

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材



船舶结构力学

CHUANBO JIEGOU LIXUE

舒恒煜 谭林森

华中科技大学出版社

封面设计：俞纭丽

ISBN 7-5609-0821-7



9 787560 908212 >

定价：30.00元

ISBN 7-5609-0821-7/U · 10

船舶结构力学

舒恒煜 谭林森

华中科技大学出版社

船舶结构力学

舒恒煜 谭林森

责任编辑 叶见欣

*
华中科技大学出版社出版发行
(武昌喻家山, 邮政编码 430074)

*
新华书店湖北发行所经销
华工制冷欧美亚经营部

*
开本: 787×1092 1/16 印张: 18.5 字数: 446 000

1993年8月第1版 2006年11月第2次印刷

ISBN 7-5609-0821-7/U·10

定价: 30.00元

船舶类书目

- 工程流体力学
- 流体力学习题解析
- 不可压缩边界层理论
- 振动测试技术
- 船舶建筑美学
- 兴波阻力理论及其在船型设计中的应用
- 快艇动力学
- 平头涡尾船型原理与设计
- 内燃机排气净化
- 内燃机燃烧学
- 有限元法在内燃机工程中的应用
- 船舶内燃机结构
- 内燃机原理

李国钧等
周谟塘等
夏国泽
张维衡等
刘启国
程天柱等
董祖舜
薛中川
崔心存等
全国林
陈国华
黄言华
刘永长

内 容 简 介

本书研究的主要对象是船体结构中的杆件、杆系和板的弯曲及稳定性，对薄壁杆件的扭转也作了一定的介绍。书中系统地阐述了结构力学中的基本理论与方法——力法、位移法及能量原理。用了较大篇幅叙述了矩阵位移法和有限单元法及其在船体结构强度计算中的应用。通过本书的学习，不但可以应用结构力学中的基本理论和方法解决船体结构中典型构件的强度计算，而且可以解决一般工程结构中类似的力学问题。

本书可作为高等院校船舶设计与制造专业和船舶结构力学专业教学用书，也可供一般工程力学专业的学生和工程技术人员参考。

前 言

本书为船舶设计与制造专业和船舶结构力学专业教材,计划学时为 90 学时。也可供一般工程力学专业的学生和技术人员,作为参考书。

结构力学中的经典理论和方法是力法、位移法和能量原理。这是本书的基本内容。把它们放在前面几章进行了集中和系统地论述。在对它们的内容取舍上,不只是局限于解决船体结构中杆系和板的弯曲与稳定问题,还着眼于能够处理一般工程结构中类似的力学问题。在论述了基本理论和方法的基础上,考虑到电子计算机的普遍使用,并能便于在微机上解题,本书对杆系矩阵位移法进行了较大篇幅的论述,同时为介绍有限单元法作准备。

有限单元法在结构力学领域中已获得了广泛应用,今后还将会有更大的发展,因此,本书把有限单元法放在平面应力问题一章中作为重要内容进行了论述。这样做既是从现实的角度,知识的更新来考虑这个问题,也是从发展的眼光来看待这个问题的。有限单元法的发展为结构力学注入了新的活力。它已成为结构力学教材不可缺少的重要组成部分。对于有限单元法,不只是为了一般性的论述,而且主要着眼于应用。

本书的编写还注意了知识的衔接和避免重复,对材料力学已讲过的内容不再重复论述,只引用结论,尽量简洁,该加强的尽量加强,如能量原理一章,为便于对其概念的理解,编入了变分法概念一节,作为加强的内容。

本书每章后面附有少量的习题,书后还附有附录及参考文献,以便于查阅。

本书的出版得到了本校各级领导、同事以及兄弟院校同行专家的热情支持和帮助,在此表示衷心感谢。

由于水平有限,本书一定有不少缺点,希望广大读者提出宝贵意见。

编者

1992 年 5 月于武汉

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1-1 船舶结构力学的内容与任务	(1)
§ 1-2 船体结构的计算图形	(2)
第二章 单跨梁的弯曲理论	(6)
§ 2-1 梁的弯曲微分方程式及其通解	(6)
§ 2-2 梁的支座和边界条件	(9)
§ 2-3 梁的弯曲要素表及其应用	(15)
§ 2-4 梁的复杂弯曲	(17)
§ 2-5 弹性基础梁的弯曲	(24)
习题	(29)
第三章 力法	(31)
§ 3-1 超静定结构的组成与超静定次数的确定	(31)
§ 3-2 力法的基本原理及典型方程	(33)
§ 3-3 刚性支座上连续梁与不可动节点简单刚架计算	(35)
§ 3-4 弹性支座与弹性固定端的实际概念	(40)
§ 3-5 弹性支座上连续梁计算	(44)
§ 3-6 简单板架计算	(50)
习题	(51)
第四章 矩阵位移法	(54)
§ 4-1 位移法	(54)
§ 4-2 矩阵位移法概述	(61)
§ 4-3 杆元分析	(63)
§ 4-4 编号约定与杆元定位向量	(68)
§ 4-5 坐标转换	(70)
§ 4-6 整体装配	(73)
§ 4-7 弹性约束、强迫位移处理	(81)
§ 4-8 杆元内力与支反力计算、矩阵位移法小结	(85)
§ 4-9 肋骨刚架及板架计算	(86)
习题	(100)
第五章 能量原理	(102)
§ 5-1 应变能和余能	(102)
§ 5-2 变分法概念	(110)
§ 5-3 虚位移原理及其应用	(114)
§ 5-4 虚力原理及其应用	(121)
§ 5-5 李兹法	(131)
习题	(135)
第六章 平面应力问题的有限单元法	(137)
§ 6-1 平面应力问题及其基本方程式	(137)

§ 6-2	解题方法及有限单元法概念	(142)
§ 6-3	常应变三角形单元(CST)	(145)
§ 6-4	等剪应力矩形单元(CSSR)	(149)
§ 6-5	单元载荷向节点的移置	(154)
§ 6-6	有限单元法计算模型的刚度矩阵及节点外载荷向量	(157)
§ 6-7	有限单元法的解题过程	(158)
§ 6-8	等参数单元概念	(168)
习题		(171)
第七章 薄板的弯曲理论		(173)
§ 7-1	概述	(173)
§ 7-2	矩形薄板的筒形弯曲	(175)
§ 7-3	薄板小挠度弯曲理论	(183)
§ 7-4	矩形薄板小挠度弯曲问题的解法	(189)
习题		(201)
第八章 杆及板的稳定性		(203)
§ 8-1	基本概念	(203)
§ 8-2	单跨压杆的稳定性	(204)
§ 8-3	多跨压杆的稳定性	(213)
§ 8-4	简单甲板板架的稳定性	(217)
§ 8-5	板的中性平衡微分方程式及其解	(225)
§ 8-6	板稳定性的能量解法	(230)
§ 8-7	板失稳后的性能和极限强度	(235)
习题		(240)
第九章 薄壁杆件扭转		(243)
§ 9-1	基本概念	(243)
§ 9-2	薄壁杆件的自由扭转	(244)
§ 9-3	薄壁杆件自由扭转时截面的翘曲	(248)
§ 9-4	开口薄壁杆件约束扭转	(251)
§ 9-5	闭口薄壁杆件约束扭转	(257)
习题		(261)
附录		(263)
附录 A	单跨梁的弯曲要素表	(263)
附录 B	单跨梁复杂弯曲的弯曲要素表及辅助函数	(271)
附录 C	船用球扁钢断面要素	(276)
附录 D	矩形平板的弯曲要素	(277)
附录 E	在中间弹性支座上连续压杆的稳定性曲线及数值表	(279)
附录 F	矩形板的稳定性计算公式	(282)
习题答案		(283)
参考文献		(286)

第一章 绪 论

§ 1-1 船舶结构力学的内容与任务

船舶是复杂的水上工程建筑物,担负着航运、生产、战斗及其他各项任务。由于船舶经常在航行状态下工作,它所受到的外力是相当复杂的。这些外力包括船的各种载重(静载荷)、水压力、冲击力以及运动产生的惯性力(动载荷)等。为了保证船舶在各种受力情况下都能正常工作,船舶应具有一定的强度。所谓具有一定的强度是指船体结构在正常的使用过程和一定的年限内具有不破坏或不发生过大变形的能力。

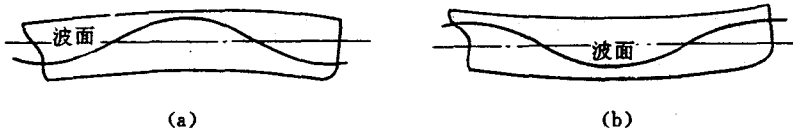


图 1-1

船体强度所包括的内容是相当广泛的。首先是其总纵强度,人们通过分析船体受力和变形的主要特征,认识到可把船舶整体当作一根空心薄壁梁,静置于波浪上(图 1-1a 所示的称为“中拱状态”;图 1-1b 所示的称为“中垂状态”),来计算船体在沿纵向分布的重力和浮力作用下的弯曲变形和应力。这种把船舶整体当作空心薄壁梁计算出来的强度就称为船体的总纵强度。然后是其局部强度,它是指船体的横向构件(如横梁、肋骨及肋板等)以及船体的局部构件(如船底板、底纵桁等)在局部载荷作用下的强度(图 1-2、图 1-3)。再就是其稳定问题,即船体中受压构件可能因受压过度而丧失稳定性,例如,对于图 1-1b 所示的中垂状态,其上甲板常常会因受压过度而丧失稳定性。还有,船在波浪上航行时,船体将可能发生扭转,此即船体的扭转强度问题;甲板的长大舱口角隅处可能发生严重的应力集中现象,此即应力集中问题;船体在运动的波浪上的外力计算,船体的振动,船体的低周期疲劳等,都是船体强度的内容。

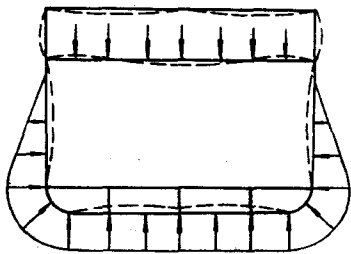


图 1-2

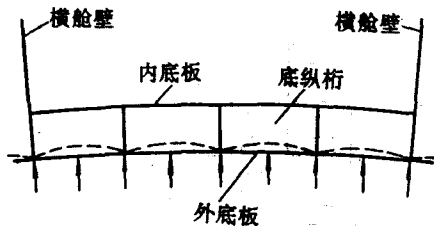


图 1-3

总之,船体强度所研究的问题通常包括外力,结构在外力作用下的响应,即内力与变形,以及许用应力的确定等一系列问题。船舶结构力学只研究船体结构的静力响应,即内力与变形,

以及受压结构的稳定性问题,因此,船舶结构力学的首要任务是阐明结构力学的基本原理与方法,即阐明经典的力法、位移法及能量原理,然后应用它们解决船舶结构力学所要研究的问题。此外,由于有限单元法在结构力学中已获得广泛应用,利用这种现代分析方法可使得结构计算更切合实际,更加精确,以致许多人工无法计算的复杂结构都可应用有限单元法在电子计算机上进行计算,所以,本课程还要阐明有限单元法的基本原理及其在船体结构计算中的应用,以及使读者初步了解并学会使用大型结构分析程序——SAP5。

学习本课程应着重掌握结构力学的基本原理与方法,因它们具有一定的普遍意义。船舶设计与制造是一个综合性很强的行业,除了船体结构本身的强度问题外,还有其他许多结构的强度问题,都可应用结构力学的基本原理与方法去解决。所以,学习本课程不要仅仅满足于会计算船体结构中一些典型构件(如连续梁、刚架、板架、板),还应学会解决一般工程结构的计算问题。

最后,学习本课程将为“船体强度和结构设计”及“船体振动学”两门课程打下基础。

§ 1-2 船体结构的计算图形

为了便于分析在外力作用下结构内力与变形或稳定性,一般来说,在分析前首先都要对实际结构作一些简化,建立分析模型,然后采用适当的方法进行计算。船体结构是由板和骨架等构件组成的空间复杂结构,在进行结构计算之前需要对实际的船体结构加以简化。简化后的结构图形称为实际结构的理想化图形或计算图形(又称计算模型或力学模型等)。

结构的计算图形是根据实际结构的受力特征,构件之间的相互影响,计算精度的要求以及所采用的计算方法,计算工具等因素确定的。因此,对于同一个实际结构,基于不同的考虑就会得出不同的计算图形,就是说,对于同一个实际结构,其计算图形不是唯一的,一成不变的。下面对船体结构计算中一些常见的、典型的计算图形作一简要介绍。

首先是船体结构中的板,板是与船体的纵、横骨架相连接的,且通常被纵、横骨架划分成许多矩形的板格。例如对于纵骨架式船体,其甲板板就被甲板纵桁、纵骨和横梁划分成许多矩形的板格(图 1-4a)。若要确定甲板板在甲板载荷作用下所产生的弯曲应力与变形,则可把甲板板简化为四边刚性固定的矩形板,然后计算其在甲板载荷 q 作用下的弯曲应力和变形。其计算图形如图 1-4b 所示。因为纵、横骨架的抗弯刚度比板的抗弯刚度大得多,故可把骨架近似地作

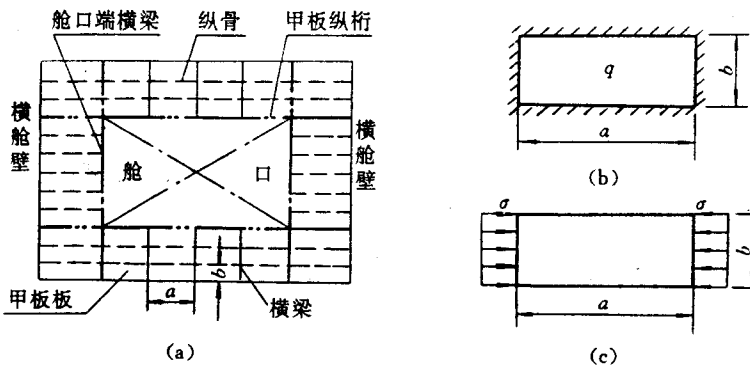


图 1-4

为矩形板格的刚性支撑。又因为许多矩形板格尺寸都相同,在均匀的甲板载荷 q 作用下这些矩形板格的弯曲变形几乎是对称于这些骨架的,因此可认为板格弯曲时,在矩形周界处转角为零。若要研究船在中垂状态下纵骨架式甲板板的稳定性,则可以把甲板板简化为四边自由支持一对边受压的矩形板来计算(图 1-4c)。这里为了使甲板板受压稳定性计算偏于安全,采用了比较弱的边界条件,即忽略了纵、横骨架的抗扭刚度对板稳定性的有利影响。

其次是船体结构中的骨架,船体中的骨架无外乎是横向构件——横梁、肋骨、肋板和纵向构件——纵骨、纵桁等。它们大都是细长的型钢或组合型材,故称为“杆件”或简称为“杆”。实践证明,船体中的骨架受力变形时,和骨架相连的一部分板始终会与骨架一起变形,不可分割。因此,在研究骨架时就把与骨架相连的一部分板

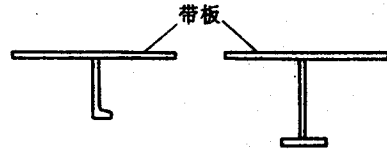
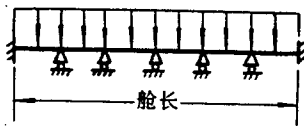
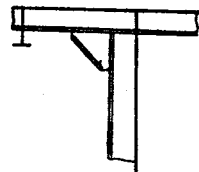


图 1-5

连同骨架一起考虑,于是骨架将有如图 1-5 所示的截面形状,与骨架相连的那一部分板叫做骨架的“带板”。根据我国钢船建造规范中的规定,骨架的带板宽度取骨架的间距和骨架跨距的 $\frac{1}{5}$ 这两者中的小者。就整个船体来说,船体的骨架系统是一个复杂的空间杆系结构。在实际计算时,尤其是采用经典方法计算时,常常把杆件系统简化成一些形状比较规则的简单的计算图形,例如,在计算甲板纵骨(图 1-4a)在垂直于甲板的载荷作用下的弯曲应力与变形时,可将其取为图 1-6a 所示的计算图形——两端刚性固定、中间自由支持在刚性支座上的连续梁。因为在甲板骨架中纵骨的尺寸最小,它穿过横梁并通过横舱壁在纵向保持连续,故强横梁有足够的刚性支持纵骨,可作为纵骨的刚性支座。纵骨穿过横舱壁时,通常要与横舱壁上的垂直扶强材相连接,且有肋板加强(图 1-6b),所以,横舱壁可作为它的刚性固定端。又如,在计算图 1-4a 所示的甲板纵桁和舱口端横梁在垂直于甲板载荷作用下的弯曲应力和变形时,可将其取为图 1-7a 所示的井字型平面杆系计算图形。因为甲板纵桁与舱口端横梁尺寸较其他构件大,故计算

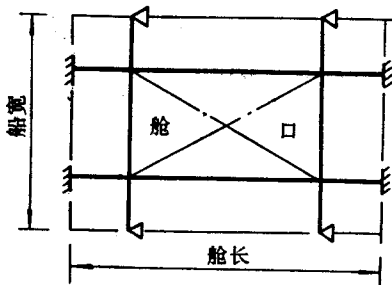


(a)

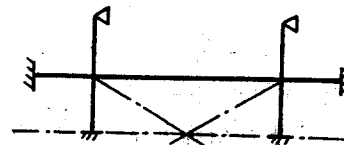


(b)

图 1-6



(a)



(b)

图 1-7

时可忽略其他骨架对它们的影响。如果在舱口端横梁中点处有支柱或设有半舱壁,则又可将其简化为图 1-7b 所示的计算图形。图 1-7 所示的杆系在垂直于杆系平面的载荷作用下发生弯曲,这种杆系称为“交叉梁系”或称“板架”。实际上,船体结构中的板架应该是指由板与纵、横骨架所组成的板、梁组合结构。由于过去受计算方法的限制,把它们大都按交叉梁系来计算,所以把“交叉梁系”和“板架”这两个含义不同的名词等同了起来。

再次是处于船体横剖面内的横梁、肋骨及船底肋板。它们共同组成一个平面杆系,是保证船体横向强度的主要构件。由于杆系中各杆互相刚性连接,并受到杆系平面内的载荷作用,故称这种杆系为“刚架”或“肋骨框架”。图 1-8a 所示的为双甲板船在舱口处横剖面的肋骨框架计算图形,图中肋骨与横梁的交点以及肋骨与肋板的交点应分别位于船侧板与甲板的交界处,以及船侧板与船底的交界处。由于在实际情况下交点处不会发生线位移,故在该处加上不可动支座;横梁在舱口处的刚性支座表示舱口纵桁的刚性支持。考虑到实际船体结构中肋板的尺寸远较肋骨的大,所以计算时可将肋骨下端作为刚性固定端,而把肋板放到船底骨架中去研究,这样就得到仅由横梁与肋骨组成的刚架(图 1-8b)。

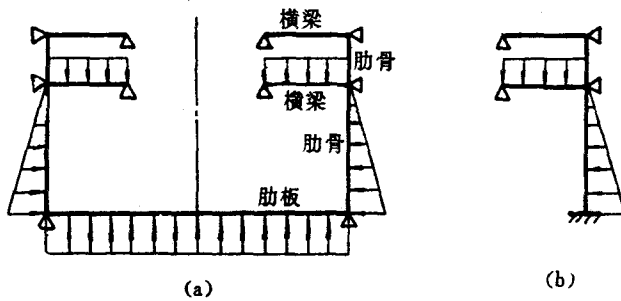


图 1-8

以上介绍的矩形板、连续梁、板架和刚架是船体结构中比较典型而且比较简单的计算图形,应用结构力学中的经典理论和方法,并由人工计算就能得到结果。但应该注意到这些计算图形具有一定的近似性。例如,在肋骨框架计算图形(图 1-8)中,认为舱口纵桁(甲板纵桁)可作为横梁(舱口悬臂梁)的刚性支撑,事实上并非如此,因为舱口纵桁与舱口悬臂梁的截面尺寸是差不多的。又如,在连续梁计算图形(图 1-6)中,认为横梁是绝对刚性的,这不是事实。图 1-7 中,为计算舱口纵桁和舱口端横梁,忽略了图 1-4a 中与其尺寸差不多的悬臂梁以及纵骨,显然这种计算图形是比较粗糙的。

从 20 世纪 50 年代开始,随着电子计算机的发展,促进了计算方法的更新和发展,以前许多人工无法计算的问题现在都可应用电子计算机来解决。因此,就可采用更切合实际的计算图形,使得结构计算更加精确可靠。例如,放弃舱口纵桁刚性支撑悬臂梁的假定,而采用图 1-9 所示的更切合实际的空间杆系计算图形,同时算出甲板纵桁、舱口端梁、悬臂梁及肋骨的应力

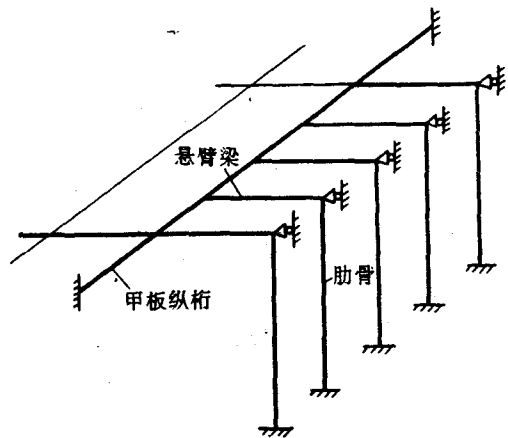


图 1-9

与变形。又如,对于甲板结构,不再人为地把骨架与板分开考虑,直接计算图 1-4a 所示的板、梁的组合结构。对于船体立体舱段结构乃至整条船结构,都可应用有限单元法在电子计算机上进行计算。

但是这并不排除学习经典理论的必要性和重要性。因为现代分析方法是在经典理论的基础上发展起来的,它们有着密切的联系。学习经典理论对学习现代分析方法将大有益处。

本书本着由浅入深、由特殊到一般的认识规律来阐述船舶结构力学所要解决的问题及其基本理论和方法。先结合讨论杆及杆系的强度问题讲述力法、位移法、矩阵法和能量法;再讨论板的强度问题,并介绍有限单元分析方法;最后讨论杆系和板的稳定性及薄壁杆件的扭转。

第二章 单跨梁的弯曲理论

受外荷重作用而发生弯曲的杆件叫做梁。仅在梁的两端有支座的梁称为单跨梁。悬臂梁是单跨梁的一种特殊情形。

船体骨架是复杂的杆件系统。在大多数情况下,骨架在外荷重作用下将发生弯曲变形,因而组成骨架的各杆件都可看作梁。以后将会看到,在分析杆件系统时总是要根据一定的法则把它们拆开为一根一根杆件来进行分析,每一根杆件都是单跨梁。

梁的弯曲理论的基本内容在材料力学中已经阐明,本章在此基础上作一些补充,以满足船舶结构计算的需要。

§ 2-1 梁的弯曲微分方程式及其通解

1. 梁的弯曲微分方程式

现考虑一单跨直梁(图 2-1),假定此梁有一对称平面 xoy ,并规定 x 轴在梁的中性层上,向右为正, y 轴向下为正。 z 轴与 x, y 轴组成右手直角坐标系。梁弯曲时 x 轴上点的垂向位移 v 叫做梁的挠度, $v(x)$ 叫做梁的挠曲线。梁在弯曲变形过程中,梁的横截面对其原来位置所转过的角度 θ ,称为该横截面的转角。在图 2-1 所示的坐标系中,规定梁向下(沿 y 轴方向)的挠度为正;顺时针方向(绕 z 轴方向)的转角为正,反之为负。

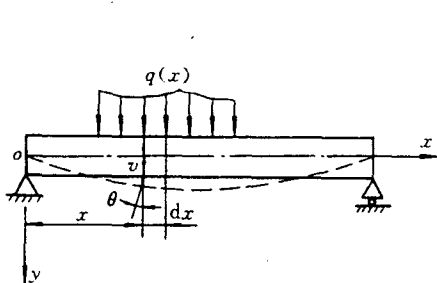


图 2-1

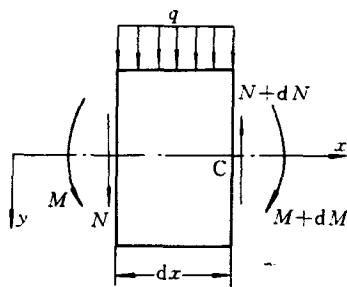


图 2-2

从梁中取出微段 dx ,并将其放大如图 2-2 所示。微段上作用有分布外载荷 q ,整个微段上的外载荷为 $q dx$,微段左截面上作用有弯矩 M 和剪力 N ,右截面上作用有弯矩 $M+dM$ 和剪力 $N+dN$ 。在图示坐标系下,规定左截面上的弯矩逆时针方向为正,右截面上的弯矩顺时针方向为正;左截面上的剪力向下为正,右截面上的剪力向上为正。并且规定外载荷向下为正。由于图 2-1 所示的梁处于平衡状态,故取出的微段 dx 也应处于平衡状态。根据该微段的平衡条件 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum M_c = 0$,可得

$$\frac{dN}{dx} = q \quad (2-1)$$

$$\frac{dM}{dx} = N \quad (2-2)$$

在材料力学中对于梁的纯弯曲,曾经导出关系式:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2-3)$$

式中, E ——材料弹性模量; I ——梁截面对 z 轴的惯性矩; $\frac{1}{\rho}$ ——梁轴线弯曲变形后的曲率。在横力弯曲情形下,弯矩和剪力都将引起梁的弯曲变形,但如果梁的跨度大于横截面高度的 10 倍时,剪力引起的梁的弯曲变形很小,可以忽略不计。因此,公式(2-3)仍可在横力弯曲中应用。

在小变形下,梁的挠曲线是一平坦的平面曲线,因而曲率 $\frac{1}{\rho}$ 可由下面的近似公式求出:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} = v'' \quad (2-4)$$

利用式(2-1)~(2-4),就可导出梁的弯曲微分方程式。由式(2-3)、(2-4),得

$$EIv'' = M \quad (2-5)$$

将式(2-5)代入式(2-2),得

$$EIv''' = N \quad (2-6)$$

再将式(2-6)代入式(2-1),得

$$EIv^{(4)} = q \quad (2-7)$$

式中, $v^{(4)}$ —— v 对 x 的四阶导数。

式(2-7)就是等截面直梁的弯曲微分方程式。

2. 梁的弯曲微分方程式的通解,初参数法

等截面直梁的弯曲微分方程式(2-7)是一个很简单的常微分方程,通过四次积分就能得出其通解。逐次积分式(2-7),可得

$$EIv''' = \int_0^x q dx - C_1 = N \quad (a)$$

$$EIv'' = \int_0^x \int_0^x q dx^2 + C_1x + C_2 = M \quad (b)$$

$$v' = \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x \int_0^x q dx^3 + \frac{C_1x^2}{2EI} + \frac{C_2x}{EI} + C_3 = \theta \quad (c)$$

$$v = \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q dx^4 + \frac{C_1x^3}{6EI} + \frac{C_2x^2}{2EI} + C_3x + C_4 \quad (d)$$

式中, C_1, C_2, C_3, C_4 —— 积分常数。式(d)就是微分方程式(2-7)的通解。

今后把梁的弯矩 M 、剪力 N 、横截面转角 θ 及挠度 v 称为梁的弯曲要素。梁左端($x=0$)处的弯曲要素 v_0, θ_0, M_0 及 N_0 称为初始弯曲要素,或简称为初参数。当 $x=0$ 时由式(a)、(b)、(c)、(d)可得出: $C_1 = N_0, C_2 = M_0, C_3 = \theta_0, C_4 = v_0$ 。可见,积分常数 C_1, C_2, C_3, C_4 就是梁的初参数。于是通解式(d)可用梁的初参数表示成

$$v = v_0 + \theta_0x + \frac{M_0x^2}{2EI} + \frac{N_0x^3}{6EI} + \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q dx^4 \quad (e)$$

下面对通解(e)作一些讨论,从而得出梁的挠曲线通用方程式。很明显,通解(e)的等号右边第一、二、三、四项分别代表由初参数 v_0, θ_0, M_0 及 N_0 引起的梁的挠度,而最后一项代表由分布荷重 $q(x)$ 引起的梁的挠度。如果梁上没有分布荷重作用,则通解变为

$$v = v_0 + \theta_0x + \frac{M_0x^2}{2EI} + \frac{N_0x^3}{6EI} \quad (f)$$

这说明,梁的挠度取决于梁端四个初参数。现应用这个概念讨论有集中力作用的梁(图 2-3a)。

设想把梁分为两段： $0 \leq x \leq b$ 为第一段， $b \leq x \leq l$ 为第二段。并把集中力 P 看作是作用在第二段起始点上的力。对于第一段，其通解显然可用式 (f) 表示。由材料力学知，在梁上集中力作用处，其左右两侧横截面上的剪力值会有突变，突变的数值就等于集中力的值。图 2-3b 所示的为梁在集中力 P 作用下的剪力图。剪力图也可画成如图 2-3c 所示的，这样集中力 P 就可看成是从第二段起始点 ($\bar{x}=0$) 开始作用的“附加剪力”。因此，梁的挠度表示式从第一段过渡到第二段时应增加一项 $P\bar{x}^3/6EI$ ，其中 \bar{x} 是自第二段起始点算起的坐标，它与坐标 x 的关系为 $\bar{x}=x-b$ 。于是在集中力作用下的梁的挠度表示式 (通解) 可写成

$$v = v_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI} + \frac{N_0 x^3}{6EI} + \left\| \int_b \frac{P(x-b)^3}{6EI} \right. \quad (g)$$

式中， $0 \leq x \leq l$

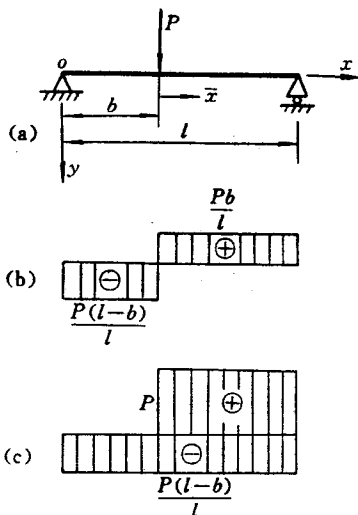


图 2-3

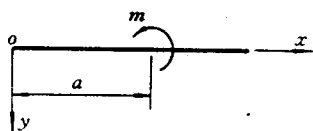


图 2-4

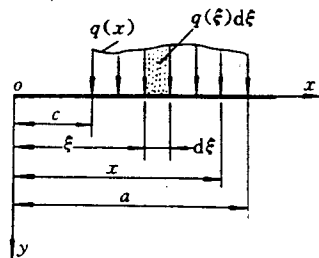


图 2-5

在最后一项前面加了符号 $\left\| \int_b \right.$ ，它表示此项仅在 $x > b$ 时才起作用。如果在梁上 $x=a$ 处作用有一集中外力矩 m (图 2-4)，则通过类同的分析，可知梁的挠度表示式在 $x > a$ 后应增加一项 $\left\| \int_a \frac{m(x-a)^2}{2EI} \right.$ 。如果在梁上 $c \leq x \leq d$ 范围内作用有分布荷重 $q(x)$ (图 2-5)，则可把分布力的作用看作是无穷多个集中力 $q(\xi)d\xi$ 之和，于是梁的挠度表示式在 $x > c$ 之后应增加一项

$$\left\| \int_c \int_c^x \frac{q(\xi)d\xi}{6EI} (x-\xi)^3 \right.$$

当然，当 $x > d$ 后上式中积分上限应为 d 。综上所述，对于在各种荷重共同作用下的梁 (图 2-6)，其挠度 (通解) 可表示为

$$v = v_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI} + \frac{N_0 x^3}{6EI} + \left\| \int_a \frac{m(x-a)^2}{2EI} \right. \\ + \left\| \int_b \frac{P(x-b)^3}{6EI} \right. + \left\| \int_c \int_c^x \frac{q(\xi)}{6EI} (x-\xi)^3 d\xi \right.$$

(2-8)

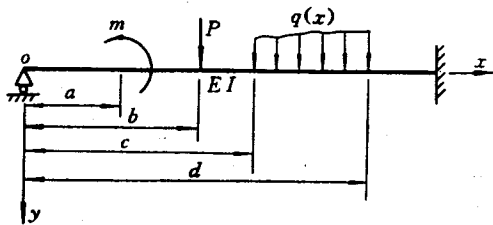


图 2-6