理论物理导论

程建春 编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书简要阐述了理论物理的重要概念、原理和方法.选择内容适当、互相贯通,构成比较系统、全面的理论物理教学体系.全书由经典力学、电动力学、量子力学、热力学和统计力学四大部分组成,每部分6章,共24章.

本书可供理工科非物理专业本科高年级学生和研究生作为教材和教学参考书,适合于材料科学、电子工程、化学理论、自动控制等需要较深物理知识的专业.

图书在版编目(CIP)数据

理论物理导论/程建春编著.—北京:科学出版社,2007

ISBN 978-7-03-018554-9

Ⅰ.理… Ⅱ.程… Ⅲ.理论物理学-高等学校-教材 Ⅳ.O41

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第019865号

责任编辑:胡 凯 / 责任校对:郑金红
责任印制:赵德静 / 封面设计:王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007年4月第一次印刷 印张:32
印数:1—3 000 字数:613 000

定价:68.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈明辉〉)

前　言

本书是为理工科非物理专业本科高年级学生和研究生编写的，适合材料科学、电子工程、理论化学、自动控制等需要较深物理知识的专业. 编写一年课程的理论物理教材的困难在于：理论物理内容实在太丰富了，它包括四大力学——经典力学、电动力学、量子力学、热力学和统计力学，而经典力学中又可以包括质点和质点组力学、弹性力学、流体力学和分析力学. 内容的选择是本书是否成功的关键.

本书虽名为《理论物理导论》，但通过在内容选择和方法讲述上下工夫，既基本保持了物理专业本科理论物理课程的水平，又适应了非物理专业的学时要求. 比如，在牛顿力学中，我们完全放弃了运动学的内容，引力场理论也完全放弃；在电动力学中，放弃了静电势求解方法的内容；在电磁波的散射方面，放弃了标量衍射理论，而代之以光子晶体理论；在统计力学中，基本放弃了非平衡态统计理论. 诸如此类.

编写本书的原则有下列五个方面.

1. 作为单独的课程，四大力学都已经有成熟和完整的体系，我们没有必要去建立新的课程体系. 因此本书完全按经典力学、电动力学、量子力学和热力学与统计力学四大部分来编写.

2. 本书包含了四大力学的基本内容，对新发展的理论和方法没有过多涉及，如量子干涉和重正化群等. 这主要是由本书的性质决定的，在导论性课程中，把基本的内容讲透、学透就可以了，没有必要用新的东西来点缀.

3. 四大力学不是完全独立的，而是相互交融的. 事实上，物理学的每一个分支都存在内在的联系. 之所以分成四大力学，应该理解为：这仅仅是为了讲述的方便. 就理论物理课程而言，Hamilton 力学是基础.

4. 理论物理与普通物理的主要区别不在于物理概念，而是理论物理更注重用数学方法表述物理概念，从基本原理出发，通过逻辑推理和数学推导，建立起整个物理学体系. 因此，本书不可能不涉及到数学推导，而且为了方便学习，推导过程尽量详细.

5. 通过学习本书，首先是要掌握整个理论物理的框架和体系，其次是了解各部分的组成，最后才是理解理论物理的数学和逻辑推理方法.

本书的出版得到南京大学“985 工程”的资助.

目 录

第一部分 经典力学

第三部分 量 子 力 学

第四部分 热力学和统计力学

第一部分
经典力学

第 1 章　牛 顿 力 学

经典力学是研究低速运动物体(即速度远小于光速($v \ll c$))和宏观粒子(即约化 Planck 常量可近似为零($\hbar \to 0$))的机械运动规律的力学. 它区别于研究粒子高速运动的狭义相对论(第 11 章)和研究微观粒子的量子理论(第 13 章). 牛顿力学是经典力学的基础,它是牛顿在前人的科学成果基础上以及通过自己长期的观察、实验和研究作出的科学总结. 一切宏观、低速运动物体的机械运动都可以用牛顿力学来解决,所以牛顿力学在经典力学中占有非常重要的地位.

本章主要介绍牛顿力学的基本内容,包括质点和质点组动力学、非惯性参考系中质点和质点组的动力学.

1.1　质点动力学:动量、角动量和动能定理

质点的动力学规律由牛顿运动三定律描述.

第一定律:任何物体(质点)如果没有受到其他物体的作用都将保持静止或匀速直线运动状态. 物体在不受其他物体作用时保持运动状态不变的这种性质叫**惯性**,是物质的一种固有属性,所以牛顿第一运动定律又叫**惯性定律**;

第二定律:当物体(质点)受到外力作用时,该物体所获得的加速度与外力成正比,与物体本身的质量成反比,加速度的方向与外力的方向一致,即

$$ma = \boldsymbol{F} \tag{1.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 为质点上的**合外力**(包括主动力和约束反力),表示物体之间的相互作用,m 为质点的质量(称为**惯性质量**),是物体惯性大小的量度,$\boldsymbol{a}$ 为质点的加速度;

第三定律:当物体 A 对物体 B 有一个作用力 $\boldsymbol{F}$ 时,物体 B 对物体 A 也有一个反作用力,且为 $-\boldsymbol{F}$,即作用力与反作用力大小相等,但方向相反.

研究物体的运动时,首先要选定参考系. 在牛顿力学中,参考系不能任意选择. 牛顿运动三定律成立的参考系叫**惯性参考系**. 一个参考系是不是惯性参考系,依靠实验来决定. 实验表明:地球上的物体相对于地球的运动并不完全遵守牛顿运动定律,所以地球不是惯性参考系. 但是,如果把地球当惯性参考系,引起的偏差一般比较小,因此常常可以把地球看做近似程度相当好的惯性参考系. 但在要求精度很高的问题中,就不能把地球当作惯性参考系了. 人们发现,以太阳为原点,以指向任一恒星的直线为坐标轴形成的参考系,在这个参考系内,所观察到的许多天文现象与牛顿运动定律和万有引力定律推出的结论符合较好,因此这个参考系是一个精度

很高的惯性参考系.

力学相对性原理:一个相对于惯性参考系作匀速直线运动的参考系,它的内部所发生的一切力学过程,都不受这个参考系本身匀速直线运动的影响,或者说,不能通过任何力学实验来判断这样的参考系是静止还是作匀速直线运动. 因此相对于惯性参考系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性参考系. 力学相对性原理又叫**伽利略相对性原理**. 在狭义相对论中,Einstein 推广了伽利略相当性原理,称为 Einstein **相对性原理**,即一切惯性参考系对所有的物理过程(包括电磁过程)都是等价的. 以后我们再讨论 Einstein 相对性原理.

下面对牛顿运动定律作一个简单的说明.

1. 方程(1.1.1)表明,加速度矢量与合力矢量的方向一致. 这一结论表示:几个不同力作用的加速度按**线性方式叠加**,它是经典动力学的基础,称为力**的独立作用原理,即作用于质点的每一个力所产生的力学效应与其他力无关**. 在经典力学中,由于质点的运动速度远小于光速,力的作用即时传递,每个力的作用完全独立、互不相干.

2. 不能认为方程(1.1.1)是力函数 $\boldsymbol{F}$ 的定义. 事实上,我们用 m 来描述物体的惯性,用 $\boldsymbol{a}$ 来描述物体的运动,而用 $\boldsymbol{F}$ 来描述物体与周围其他物体的相互作用,它们三者之间存在着方程(1.1.1)的关系.

3. 当 $\boldsymbol{F}=0$ 时,$\boldsymbol{a}=0$,似乎可以得到第一定律的数学表达式,但第一定律的根本意义在于定义了物体的惯性,因此第一定律是独立于第二定律的.

4. 牛顿第三定律并不是自然界的一个普适定律,物理学中有些力并不符合这个定律. 第三定律仅在下述情况才能适用:即一个物体作用于另一个物体上的力是沿着两物体的连线方向,这种力称为**有心力**或**中心力**. 任何与相互作用物体速度有关的力,具有非中心力性质,第三定律不适用这种情况,例如运动电荷间的作用力不遵从第三定律.

力的基本类型:就我们现在的认识水平而言,自然界中存在的力基本可以分为四种,即万有引力、电磁力、弱力和强力. 万有引力存在于一切质量不为零的物体之间,是人们最早认识的力(牛顿早在 17 世纪就建立了万有引力理论). 电磁力是由静止或运动的电荷产生的力,它几乎是所有宏观力的根源,如各种材料的内部张力、弹性力、分子间的结合力、物体与物体之间的摩擦力,都是电磁相互作用形成的. 弱力存在于基本粒子之间,其强度只有电磁力的 $1/10^{12}$,作用距离约为 10^{-15} cm,只相当于原子半径的 $1/10^{7}$. 强力是核子之间的相互作用力,原子核稳定存在就是因为强相互作用力,它的作用距离约为 10^{-13} cm. 因此,弱力和强力是短程相互作用,而万有引力和电磁力是长程相互作用. 在本课程中,我们只考虑万有引力和电磁力,主要考虑电磁相互作用.

牛顿第二定律是一个二阶常微分方程,用位置矢量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 表示,即为

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t) \tag{1.1.2}$$

注意：力 $\boldsymbol{F}$ 一般是位置矢量、速度矢量和时间的函数. 写成分量的形式，在三维直角坐标下即为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \tag{1.1.3}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \tag{1.1.4}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t) \tag{1.1.5}$$

以上三个方程都是二阶常微分方程，有 6 个积分常数，它们由粒子的初始位置和初始速度（称为初始条件）决定. 注意：初始速度给定了粒子的运动趋向，而初始位置反映了粒子的历史，二者完全决定了粒子 t 时刻的运动轨道.

如果质点受到某种约束，例如被限制在某曲线或曲面上运动，则质点为非自由质点. 此时，该曲线或曲面称为**约束**，而该曲线或曲面的方程称为约束方程. 对非自由质点的运动，一般是将约束去除而代之以**约束反作用力**（简称**约束反力**），从而把它看成是自由质点. 约束反力一般是未知的，与普通力不同，它不完全取决于约束本身，而与作用在质点上的其他力以及质点的运动状态等有关，而且单靠约束反力本身，并不能引起质点的任何运动. 所以称约束反力为**被动力**，不是约束反力的那些力称为**主动力**. 约束反力通常作用在质点与曲线或曲面的接触点上，在无摩擦的情况下，它沿着曲线或曲面的法向. 令 $\boldsymbol{F}$ 为主动力，$\boldsymbol{R}$ 为约束反力，则质点运动的方程为

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R} \tag{1.1.6}$$

既然 $\boldsymbol{R}$ 未知，显然上式的分量方程少于未知数目，所以还要加上约束方程才能求解. 第 5 章我们再讨论具有约束的质点动力学问题.

例 1.1.1 求平面极坐标中的牛顿运动方程.

解： 在平面极坐标中，位置矢量、速度矢量（如图 1.1.1）和加速度矢量的表达式为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r;\quad \boldsymbol{v}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r+r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt};\quad \boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \tag{1.1.7}$$

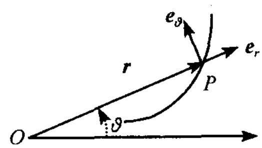

图 1.1.1 平面极坐标

其中 $\boldsymbol{e}_r$ 为径向单位矢量，又由关系

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}=\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_r}{d\vartheta}=\frac{d\vartheta}{dt}\boldsymbol{e}_\vartheta;\quad \frac{d\boldsymbol{e}_\vartheta}{dt}=\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_\vartheta}{d\vartheta}=-\frac{d\vartheta}{dt}\boldsymbol{e}_r$$

可以得到

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\vartheta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\vartheta}+2\dot{r}\dot{\vartheta})\boldsymbol{e}_\vartheta \tag{1.1.8}$$

因此在平面极坐标下，牛顿运动方程为

$$m(\ddot{r}-r\dot{\vartheta}^2)=F_r(r,\vartheta;\dot{r},\dot{\vartheta};t)$$
$$m(r\ddot{\vartheta}+2\dot{r}\dot{\vartheta})=F_\vartheta(r,\vartheta;\dot{r},\dot{\vartheta};t) \tag{1.1.9}$$

动量定理:当质点的质量为常数时,牛顿运动方程(1.1.1)可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F} \tag{1.1.10}$$

其中矢量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ 称为质点的**动量**(线动量). 因此牛顿第二定律可描述成:**质点动量的时间变化率正比作用在质点上的力**. 上式又称为**动量定理**,积分形式为

$$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t\equiv\boldsymbol{I} \tag{1.1.11}$$

其中矢量 $\boldsymbol{I}$ 称为质点的冲量,通常称为**冲量定理**. 当 $\boldsymbol{F}=0$, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0$,即**动量守恒**.

角动量定理:当质点作曲线运动时,可以定义力矢量和动量矢量对空间某点或某轴线的矩,对问题的简化是有意义的. 力矢量 $\boldsymbol{F}$ 对空间某点 $\boldsymbol{r}$ 的**力矩**定义为

$$\boldsymbol{M}\equiv\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1.1.12}$$

其分量形式为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$
$$=(yF_z-zF_y)\boldsymbol{e}_x+(zF_x-xF_z)\boldsymbol{e}_y+(xF_y-yF_x)\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.13}$$

其中 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 为直角坐标系的单位矢量. 同样,动量矢量 $\boldsymbol{p}$ 对空间某点 $\boldsymbol{r}$ 的矩定义为

$$\boldsymbol{J}\equiv\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{1.1.14}$$

称为**动量矩**,或**角动量**. 由式(1.1.10)两边叉乘 $\boldsymbol{r}$ 得到

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1.1.15}$$

注意到

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{p}$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})-m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.16}$$

因此我们得到**动量矩定理**,或**角动量定理**

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M} \tag{1.1.17}$$

对上式积分,可以得到**冲量矩定理**

$$\boldsymbol{J}-\boldsymbol{J}_0=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{M}\mathrm{d}t \tag{1.1.18}$$

当 $\boldsymbol{M}=0$ 时,$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_0$,即**动量矩守恒**,或**角动量守恒**. 注意:动量矢量或角动量矢量有

可能不守恒,但某个分量完全可能守恒.

例 1.1.2 质点所受的力恒通过某一个定点,证明质点在一个平面上运动.

解: 这样的力称为**有心力**.取这个定点为坐标系的原点,则力 $\boldsymbol{F}$ 与位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 共线,$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=0$,因此角动量守恒:$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{C}$($\boldsymbol{C}$ 为常矢量),即

$$\begin{aligned} m(y\dot{z}-z\dot{y}) &= C_1 \\ m(z\dot{x}-x\dot{z}) &= C_2 \\ m(x\dot{y}-y\dot{x}) &= C_3 \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

用 x,y 和 z 分别乘第一个、第二个和第三个方程并相加得

$$C_1x+C_2y+C_3z=0 \tag{1.1.20}$$

由解析几何知,这是一个通过原点的平面,质点只能在这个平面上运动.

动能定理:根据牛顿第二定律可以导出动能定理.由方程(1.1.2),两边点乘速度矢量得到

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.1.21}$$

即

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.22}$$

上式两边乘 $\mathrm{d}t$ 并利用 $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\mathrm{d}(v^2/2)$,得到

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.1.23}$$

标量 $T\equiv mv^2/2$ 称为质点的**动能**.因此质点动能的微分等于外力 $\boldsymbol{F}$ 做的元功 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,这一结论称为质点的**动能定理**.对(1.1.23)积分

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z \tag{1.1.24}$$

上式表明:质点在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下从 $\boldsymbol{r}_0$ 运动到 $\boldsymbol{r}$,如果 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的夹角 $\vartheta<90°$,则力做正功,$v^2>v_0^2$,质点的动能增加;反之,如果 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的夹角 $\vartheta>90°$,则力做负功,$v^2<v_0^2$,质点的动能减少.

例 1.1.3 一质点在力 $\boldsymbol{F}=4y\boldsymbol{e}_x+2x\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 作用下沿一螺旋线

$$x=4\cos\vartheta,\quad y=4\sin\vartheta,\quad z=2\vartheta \tag{1.1.25}$$

从 $\vartheta=0$ 运动到 $\vartheta=2\pi$,求此力做的功.

解: 该力做功为

$$\begin{aligned} W &= \int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int 4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}[16\sin\vartheta\cdot(-4\sin\vartheta)+8\cos\vartheta\cdot 4\cos\vartheta+2]\mathrm{d}\vartheta \\ &= -28\pi \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

显然该力做负功.

1.2　保守力场、有心力和运动的稳定性

保守力场:力函数一般与空间、时间和质点的速度有关. 当力只与空间有关,即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y,z)$时,称为**稳定力场**. 力场对质点做的功为线积分

$$W=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z \tag{1.2.1}$$

一般 W 与积分路线有关,当 W 只与初始和终点位置有关时,这样的力场称为**保守力场**. 例如:引力场、电荷周围的场、弹性力场等都是保守力场,但电流周围的磁场是非保守力场. 由数学分析,保守力场可以用标量函数 $U(x,y,z)$来表示,即存在 $U(x,y,z)$,使

$$\boldsymbol{F}=-\nabla U(x,y,z) \tag{1.2.2}$$

函数 $U(x,y,z)$称为**势函数**. 显然保守力场的旋度为零,即$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$,故保守力场是无旋的. 对保守力场,方程(1.1.24)变成

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2&=-\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z\\&=-[U(x,y,z)-U(x_0,y_0,z_0)]\\&=-(U-U_0)\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

即质点的**机械能守恒**

$$\frac{1}{2}mv^2+U=\frac{1}{2}mv_0^2+U_0\equiv E \tag{1.2.4}$$

这就是**机械能守恒定律**. E 称为**总机械能**,它是动能 T 和势能 U 之和.

对一维的保守力,机械能守恒定律为

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)=E \tag{1.2.5}$$

即

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]} \tag{1.2.6}$$

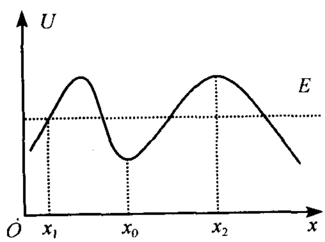

图 1.2.1　总能量和势能曲线

因此,质点不可能在 $E<U(x)$的区域运动,如图1.2.1,当质点从左边入射,运动到 x_1 点时,质点被反射回去,不可能穿过势垒. 这是经典力学的结论,但在量子力学中,质点可以穿过势垒,这一现象称为**隧道效应**,我们将在第 13 章讨论.

显然,当质点处于平衡状态时

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0;\quad\frac{\partial U}{\partial y}=0;\quad\frac{\partial U}{\partial z}=0 \tag{1.2.7}$$

故平衡点是势函数的极值点. 当极值点是极小时,平衡是稳定的(如图 1.2.1 的 x_0 点);而当极值点是极大时,平衡不稳定(如图 1.2.1 的 x_2 点). 故稳定平衡的条件可以写为 $\Delta U>0$,即

$$\delta U = 0; \quad \delta^2 U > 0 \tag{1.2.8}$$

例 1.2.1 质量为 m 的粒子在势函数为

$$U(x) = \frac{cx}{x^2 + a^2} \tag{1.2.9a}$$

的保守力场中运动,其中 $c>0,a>0$ 为常数. 求稳定平衡点的位置及在稳定平衡点附近作小振动的角频率.

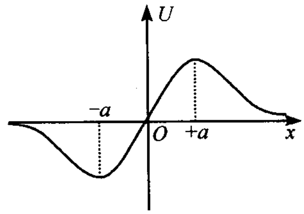

图 1.2.2 势函数曲线

解: 势函数形状如图 1.2.2,平衡点位置满足

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{c(a^2 - x^2)}{(x^2 + a^2)^2} = 0 \tag{1.2.9b}$$

故存在两个平衡点

$$x_1 = a; \quad x_2 = -a \tag{1.2.9c}$$

由稳定条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_1=a} = -\frac{c}{2a^3} < 0; \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_2=-a} = \frac{c}{2a^3} > 0 \tag{1.2.9d}$$

故 $x_1=a$ 是不稳定平衡点,而 $x_2=-a$ 是稳定平衡点. 如图 1.2.2 也可见,右边是极大点,左边是极小点. 在平衡点附近,令 $x=-a+x'$,作用力

$$f(x') = -\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-a+x'} = -\frac{c(2ax' - x'^2)}{(x'^2 - 2ax' + 2a^2)^2} \approx -\frac{cx'}{2a^3}$$

故振动角频率为

$$\omega = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{c}{2ma}} \tag{1.2.10}$$

有心力场:下面讨论质点在有心力场中的运动. 由例 1.1.2,质点在平面内运动,故用平面极坐标. 设有心力为

$$\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{e}_r \tag{1.2.11}$$

其中吸引力 $F(r)<0$,排斥力 $F(r)>0$. 运动方程为

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) &= F(r) \\ m(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}) &= 0 \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

第二式可以改写成

$$m\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\vartheta}) = 0 \tag{1.2.13}$$

即 $mr^2\dot{\vartheta}=h'$(h'为常量),显然这表示角动量守恒,与例 1.1.2 的结论是一致的. 可以证明 $\boldsymbol{F}=F(r)\boldsymbol{e}_r$ 是保守力. 事实上,因为