教育科学“十五”国家规划课题研究成果

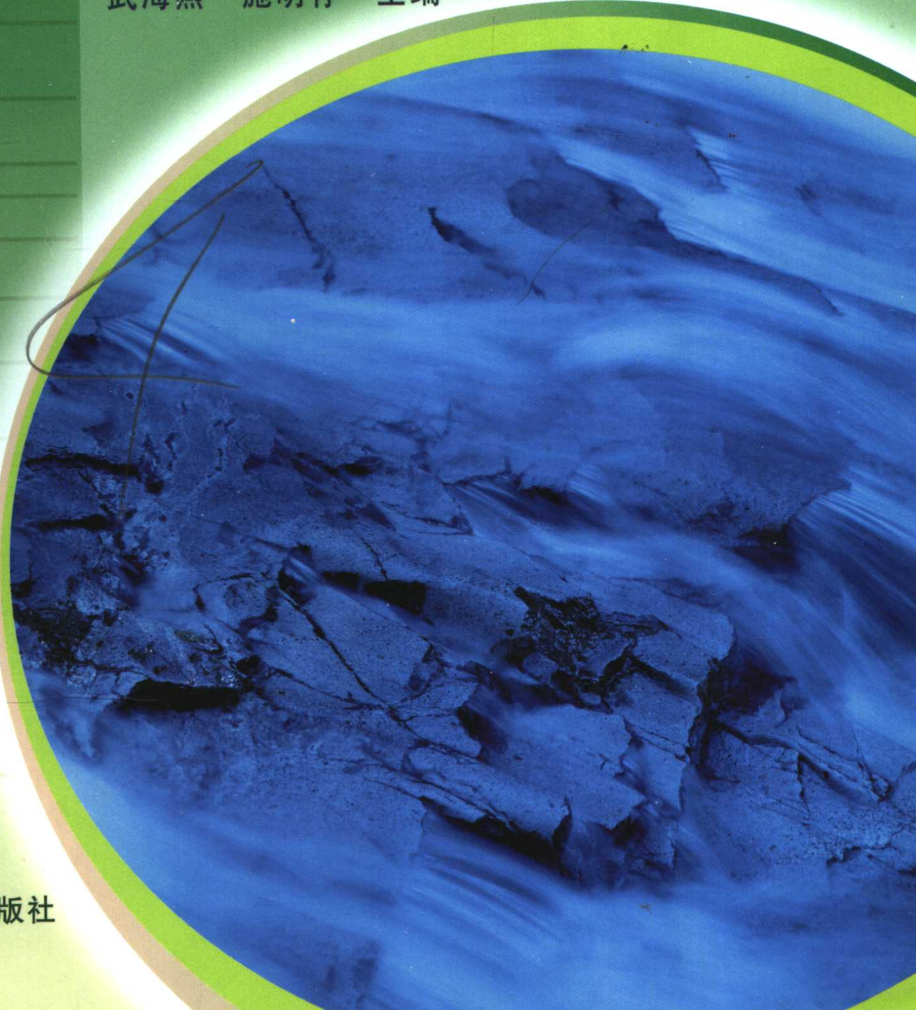
高等学校经济管理学科数学基础系列辅导书

●总主编 陈文灯 杜之韩

概率论与数理统计

同步辅导

武海燕　施明存　主编



高等教育出版社

教育科学"十五"国家规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础系列辅导书

总主编　陈文灯　杜之韩

概率论与数理统计同步辅导

武海燕　施明存　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是与陈文灯、杜之韩任总主编的高等学校经济管理学科数学基础系列教材《概率论与数理统计》(教育科学“十五”国家规划课题研究成果)相配套的教学参考书。本书共有八章内容：随机事件与概率，随机变量及其概率分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验。每章内容包括基本概念、定理和公式，典型题型讲解与训练和考研试题精选三部分，紧扣教材，使学生在掌握基础知识的同时，提高解题能力。

本书可作为高等学校经济管理类专业教学辅导书，也是有志进一步深造的学生的一本非常好的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导/陈文灯，杜之韩总主编；武海燕，施明存分册主编.—北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-022593-8

Ⅰ.概…　Ⅱ.①陈…②杜…③武…④施…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 176943 号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 李　陶　**封面设计** 张申申　**责任绘图** 宗小梅
版式设计 王艳红　**责任校对** 殷　然　**责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷集团有限责任公司印刷二厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	9.75	印　　次	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	170 000	定　　价	10.90 元

物料号　22593-00

前　言

本书是与陈文灯、杜之韩任总主编的高等学校经济管理学科数学基础系列教材《概率论与数理统计》(教育科学"十五"国家规划课题研究成果)相配套的教学参考书。由于《概率论与数理统计》概念、定理、性质繁多，再现率低，且受教学学时和教材篇幅限制，教材不能详尽展开讲解，例题也偏少，这就更增加了同学们学习的困难，尤其做习题往往感到无从下手。为此，我们在归纳十多年教学经验和考研培训的基础上编写了这本书，相信对同学们的学习会有所帮助。

本书紧扣《概率论与数理统计》教材，按教材章节顺序编排，共分八章。本书特点：

一、对基本概念、基本理论进行剖析，并通过例题对重要概念、定理和公式加以强化讲解，使同学们吃透其中的精髓。

二、列举了很多比较新颖的例子来说明解题的方法和技巧，以打开同学们的思路和眼界。

三、在每个章节之后，编排了具有启发意义的综合题，帮助同学们把各个知识点串联起来，使知识学得更活、更扎实。

四、我们在练习题中选录了与考研相关的试题，可以使学生在刚接触概率论与数理统计时，就对考研数学的试题有所了解，一方面培养他们对数学的兴趣，另一方面又可以激励他们的创造性。

五、每个题型之后，编排了"活学活用"栏目，可以通过练习对所学方法及时消化吸收，巩固所学知识。

本书适用于本科阶段同步学习和考研备考学生的复习。

本书成书仓促，错误和疏漏之处在所难免，恳请数学界同仁和读者予以指正。

编者

2007年6月

目　　录

第一章

随机事件与概率

§1.1 基本概念、定理和公式

一、基本概念和性质

1. 随机事件

(1) 随机试验　概率论中将满足下面三个条件的试验称为随机试验(简称试验):

① 可在相同的条件下重复进行;

② 每次试验的结果不止一个;

③ 试验之前不能确定哪一个结果会发生，但所有的结果是明确可知的.

(2) 样本空间: 随机试验的所有可能结果所组成的集合称为样本空间，常记为 Ω, Ω 中的元素称为样本点，常用 ω 表示.

(3) 随机事件: 样本空间的子集，即随机试验的结果称为随机事件，简称为事件.

(4) 基本事件: 一个样本点组成的单点集，称为基本事件.

(5) 必然事件: 每次试验中一定会发生的事件，用 Ω 表示.

(6) 不可能事件: 每次试验中一定不发生的事件，用 $\varnothing$ 表示.

【例 1.1】 写出下列随机试验的样本空间及相应的事件.

(1) 同时掷两颗骰子，记录其出现的点数之和，$A=\{$点数之和为偶数$\}$.

(2) 一个盒子中有 10 个相同的球，其中 5 个是白色的，另外 5 个是黑色的，现搅匀后从中任意摸取一球. $A=\{$摸取白球$\}$，$B=\{$摸取黑球$\}$.

(3) 记录电话交换台一个小时内接到的交换次数，$A=\{$交换次数为奇数$\}$.

【解】 (1) $\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\}$，$A=\{2,4,6,8,10,12\}$

(2) 令 $\omega_1=\{$取得白球$\}$，$\omega_2=\{$取得黑球$\}$，则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，$A=\{\omega_1\}$，

$B=\{\omega_2\}$.

(3) $\Omega=\{0$ 次, 1 次, 2 次, 3 次, $\cdots\}$; $A=\{1$ 次, 3 次, 5 次, $\cdots\}$.

2. 事件之间的关系与运算

(1) 事件的包含：若事件 A 发生必然会导致事件 B 发生，则称事件 B 包含 A，记为：

$$B\supset A.$$

(2) 事件相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$，即

$$A=B\Leftrightarrow A\subset B,\ B\subset A.$$

(3) 事件 A 与 B 的并(或和)：$A+B$(或 $A\cup B$)，表示 A，B 至少有一个发生.

(4) 事件 A 与 B 的差：$A-B$，表示 A 发生而 B 不发生.

(5) 事件 A 与 B 的积(或交)：AB(或 $A\cap B$)，表示 A，B 同时发生.

(6) 互不相容(或互斥)事件：事件 A，B 满足 $AB=\varnothing$.

【注】 在一次试验中，基本事件都是两两互斥的.

(7) 对立事件：若 $A+B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则 A，B 为对立事件，且 $\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$.

【注】 对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

(8) 事件的运算律：

① 交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$；

② 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$；

③ 分配律：$(A+B)C=AC+BC$，

$$(A+B)(A+C)=AA+AC+BA+BC=A+BC.$$

④ 德摩根律：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}.$$

【注】 $A-B=A\overline{B}$.

【例 1.2】 从一批产品中任取两件，观察其中的合格品数，记

$A=\{$两件产品都是合格品$\}$，$B_i=\{$第 i 件是合格品$\}$，$i=1$，2，试用 B_1、B_2 表示 A，$\overline{A}$?

【解】 显然 $A=B_1B_2$，下面分析 $\overline{A}$.

方法一：由 $\overline{A}$ 的本质涵义，$\overline{A}=\{$至少有一件是不合格品$\}$，所以 $\overline{A}=\overline{B_1}+\overline{B_2}$.

方法二：由德摩根律　$A=B_1B_2$，所以 $\overline{A}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_1}+\overline{B_2}$.

【例 1.3】 设 A 和 B 是任意二事件，完成运算：

(1) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$;

(2) $AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}$.

【解】 (1) $(A+B)(A+\overline{B})=AA+A\overline{B}+BA+B\overline{B}=A+A(\overline{B}+B)=A+A=A$;

$(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}\,\overline{A}+\overline{A}\,\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}=\overline{A}+\overline{A}(\overline{B}+B)=\overline{A}+\overline{A}=\overline{A}$

所以　$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=A\overline{A}=\varnothing$.

(2)
$$
\begin{aligned}
&AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}\\
&=(A+\overline{A})B+(A+\overline{A})\overline{B}-\overline{AB}\\
&=B+\overline{B}-\overline{AB}=\Omega-\overline{AB}=\overline{\overline{AB}}=AB.
\end{aligned}
$$

二、事件的概率和性质

概率的定义和性质

(1) 定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A 为随机事件，则称满足下列条件的定义在随机事件集合上的实函数 $P(\cdot)$为概率，

① $P(\Omega)=1$;

② $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

③ 具有可列可加性：

设 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$两两互斥，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_k+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)+\cdots.$$

(2) 性质

① $P(\varnothing)=0$;

② $P(\overline{A})=1-P(A)$;

③ 有限可加性：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\
&+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)
\end{aligned}
$$

④ $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

【例 1.4】 已知 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，

(1) 当 A，B 互斥时，求 $P(\overline{A}B)$.

(2) 当 $A\subset B$ 时，求 $P(\overline{A}B)$.

(3) 当 $P(AB)=\frac{1}{8}$时，求 $P(\overline{A}B)$.

【解】(1) A，B 互斥，则 $AB=\varnothing$，于是 $\overline{A}B=B-AB=B$，所以 $P(\overline{A}B)=P(B)=\frac{1}{2}$.

(2) $A\subset B$，则 $\overline{A}B=B-AB=B-A$，

所以 $P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{6}$.

(3) $B=AB+\overline{A}B$，AB 与 $\overline{A}B$ 互斥，所以

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B),\ P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{3}{8}.$$

【例 1.5】从 0,1,2,…,9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，则三个数字中不含“0”或“5”的概率为________.

【解】令 $A=$“三个数字不含 0 或 5”，$B=$“三个数字不含 0”，$C=$“三个数字不含 5”，则 $A=B+C$.

故所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B+C})=1-P(\overline{B}\,\overline{C})=1-\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}.$$

三、重要概型

1. 古典概型

如果随机试验 E 满足下面的条件：

① 试验的样本空间 Ω 的元素只有有限个；

② 样本空间中的每个元素，即基本事件发生的可能性相同.

则称此试验为古典概型. 对于古典概型，事件 A 的概率有下列计算公式：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

【例 1.6】随机取一非负整数，求这个整数的平方数的个位数是 4 的概率.

【解】对任意的 $x=a+10b$，$a=0,1,2,\cdots,9$，所以基本事件总数为 10 则 $x^2=a^2+20ab+100b^2$，又因为只有 $8^2=64$，$2^2=4$，

所以有利于 A 的基本事件数为 2，

故 $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

2. 几何概型

如果随机试验 E 的样本空间 Ω 为欧式空间中的一个区域，且每个样本点

的出现具有等可能性，则称此试验为几何概型. 对于几何概型，事件 A 的概率有下列计算公式：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量(长度,面积,体积)}}{\Omega\text{ 的度量(长度,面积,体积)}}.$$

【例 1.7】 从 $(0,1)$ 中随机地取两个数 x 和 y，则满足条件的 $xy<\frac{1}{4}$ 的概率是________.

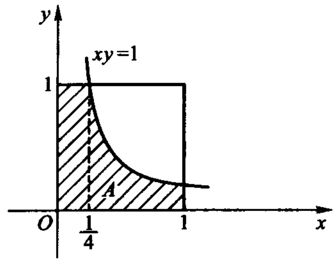


图　1－1

【解】 显然本题为几何概型，如图 1－1.

则　$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，$A=\left\{(x,y)\mid xy<\frac{1}{4},(x,y)\in\Omega\right\}$

于是　$S_\Omega=1$，$S_A=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$，

故所求概率为　$p=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$

3. 伯努利(Bernoulli)概型

如果试验 E 的结果只有两个：A 与 $\overline{A}$，则称此试验为伯努利概型(试验). 若将伯努利试验独立重复 n 次，则称为 n 重伯努利概型，简称伯努利概型. 若 $P(A)=p$，则 n 次试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

四、条件概率和事件的独立性

1. 条件概率

设 A，B 是两个随机事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率.

【注】 条件概率仍具有概率的性质：

① $P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)$；

② $P(A_1+A_2\mid A)=P(A_1\mid A)+P(A_2\mid A)-P(A_1A_2\mid A)$.

【例 1.8】 有 5 件产品，其中一等品 3 件，二等品 2 件. 随机取两次，一次一件不放回，设 $A=\{$第一次取到一等品$\}$，$B=\{$第二次取到一等品$\}$. 试求 $P(B\mid A)$.

【解】 方法一：由定义可得，

$$P(A)=\frac{P_3^1}{P_5^1}=\frac{3}{5},\ P(AB)=\frac{P_3^2}{P_5^2}=\frac{3\times 2}{5\times 4}=\frac{3}{10},$$

所以
$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}.$$

方法二：由条件概率的本质涵义，第一次取到一等品事件发生了，余下4件产品，其中还有2件一等品，这时取到一等品的概率，显然为$\frac{1}{2}$，

故
$$P(B\mid A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

2. 事件的独立性

（1）两个事件的独立性

设A，B是两个随机事件，若有等式$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B相互独立.

（2）n个事件的独立性

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个随机事件，如果对于任意$k(i_k\leqslant n)$，任意$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，具有等式
$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$
则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$为相互独立的事件；如果其中任意两个是相互独立的，则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$为两两独立的事件.

如：A，B，C相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

【注】 ① 相互独立$\Rightarrow$两两独立，但两两独立$\nRightarrow$相互独立；

② A，B相互独立$\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A)$，即一事件的发生不影响另一事件发生的概率.
$$\Leftrightarrow\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A),\text{ 即 }P(AB)=P(A)P(B)$$
$$\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})$$

③ A，B相互独立$\nRightarrow A$，B互不相容；且A，B互不相容$\nRightarrow A$，B相互独立.

④ A与B，$\overline{A}$与B，A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与$\overline{B}$中有一组相互独立，则其余三组也相互独立.

一般地，若$(A_1,\cdots,A_m)$与$(B_1,\cdots,B_n)$相互独立，则$f(A_1,\cdots,A_m)$与$g(B_1,\cdots,B_n)$也相互独立．其中f，g表示加，减，乘，对立，四则运算.

五、重要公式

1. 乘法公式

设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B).$$

一般地，设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

2. 全概率公式

若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为一完备事件组，即两两互斥且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，$P(B_i)>0$，$i=1,2\cdots,n$，则

$$\begin{aligned}P(A)&=P\left(A\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=P(AB_1+\cdots+AB_n)\\&=P(AB_1)+\cdots+P(AB_n)\\&=P(B_1)P(A\mid B_1)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).\end{aligned}$$

3. 贝叶斯(Bayes)公式

若 $B_1,\cdots,B_n$ 为一完备事件组，$P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，$P(A)>0$，则有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},j=1,2,\cdots,n.$$

【注】 各个公式的适用事件：

① 乘法公式主要用来计算没有相互独立性的若干事件之积的概率.

② 全概率公式和贝叶斯公式中完备事件组可以是有限个，也可以是可列个. 另外，对于具体问题，正确找出完备事件组是求解的关键.

【例 1.9】 盒中装有 5 个红球和 3 个白球，袋中装有 4 个红球和 3 个白球，从盒中任取 3 个球放入袋中，然后从袋中任取一个球，

(1) 求这个球是红球的概率.

(2) 若已知从袋中任取一个球为红球，问从盒中取出的 3 个球中，没有红球的概率.

【解】 设 $A=$ “从袋中任取一球为红球”，

$B=$ “从盒中任取 3 个球中有 i 个红球”，$i=0，1，2，3.$

则

$$P(B_0)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}，P(B_1)=\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}，P(B_2)=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}，P(B_3)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}，$$

且　$P(A\mid B_0)=\frac{4}{10}$，$P(A\mid B_1)=\frac{5}{10}$，$P(A\mid B_2)=\frac{6}{10}$，$P(A\mid B_3)=\frac{7}{10}$.

则

（1）由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)=\frac{65}{112}.$$

（2）由贝叶斯公式可得

$$P(B_0\mid A)=\frac{P(AB_0)}{P(A)}=\frac{P(B_0)P(A\mid B_0)}{P(A)}=\frac{1}{8}.$$

六、重要结论

1. $A+\varnothing=A$，$A+A=A$，$A+AB=A$；

$$A\varnothing=\varnothing,\ AA=A,\ (A-B)+A=A\overline{B}+A\neq A.$$

2. $A=AB+A\overline{B}$，$B=AB+\overline{A}B$

$\Rightarrow P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$.

【注】 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

3. $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$；

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)$；$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$.

§1.2　典型题型讲解与训练

一、随机事件的概念和性质

（1）与样本空间有关的命题

（2）与事件的关系和运算相关的命题

题型1　与样本空间有关的命题

思路点拨：利用相关定义.

【例1.10】 写出下列随机试验的样本空间及相应的随机事件.

（1）一个盒子中有十个完全相同的球，分别标以号码 1,2,…,10,$A=$｛球的标号为偶数｝；

（2）相继掷硬币两次，$A=$｛第一次出现正面｝，$B=$｛两次出现同一面｝；

（3）掷一颗骰子，观察出现的点数，$A=$｛点数大于3｝.

【解】（1）样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$，事件 $A=\{2,4,6,8,10\}$.

（2）样本空间 $\Omega=$｛(正面,正面),(正面,反面),(反面,正面),(反面,反

面)},

事件 $A=\{$(正面,正面),(正面,反面)$\}$.

事件 $B=\{$(正面,正面),(反面,反面)$\}$.

(3) 样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$, 事件 $A=\{4,5,6\}$.

★ 活学活用:

1.1 写出下列随机试验的样本空间及相应的随机事件:

(1) 10 件产品中有 1 件不合格品, 从中任取 2 件得 1 件不合格品.

(2) 一个口袋中有 2 个白球、3 个黑球、4 个红球, 从中任取一球, ①得白球; ②得红球.

★ 参考答案:

1.1 (1) 令 $i=\{$所取产品的标号为 $i\}$, $i=1,2,\cdots,10$, 其中前 9 个为合格品, 第 10 个为不合格品, 则

样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,10),(2,3),\cdots,(2,10),\cdots,(9,10)\}$,

事件 $A=\{(1,10),(2,10),(3,10),\cdots,(9,10)\}$.

(2) 样本空间 $\Omega=\{$白球,白球,黑球,黑球,黑球,红球,红球,红球,红球$\}$,

① 事件 $A=\{$白球,白球$\}$;

② 事件 $A=\{$红球,红球,红球,红球$\}$.

题型 2　与事件的关系和概率的性质相关的命题

思路点拨: 充分利用事件的关系、运算律, 对相应的运算符号要熟记并理解.

【例 1.11】 设 A, B, C 表示三个随机事件, 试用事件的运算符号表示下列事件:

(1) A 发生, B, C 都不发生; (2) A、B 都发生, 但 C 不发生;

(3) 三个事件都发生;　(4) 三个事件中至少有一个发生;

(5) 三个事件都不发生;　(6) 不多于一个事件发生;

(7) 不多于两个事件发生;　(8) 三个事件中至少有两个发生;

(9) A、B 至少有一个发生, C 不发生;

(10) A, B, C 中恰好有两个发生.

【解】 各事件根据其意义表示如下:

(1) $A\bar{B}\bar{C}$;　(2) $AB\bar{C}$;

(3) ABC;　(4) $A+B+C$(或 $A\cup B\cup C$);

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;　(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$(或$\overline{ABC}$);

(8) $ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$;

(9) $(A+B)\bar{C}$;　(10) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$.

【例 1.12】 甲、乙、丙三位射手向同一目标各射击一次，设 A，B，C 分别代表甲、乙、丙击中目标事件.

(1) 用 A，B，C 表示下列事件

① 目标被击中.

② 目标被击中一次.

(2) 用文字叙述下列事件

① $AB+AC+BC$;

② $\overline{A+B}$;

③ $\overline{AB}$.

【解】 (1) ① 即至少有一人击中目标，应该是 $A+B+C$.

② 其为三人中必有一人击中，且其他人未击中，

所以应该是 $$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C.$$

(2) ① $AB+AC+BC$：表示三人中至少有两人击中目标.

② $A+B$ 是甲、乙至少一人击中目标，所以 $A+B$ 的对立事件应是甲、乙都没击中目标. 所以有 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

③ AB 为甲、乙都击中目标，AB 的对立事件应该是甲没击中或乙没击中目标，也即甲乙至少有一人没击中目标. 所以有 $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

【例 1.13】 甲乙两射手进行射击，甲击中目标的概率为 0.9，乙击中目标的概率为 0.7，甲、乙两人同时击中目标的概率为 0.65，求目标被击中的概率.

【解】 "目标被击中"等价于"二人中至少有一人击中目标"，

设 $A=\{$甲击中目标$\}$，$B=\{$乙击中目标$\}$，$C=\{$目标被击中$\}$.

则 $P(A)=0.9$，$P(B)=0.7$，$P(AB)=0.65$，

故 $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9+0.7-0.65=0.95$.

★ 活学活用：

2.1 以 A 表示事件"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则对立事件 $\overline{A}$ 为：

(A) "甲种产品滞销，乙种产品畅销"

(B) "甲、乙产品均畅销"

(C) "甲种产品滞销"

(D) "甲种产品滞销或乙种产品畅销"

2.2 设 A，B，C 是三个事件，与事件 A 互斥的事件是

(A) $\overline{A}B+A\overline{C}$ (B) $\overline{A(B+C)}$ (C) $\overline{ABC}$ (D) $\overline{A+B+C}$

2.3 一个工人生产了 3 个零件，以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品 $(i=1,2,3)$，用 A_i 表示下列事件：

(1) 没有一个零件是不合格品；

(2) 至少有一个零件是不合格品；

(3) 仅仅只有一个零件是不合格品；

(4) 至少有两个零件不是不合格品.

2.4 某市有50%的住户订日报，有65%的住户订晚报，有85%的住户至少订这两种报纸中的一种，则同时订这两种报纸的住户的百分比是多少？

2.5 设随机事件 A，B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是0.4，0.3和0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，求 $P(A\overline{B})$.

★ 参考答案：

2.1 D. 2.2 D.

2.3 (1) $A_1A_2A_3$；(2) $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$；

(3) $\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3$；

(4) $\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1A_2A_3$.

2.4 30%. 2.5 0.3.

二、随机事件的概率计算

(1) 古典型概率的计算

(2) 几何型概率的计算

(3) 条件概率与积事件概率的计算

(4) 与全概率公式和贝叶斯公式相关的命题

(5) 与事件的独立性相关的事件的概率计算

(6) 伯努利概型的概率计算

题型3 古典型概率的计算

思路点拨： 首先确定是古典概型(注意各事件是否为等可能事件)，其次弄清样本空间和有利事件的结构，再利用古典概型概率计算公式进行计算. 古典概型中概率的计算常需用到的基本结论：

(1) 排列(有序)

① n 个元素选 m 个排列选排列：$P_m^n=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{m!}$；

② 全排列：$P_n^n=n!$；

③ 有重复的排列：m 个 n 相乘，即 $n\cdot n\cdot\cdots\cdot n=n^m$.

(2) 组合：从 n 个中选 m 个的种数：$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

(3) 加法原理 设完成一件事有 n 类方法(只要选择其中一类方法即可完成这件事)，若第1类方法有 m_1 种，第2类方法有 m_2