=A_{k_n-1}+(k_{n+1}-k_n)c_{k_n}\geqslant A_{k_n-1}+1$.

当 n 为偶数，且 $k_n\leqslant i<k_{n+1}$ 时，定义 $a_i=c_i$，$b_i=c_{k_n}$，则

$B_{k_{n+1}-1}\geqslant B_{k_n-1}+1$.

于是，数列 $\{A_n\}$、$\{B_n\}$ 无界，且 $c_i=\min\{a_i,b_i\}$.

(2) 假设结论不改变.

若只有有限个 i 满足 $b_i=c_i$，则存在一个足够大的 I，使得当 $i\geqslant I$ 时，有 $c_i=a_i$，所以 $\sum\limits_{i\geqslant I}c_i=\sum\limits_{i\geqslant I}a_i=+\infty$. 矛盾.

若有无穷多个 i 满足 $b_i=c_i$，设整数列 $\{k_m\}$ 满足 $k_{m+1}\geqslant 2k_m$，且 $b_{k_m}=c_{k_m}$. 由于数列 $\{c_i\}$ 也单调下降，所以有

$$\sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}}c_k\geqslant(k_{i+1}-k_i)c_{k_{i+1}}=(k_{i+1}-k_i)\frac{1}{k_{i+1}}\geqslant\frac{1}{2}.$$

于是 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}c_i=+\infty$. 矛盾.

12. 设 $\mathbf{R}_+$ 为正实数集，求所有函数 $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$，满足条件：

(1) 对于所有 x、y、$z\in\mathbf{R}_+$，有

$f(xyz)+f(x)+f(y)+f(z)$

$=f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx})$；

(2) 对于所有 $1\leqslant x<y$，有 $f(x)<f(y)$.

(2003 · IMO 预选题)

解：我们证明 $f(x)=x^\lambda+x^{-\lambda}$ 满足条件，其中 λ 是任意正实数. 为此，先证明一个引理.

引理　存在唯一的函数 $g:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$，使得

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{g(x)}.$$

引理的证明：设 $x=y=z=1$，则条件(1)化为 $4f(1)=f^3(1)$. 因为 $f(1)>0$，所以 $f(1)$

$=2$.

定义函数 $A:[1,+\infty)\to[2,+\infty)$ 为 $A(x)=x+\frac{1}{x}$. 因为 $f(x)(x\in[1,+\infty))$ 是严格递增函数，且 A 是双射，所以函数 $g(x)$ 是唯一确定的.

因为 A 是严格递增的，所以 g 也严格递增. 由 $f(1)=2$ 可知 $g(1)=1$.

设 $(x,y,z)=\left(t,t,\frac{1}{t}\right)$，则 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$；

设 $(x,y,z)=(t^2,1,1)$，

则 $f(t^2)=f^2(t)-2$；

设 $(x,y,z)=\left(\frac{s}{t},\frac{t}{s},st\right)$，则

$f(st)+f\left(\frac{t}{s}\right)=f(s)f(t)$；

设 $(x,y,z)=\left(s^2,\frac{1}{s^2},t^2\right)$，则

$f(st)f\left(\frac{t}{s}\right)=f(s^2)+f(t^2)=f^2(s)+f^2(t)-4$.

设 $1\leqslant x\leqslant y$，下面证明 $g(xy)=g(x)g(y)$. 因为 $f(xy)+f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$=\left(g(x)+\frac{1}{g(x)}\right)\left(g(y)+\frac{1}{g(y)}\right)$$

$$=\left(g(x)g(y)+\frac{1}{g(x)g(y)}\right)+\left(\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{g(y)}{g(x)}\right),$$

$f(xy)f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$=\left(g(x)+\frac{1}{g(x)}\right)^2+\left(g(y)+\frac{1}{g(y)}\right)^2-4$$

$$=\left(g(x)g(y)+\frac{1}{g(x)g(y)}\right)\left(\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{g(y)}{g(x)}\right),$$

于是 $\left\{f(xy),f\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$

$$=\left\{g(x)g(y)+\frac{1}{g(x)g(y)},\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{g(y)}{g(x)}\right\}.$$

因为 $f(xy)=A(g(xy))$，且 A 是双射，于是 $g(xy)=g(x)g(y)$ 或 $g(xy)=\frac{g(y)}{g(x)}$.

又因为 $xy\geqslant y$，且 g 是递增的，

所以 $g(xy)=g(x)g(y)$.

对于一个确定的实数 $\varepsilon>1$，设 $g(\varepsilon)=\varepsilon^\lambda$.

因为 $g(\varepsilon)>1$，所以 $\lambda>0$.

于是对所有有理数 $q(q\in[0,+\infty))$，有 $g(\varepsilon^q)=g^q(\varepsilon)=\varepsilon^{q\lambda}$.

因为 g 是严格递增的，所以对所有 $t\in[0,+\infty)$，$g(\varepsilon^t)=\varepsilon^{t\lambda}$. 从而当 $x\geqslant1$ 时，$g(x)=x^\lambda$.

于是当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=x^\lambda+x^{-\lambda}$.

由 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ 可知，

当 $0<x<1$ 时，$f(x)=x^\lambda+x^{-\lambda}$.

下面验证对于所有的 $\lambda(\lambda>0)$，函数 $f(x)=x^\lambda+x^{-\lambda}$ 满足两个给定的条件.

因为 $f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx})=[(xy)^{\frac{\lambda}{2}}+(xy)^{-\frac{\lambda}{2}}][(yz)^{\frac{\lambda}{2}}+(yz)^{-\frac{\lambda}{2}}][(zx)^{\frac{\lambda}{2}}+(zx)^{-\frac{\lambda}{2}}]=(xyz)^\lambda+x^\lambda+y^\lambda+z^\lambda+x^{-\lambda}+y^{-\lambda}+z^{-\lambda}+(xyz)^{-\lambda}=f(xyz)+f(x)+f(y)+f(z)$，

当 $1\leqslant x<y$ 时，

$$f(y)-f(x)=y^\lambda+y^{-\lambda}-x^\lambda-x^{-\lambda}$$

$$=(y^\lambda-x^\lambda)\left[1-\frac{1}{(xy)^\lambda}\right]>0.$$

所以 $f(x)=x^\lambda+x^{-\lambda}(\lambda>0)$ 满足条件.

13. 已知 n 是正整数，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 是两个正实数列. 若 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{2n}\}$ 是满足 $z_{i+j}^2\geqslant x_iy_j$ 的正实数列，其中 $1\leqslant i,j\leqslant n$，设 $M=\max\{z_2,z_3,\cdots,z_{2n}\}$，证明：

$$\left(\frac{M+z_2+z_3+\cdots+z_{2n}}{2n}\right)^2\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right).$$

（2003 • IMO 预选题）

证明： 设 $X=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\max\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$. 用 $x'_i=\frac{x_i}{X}$ 代替 x_i，$y'_i=\frac{y_i}{Y}$ 代替 y_i，$z'_i=\frac{z_i}{\sqrt{XY}}$ 代替 z_i，则原不等式不变. 不妨假设 $X=Y=1$，下面证明

$$M+z_2+z_3+\cdots+z_{2n}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n. \quad ①$$

只要证明对于任意 $r\geqslant0$，式 ① 左边大于 r 的项的数目不少于右边大于 r 的项的数目.

若 $r\geqslant1$，则右边没有比 r 大的项，故假设 $r<1$.

设 $A=\{i\mid x_i>r,1\leqslant i\leqslant n\}$，$a=|A|$，

$B=\{i\mid y_i>r,1\leqslant i\leqslant n\}$，$b=|B|$.

因为 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\max\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}=1$，于是 a、b 至少为 1. 由 $x_i>r$，$y_i>r$，可

得 $z_{i+j} \geqslant \sqrt{x_i y_j} > r$. 则

$C = \{i \mid z_i > r, 2 \leqslant i \leqslant 2n\} \supset (A + B) = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$.

设 $A = \{i_1, i_2, \cdots, i_a\}, i_1 < i_2 < \cdots < i_a$,

$B = \{j_1, j_2, \cdots, j_b\}, j_1 < j_2 < \cdots < j_b$.

则 $i_1 + j_1, i_1 + j_2, \cdots, i_1 + j_b, i_2 + j_b, \cdots, i_a + j_b$ 是 $a + b - 1$ 个不同的数，且属于 $A + B$. 所以 $|A + B| \geqslant |A| + |B| - 1 = a + b - 1$.

故有 $|C| \geqslant |A + B| \geqslant a + b - 1$.

特别地，$|C| \geqslant 1$，且对于一些 k，有 $z_k > r$.

因为 $M > r$，所以式 ① 左边至少有 $a + b$ 项比 r 大. 由于 $a + b$ 是右边比 r 大的项的数目，所以结论成立. 因此

$$\left(\frac{M + z_2 + z_3 + \cdots + z_{2n}}{2n}\right)^2$$

$$\geqslant \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right)\right]^2$$

$$\geqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right).$$

14. n 是正整数，对每个满足 $0 \leqslant a_i \leqslant i, i = 0, 1, \cdots, n$ 的正整数列 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$，定义另一个数列 $t(A) = \{t(a_0), t(a_1), \cdots, t(a_n)\}$，其中 $t(a_i)$ 为 A 数列中位于 a_i 项之前的与 a_i 不等的数的个数. 证明：从任意一个上述数列 A 开始，在少于 n 次 t 变化后，总能得到一个数列 B，满足 $t(B) = B$. (2003 · 美国)

证明：(1) 设 b_i 是 B 中的某一项，若 $b_i \neq b_{i-1}$，分以下两种情形：

(ⅰ) $b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}$ 中存在一项与 b_i 相等，设为 b_k，则 b_i 之前与 b_i 不等的数比 b_k 之前与 b_k 不等的数至少多了一个 b_{i-1}，则 $t(b_i) > t(b_k)$，与 $b_i = b_k$ 矛盾.

(ⅱ) $b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}$ 均不与 b_i 相等，则

$t(b_i) = i \Rightarrow b_i = i > b_{i-1}$.

故满足 $t(B) = B$ 的数列的充分必要条件是：B 是非减的，且 $b_i = i$ 或 $b_{i-1}, b_0 = 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

(2) 若 $a_i = a_{i-1}$，则依定义可知 $t(a_i) = t(a_{i-1})$.

(3) 若 $a_i = i$，则依定义可知 $t(a_i) = i$.

(4) 设 $a_l = k$，且 a_l 前面有 a 个 k.

因为当 $i \leqslant k - 1$ 时，$a_i < k$，所以 $a \leqslant l - k$.

故 $t(a_l) = l - a \geqslant k = a_l$.

(ⅰ) 当 $t(a_l) = a_l$ 时，$a = l - k$，则

$a_k = a_{k+1} = \cdots = a_l = k$.

由(1)知，a_l 满足成为 B 中第 l 项的条件，又由(2)、(3)知，a_l 将在 t 变化后保持不变.

(ⅱ) 当 $t(a_l) \neq a_l$ 时，因为 $a_l \geqslant 0$，B 中 l 项的值不大于 n，所以至多 n 次 t 变化后，a_l 将满足成为 B 中第 l 项的条件.

于是对 A 中每一项，在至多 n 次 t 变化后都将满足成为 B 中该项的条件，此时得到的数列 A_0 满足 $t(A_0) = A_0$.

15. a、b、c 是正实数，证明：

$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(2b + c + a)^2}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \leqslant 8. \quad (2003 \cdot 美国)$$

证明：因为 a、b、$c \in \mathbf{R}_+$，由柯西不等式知

$$\sqrt{\frac{2a^2 + \frac{(b + c)^2}{2} + \frac{(b + c)^2}{2}}{3}}$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}(b + c) + \frac{\sqrt{2}}{2}(b + c)}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(a + b + c)}{3}.$$

故 $2a^2 + (b + c)^2 \geqslant \dfrac{2(a + b + c)^2}{3}$.

同理，$2b^2 + (c + a)^2 \geqslant \dfrac{2(a + b + c)^2}{3}$,

$2c^2 + (a + b)^2 \geqslant \dfrac{2(a + b + c)^2}{3}$.

若 $4a \geqslant b + c, 4b \geqslant c + a, 4c \geqslant a + b$, ①

则 $\dfrac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2}$

$$= 2 + \frac{(4a - b - c)(b + c)}{2a^2 + (b + c)^2}$$

$$\leqslant 2 + \frac{3(4ab + 4ac - b^2 - 2bc - c^2)}{2(a + b + c)^2}.$$

同理，$\dfrac{(2b + c + a)^2}{2b^2 + (c + a)^2} \leqslant 2 + \dfrac{3(4bc + 4ba - a^2 - 2ac - c^2)}{2(a + b + c)^2}$, $\dfrac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \leqslant 2 + \dfrac{3(4ca + 4cb - a^2 - 2ab - b^2)}{2(a + b + c)^2}$.

三式相加得

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$$

$$\leqslant 6+\frac{3(6ab+6bc+6ca-2a^2-2b^2-2c^2)}{2(a+b+c)^2}$$

$$=6+\frac{3[3(a+b+c)^2-5a^2-5b^2-5c^2]}{2(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{21}{2}-\frac{15}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\leqslant\frac{21}{2}-\frac{15}{2}\times\frac{1}{3}=8.$$

若①不成立，不妨设 $4a<b+c$. 则

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}<2.$$

由柯西不等式得

$$(b+b+(c+a))^2$$

$$\leqslant(b^2+b^2+(c+a)^2)(1+1+1),$$

故 $\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}\leqslant 3$.

同理，$\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 3$.

所以 $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}<8$.

综上可知，原不等式成立，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

16. 设 n 为正整数，实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$.

(a) 证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2.$$

(b) 证明：上式等号成立的充分必要条件是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为等差数列. (2003 · IMO)

证明：(a) 由于将 x_i 作变换(都减去某一定值)，不等式两边不变，不失一般性，设 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，则

$$\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)=2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i.$$

由柯西不等式有

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant 4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$
$$=4\frac{n(n+1)(n-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

另一方面，

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j+n\sum_{j=1}^{n}x_j^2=2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

所以，$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2$

$$\leqslant\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2.$$

(b) 若等号成立，则存在某个 k，$x_i=k(2i-n-1)$，$i=1,2,\cdots,n$. 从而 $\{x_i\}$ 为等差数列.

反之，设 $\{x_i\}$ 的公差为 d，则 $x_i=\frac{d}{2}(2i-n-1)+\frac{x_1+x_n}{2}$.

将 $x_i-\frac{x_1+x_n}{2}$ 变换成 x'_i，则 $x'_i=\frac{d}{2}(2i-n-1)$，$\sum_{i=1}^{n}x'_i=0$，且等号成立.

17. 数列 $\{a_n\}$ 按如下方式构成：$a_1=p$，其中 p 是质数，且 p 恰有 300 位数字非 0，而 a_{n+1} 是 $\frac{1}{a_n}$ 的十进制小数表达式中的一个循环节的 2 倍. 试求 a_{2003}. (2003 · 俄罗斯)

解：$a_{2003}=10p$.

假设 $\frac{1}{n}$ 的十进制小数表达式中开始循环之前的部分 A 由 m 位数字构成，而(最小)循环节 B 由 k 位数字构成，由等比数列求和公式得

$$\frac{1}{n}=\frac{A}{10^m}+\frac{B}{10^m(10^k-1)}=\frac{A(10^k-1)+B}{10^m(10^k-1)}.$$

于是有 $n\mid 10^m(10^k-1)$.

反之，如果 m 和 k 是使得关系 $n\mid 10^m(10^k-1)$ 成立的最小正整数(即 m 是可以整除 n 的 2 和 5 的最大方幂的指数，而 k 是使得 $\frac{n}{(n,10^m)}\Big|(10^k-1)$ 成立的最小的正整数)，记

$$C=\frac{10^m(10^k-1)}{n},A=\left[\frac{C}{10^k-1}\right],$$
$B=C-A(10^k-1)$.

则有 $B<10^k-1$，$A<10^m$，并且 $\frac{1}{n}$ 的十进制小数表达式中开始循环之前的部分就是 A(包括在其前面添加一些 0，使其达到 m 位数字)，而(最小)循环节就是 B(类似地添加 0)，因

此 m 和 k 都是按照最小原则选取的.

由题意可知 $p\neq 2,p\neq 5$,并且在 p 的十进制表达式中不可能全是 1 和 0.因为如果全是 1 和 0,那么它的各位数字之和等于 300,从而不是质数.

下面证明数列$\{a_n\}$的周期为 2.我们熟知,真分数$\frac{1}{p}$的循环节为$\frac{10^t-1}{p}$,其中 t 是使得 $p\mid(10^t-1)$ 成立的最小正整数.因此 $a_2=\frac{2(10^t-1)}{p}$.再证 $a_3=10p$.由于 a_2 能被 2 整除,不能被 2^2 和 5 整除,所以真分数$\frac{1}{a_2}$的循环节等于$\frac{10^{u+1}-10}{a_2}$,其中 u 是使得 $a_2=\frac{2(10^t-1)}{p}\Big|(10^{u+1}-10)$ 成立的最小正整数.在这里,有 $A=0$(因为 a_2 能被 18 整除,所以 $a_2>10$,于是 $B=C$).这样一来,u 就是使得

$$(10^t-1)\mid(10^u-1)p \qquad ①$$

成立的最小正整数.我们证明此时必有 $u=t$.

首先证明 $u\mid t$.若 $u\nmid t$,不妨设 $t=uq+r$,其中 $0<r<u$.因为$(10^u-1)p$ 整除$(10^{uq}-1)p$,则由 ① 可得

$$(10^t-1)\mid[(10^t-1)p-(10^{uq}-1)p],$$

即$(10^t-1)\mid 10^{uq}(10^r-1)p$.

从而$(10^t-1)\mid(10^r-1)p$.而这是不可能的,因为 u 是使得 ① 成立的最小正整数.所以 $t=ul$,并且$(10^{ul}-1)\mid(10^u-1)p$.由此得出 p 能被$[10^{u(l-1)}+10^{u(l-2)}+\cdots+10^u+1]$整除.但 p 是质数,若 $l\neq 1$,则必有 $p=10^{u(l-1)}+10^{u(l-2)}+\cdots+10^u+1$.然而前面已经证明,$p$ 不可能具有这样的表达式,矛盾.从而 $t=u$,这也就表明 $a_3=\frac{2(10^{t+1}-10)}{a_2}=10p$.

最后只需指出$\frac{1}{p}$与$\frac{1}{10p}$的循环节是相同的.

18. 设 a,b,c 为正数,它们的和等于 1,证明:$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geqslant\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$.

(2003・俄罗斯)

证明:解法 1:由不等式$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{x+y}$,其中 $x>0,y>0$,可以得到

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{4}{a+2b+c},$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{4}{b+2c+a},$$

$$\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{4}{c+2a+b}.$$

将上述三个不等式相加,得到

$$\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geqslant\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{b+2c+a}+\frac{4}{c+2a+b}.$$

将条件 $a+b+c=1$ 代入并化简,即得所证.

解法 2:不失一般性,设 $a\geqslant b\geqslant c$,于是 $1-c^2\geqslant 1-b^2\geqslant 1-a^2$.

从而$\frac{1}{1-a^2}\geqslant\frac{1}{1-b^2}\geqslant\frac{1}{1-c^2}$.

注意到$\frac{1}{1-a}-\frac{2}{1+a}=\frac{3a-1}{1-a^2}$,故只须证明$\frac{3a-1}{1-a^2}+\frac{3b-1}{1-b^2}+\frac{3c-1}{1-c^2}\geqslant 0.$ ①

由于式 ① 左边三个分式的分子之和等于 0,所以在不增大各个分数值的前提下,可将它们的分母变为相等.易知在 $a\geqslant b\geqslant c$ 的假定下,有 $a\geqslant\frac{1}{3},c\leqslant\frac{1}{3}$.如果 $a\geqslant b\geqslant\frac{1}{3}\geqslant c$,那么只要将不等式 ① 左边三个分式的分母都换为 $1-c^2$,即可保证其中的负分数的值不变,且正分数的值不增大,从而式 ① 成立;如果 $a\geqslant\frac{1}{3}\geqslant b\geqslant c$,那么只要将式 ① 左端三个分式的分母都换为 $1-b^2$,即可保证其中的一个负分数的值不变,另一个负分数只可能减小,且正分数的值不增大,从而式 ① 成立.

19. 给定两个系数为非负整数的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$,其中 $f(x)$ 的最大系数为 m.现知对于某两个正整数 $a<b$,有 $f(a)=g(a)$ 和 $f(b)=g(b)$,证明:如果 $b>m$,则多项式 f 与 g 恒等.

(2003・俄罗斯)

证明:假设 f 不与 g 恒等,设

$$f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0,$$

$$g(x)=d_kx^k+d_{k-1}x^{k-1}+\cdots+d_1x+d_0.$$

由于$0\leqslant c_i\leqslant m<b$,故在$b$进制之下,$f(b)$就是$\overline{c_nc_{n-1}\cdots c_1c_0}$.如果多项式 g 的各项系数也

都不超过b，那么由$f(b)=g(b)$和b进制表达式的唯一性可知多项式f与g的各项系数相等，从而f与g恒等.

假设i是使得$d_i>b$的最小下角标，则$d_i=bq+r$. 对于多项式g_1，它是将多项式g中的系数d_i换为r，d_{i+1}换为$d_{i+1}+q$，并保持其余系数不变的多项式，易知$g_1(b)=g(b)$.

又$d_ia^i+d_{i+1}a^{i+1}=(bq+r)a^i+d_{i+1}a^{i+1}>(aq+r)a^i+d_{i+1}a^{i+1}=ra^i+(d_{i+1}+q)a^{i+1}$，所以$g_1(a)<g(a)$. 再继续对下一个$i$作同样的讨论，如此一直进行下去. 由于每一次$i$至少增加1，且永远不会超过$k$，所以至多进行$k$次这样的讨论，就可以得到多项式$g_j$，它的各项系数都是不超过$b$的非负整数. 由$g_j(b)=g(b)$和$b$进制表达式的唯一性可知多项式$f$与$g_j$恒等. 但这是不可能的，因为$f(a)=g(a)>g_j(a)$，由此得到矛盾.

20. 三角形的三边之长是某个系数为有理数的三次方程的根，证明：该三角形的高是某个系数为有理数的六次方程的根.

(2003·俄罗斯)

证明：设三角形的三边长分别为a、b、c. 由多项式系数的有理性，可以认为它是既约的，即有$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-Ax^2+Bx-C$(由题意和韦达定理知)，亦即$2p=a+b+c=A\in\mathbf{Q}$,

$ab+bc+ca=B\in\mathbf{Q}$，$abc=C\in\mathbf{Q}$.

记三角形的面积为S，有

$$\frac{S^2}{p}=f(p)$$

$$\Rightarrow S^2=p(p^3-Ap^2+Bp-C)\in\mathbf{Q}.$$

又由$h_a=\frac{2S}{a}$，$h_b=\frac{2S}{b}$，$h_c=\frac{2S}{c}$推知h_a、h_b、h_c是方程$\left(x^2-\frac{4S^2}{a^2}\right)\left(x^2-\frac{4S^2}{b^2}\right)\left(x^2-\frac{4S^2}{c^2}\right)=0$的根. 从而$\frac{4S^2}{a^2}+\frac{4S^2}{b^2}+\frac{4S^2}{c^2}$

$$=\frac{4S^2}{C^2}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$

$$=\frac{4S^2}{C^2}(B^2-2AC),$$

$$\frac{16S^4}{a^2b^2}+\frac{16S^4}{b^2c^2}+\frac{16S^4}{c^2a^2}=\frac{16(S^2)^2}{C^2}(A^2-2B),$$

$$\frac{16S^6}{a^2b^2c^2}=\frac{16(S^2)^3}{C^2}.$$

21. 试求出所有的实系数多项式$P(x)$，使得对满足$ab+bc+ca=0$的所有实数a,b,c，都有$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$.

解：对任给的$a,b,c\in\mathbf{R}$，满足$ab+bc+ca=0$，有$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$. ①

在式①中，令$a=b=c=0$，有$P(0)=0$.

令$b=c=0$，对任给实数a，有$P(-a)=P(a)$.

因此$P(x)$的所有奇次项系数为0. 不妨设$P(x)=a_nx^{2n}+\cdots+a_1x^2+a_0$，$a_n\neq0$.

在式①中，令$b=2a$，$c=-\frac{2}{3}a$，有

$$P(-a)+P\left(\frac{8}{3}a\right)+P\left(-\frac{5}{3}a\right)=2P\left(\frac{7}{3}a\right).$$

故$a_n\left[1+\left(\frac{8}{3}\right)^{2n}+\left(\frac{5}{3}\right)^{2n}-2\left(\frac{7}{3}\right)^{2n}\right]a^{2n}+\cdots+a_1\left[1+\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2-2\left(\frac{7}{3}\right)^2\right]a^2+a_0=0$.

上式对所有$a\in\mathbf{R}$成立，故关于a的多项式的所有系数均为0.

当$n\geqslant3$时，由$8^6=262144>235298=2\times7^6$可知$\left(\frac{8}{7}\right)^{2n}\geqslant\left(\frac{8}{7}\right)^6>2$.

从而$1+\left(\frac{8}{3}\right)^{2n}+\left(\frac{5}{3}\right)^{2n}-2\left(\frac{7}{3}\right)^{2n}>0$.

因此$n\leqslant2$.

设$P(x)=\alpha x^4+\beta x^2$，$\alpha$、$\beta\in\mathbf{R}$.

下面验证$P(x)=\alpha x^4+\beta x^2$满足要求.

设a、b、$c\in\mathbf{R}$，$ab+bc+ca=0$，则

$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4-2(a+b+c)^4=\sum(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)-2(a^2+b^2+c^2)^2=\sum(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)-2a^4-2b^4-2c^4-4a^2b^2-4a^2c^2-4b^2c^2=\sum(-4a^3b+2a^2b^2-4ab^3)=-4a^2(ab+ca)-4b^2(bc+ab)-4c^2(ca+bc)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4a^2bc+4b^2ca+4c^2ab+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2=2(ab+bc+ca)^2=0$;

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(a+b+c)^2$

$= \sum(a^2-2ab+b^2)-2\sum a^2-4\sum ab=0.$

其中，$\sum$ 表示循环和.

因此 $P(x)=\alpha x^4+\beta x^2$ 满足要求.

22. 设 $n(n\geqslant 3)$ 为整数，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 为正实数，且满足

$$n^2+1>(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right).$$

证明：对满足 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$ 的所有整数 $i、j、k$ 为正实数 $t_i、t_j、t_k$ 总能构成三角形的三边长.

(2004 • IMO)

证明：假设 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 中有三个不能构成三角形的三边长，不妨设为 t_1,t_2,t_3，且 $t_1+t_2\leqslant t_3$. 因为 $(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)$

$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)+n$$

$$=\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1}+\frac{t_2}{t_3}+\frac{t_3}{t_2}+\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\(i,j)\notin\{(1,3),(2,3)\}}}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)+n$$

$$\geqslant\frac{t_1+t_2}{t_3}+t_3\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)+\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\(i,j)\notin\{(1,3),(2,3)\}}}(2+n)$$

$$\geqslant\frac{t_1+t_2}{t_3}+\frac{4t_3}{t_1+t_2}+2(C_n^2-2)+n$$

$$=4\frac{t_3}{t_1+t_2}+\frac{t_1+t_2}{t_3}+n^2-4, \qquad ①$$

设 $x=\frac{t_3}{t_1+t_2}$，则 $x\geqslant 1$，

$$4x+\frac{1}{x}-5=\frac{(x-1)(4x-1)}{x}\geqslant 0,$$

由式 ① 得

$$(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)\geqslant 5+n^2-4=n^2+1,$$

矛盾.

所以假设不成立，故原命题成立.

注：由平均值不等式得

$$\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)(t_1+t_2)\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{t_1t_2}}\cdot 2\sqrt{t_1t_2}=4.$$

故 $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\geqslant\frac{4}{t_1+t_2}$.

23. 设 x,y,z 是大于 -1 的实数，证明：

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geqslant 2.$$

(2003 • 巴尔干)

证明：由已知得 $1+x^2,1+y^2,1+z^2,1+y+z^2,1+z+x^2,1+x+y^2$ 均大于 0.

由柯西不等式，得

$$\left(\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\right)\cdot[(1+x^2)(1+y+z^2)+(1+y^2)(1+z+x^2)+(1+z^2)(1+x+y^2)]\geqslant(1+x^2+1+y^2+1+z^2)^2.$$

故 $\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}$

$$\geqslant\frac{(x^2+y^2+z^2+3)^2}{(1+x^2)(1+y+z^2)+(1+y^2)(1+z+x^2)+(1+z^2)(1+x+y^2)}$$

$$=\frac{x^4+y^4+z^4+9+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2+6x^2+6y^2+6z^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2+y^2+z^2)+x^2y+y^2z+z^2x+x+y+z+3}$$

$$=2+\frac{x^4+y^4+z^4+3+2x^2+2y^2+2z^2-2(x^2y+y^2z+z^2x+x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2+y^2+z^2)+x^2y+y^2z+z^2x+x+y+z+3}$$

$$=2+\frac{(x^2-y)^2+(y^2-z)^2+(z^2-x)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2+y^2+z^2)+x^2y+y^2z+z^2x+x+y+z+3}$$

$$\geqslant 2.$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时，上式等号成立.

24. 设 a,b,c,d,e,f 是实数，且多项式 $P(x)=x^8-4x^7+7x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ 能分解为 8 个线性因式 $x-x_i$，其中 $x_i>0$，$i=1,2,\cdots,8$. 求 f 的所有可能值.

(2003 • 亚太)

解：因为 $\sum_{i=1}^{8}x_i=4$，$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 8}x_ix_j=7$，所以

$$\sum_{i=1}^{8}x_i^2=\left(\sum_{i=1}^{8}x_i\right)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 8}x_ix_j=2.$$

又因为 $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}x_i^2}{8}}\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{8}x_i}{8}$，即 $\sqrt{\frac{2}{8}}\geqslant\frac{4}{8}$.

取等号，所以 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=x_7=x_8=\frac{1}{2}$.

因此 $f=\prod_{i=1}^{8}x_i=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}$.

25. 设 a,b,c 是一个三角形的三条边的边长，且 $a+b+c=1$. 若整数 $n\geqslant 2$，证明：

$$\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

(2003 • 亚太)

证明：设 $a\geqslant b\geqslant c>0$.