普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等学校统计学类系列教材

随机过程导论

陈木法　毛永华　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等学校统计学类系列教材

随机过程导论

陈木法　毛永华　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。书中集中讲授了马尔可夫链和随机分析. 无论从理论还是应用角度看, 这两部分都是随机过程理论中最基本、最重要的内容。

第一部分以遍历性为中心课题, 采用一些比较现代的数学工具, 单刀直入, 从有限状态空间到可数状态空间、从离散时间到连续时间, 逐步展开、深入; 第二部分包括了鞅、布朗运动和随机微分方程等经典内容, 并触及一些现代的研究课题。

本书可作为数学系高年级本科生、数学系和相关的理工科研究生的教材, 也可供从事概率论与数理统计专业研究的数学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程导论/陈木法, 毛永华编著. —北京: 高等教育出版社, 2007.6

ISBN 978-7-04-021778-0

Ⅰ.随… Ⅱ.①陈…②毛… Ⅲ.随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 064180 号

策划编辑 李蕊 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 王凌波
责任绘图 黄建英 **版式设计** 张岚
责任校对 刘莉 **责任印制** 韩刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印刷	廊坊市科通印业有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开本	787×960 1/16	版次	2007年6月第1版
印张	13.75	印次	2007年6月第1次印刷
字数	250 000	定价	17.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 21778-00

前　言

先从一个小概率事件谈起。2003 年 11 月, 我从巴黎乘高速火车去伦敦, 在我们车厢里, 共有 3 名乘客: 我和夫人及一位法国的年轻人。我偶然发现那位年轻人好像是在读一本数学书, 就想跟他聊聊, 没准他也是位数学工作者。我问他是否在看数学书, 翻开封面一看, 原来是随机过程方面 (随机微分方程) 的一本国际上十分流行的研究生教科书, 我十分高兴, 以为他也是研究概率论的。后来才知道他并不是学数学的, 而只是在银行工作。虽然我早已知道随机过程理论在金融里有重要应用, 但遇到此情此景还是十分吃惊。由这个小概率事件的发生可以推断随机过程理论受重视的普遍程度, 它在科学和工程诸多领域中的广泛应用更是众所周知的。我猜测他会受这本书的"欺负", 因为他可能缺乏必要的基础, 就问他为什么要读这么难的书。他说: "我非常想知道随机积分究竟是怎么回事, 为什么会对金融有用。" 问完这个问题, 自己却有点后悔, 因为我也推荐不出一本适合于他的通俗读物。另一方面, 我又感到十分惭愧, 身为概率论工作者, 却未能为公众提供亟须的科普读物。

本书虽然还不是一本科普读物, 但我依然希望能以尽可能小的篇幅, 介绍随机过程理论的基础知识。为此, 就需要精选主题。我们集中于"马尔可夫链"和"随机分析"两部分, 无论从理论还是应用角度看, 这两部分都应该是最重要的。其次, 在题材的处理上, 希望做到单刀直入、避免过多地纠缠于技术性的细节。例如在第一部分里, 我们紧紧抓住遍历性这一中心课题, 从有限状态空间到可数状态空间, 从离散时间到连续时间, 逐步展开, 逐步深入。在论证手法上, 采用了一些比较现代的数学工具, 使得证明更为简洁。可以看出, 第一部分的结构布局和证明方法与现有的教科书有相当大的不同。此外, 在本书中, 我们也希望触及一些现代的研究课题。例如, 人们常说, 概率论是研究随机现象中的必然规律的一门学科; 然而, 现代概率论在非随机的诸多数学分支中也发挥出了越来越大的威力。事实上, 与其他学科之间的很强的关联, 乃是本学科价值的体现和发展的源泉之一。关于这一点, 书中也有所涉及。

本书的形成经历了漫长的岁月。例如"强马氏性"一节来自于 1980 年我在

全国高等师范院校概率论学习班上授课时所找到的处理方式。我曾先后于 1989 年和 1996 年两次给本科生高年级开过随机过程的选修课，1998 年为全国数学暑期学校开过马尔可夫链的短课，为这些课程写过一些讲稿，但直到 1999 年才整理出本书的初稿。此后毛永华和王颖喆在本科生和研究生课中试用过多遍。特别是毛永华已连续使用了多年，作了不少加工，补充了第一章第五节、第二章第四节和第七章等内容，还配备了本书的全部习题。为了不影响全书的脉络主线，许多技术性的证明细节及相关内容尽可能安排在习题中，作为正文的补充。如同登山一样，你可以走盘山路，移步换景，悠悠然到达山顶；也可以选择一条“捷径”直达山顶，博览群山，然后在下山的沿途欣赏你想看的风景。

此外，部分兄弟院校选用此讲义作为本科或研究生的教材，如首都师范大学数学系、安徽师范大学数学与计算机学院等。另有不少同事索取了本讲义的部分章节的电子版作为教学和科研的参考，提出了许多宝贵意见；借此机会向他们表示由衷的感谢。同时也期盼更多的批评意见，以形成具有自己特色、又能较好地服务于读者的入门书。

陈木法

2006 年 12 月 5 日

目　录

第一篇

马尔可夫过程

第一章 离散时间马氏链

§1.1 经济最优化的数学模型与马氏链

我们从一个经济模型开始, 因为现在这个时代, 人们最关心的是经济.

投入产出法

要了解经济情况, 先从调查入手. 首先, 把我们所关心的主要产品和劳务列为 $(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(d)})$, 称为**产综**. 这里,我们固定各产品的单位, 如电: kW, 钢: t 等. 我们需要调查三件事. 首先是初始产综 (如去年的投入), 记为

$$x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \cdots, x_0^{(d)}).$$

其次是一年后的产出情况,

$$x_1 = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(d)}).$$

最后是反映生产效率的方阵 $A_1 = (a_{ij}^{(1)})$, 它表示每生产一个单位的第 i 类产品需消耗 $a_{ij}^{(1)}$ 个单位的第 j 类产品. 那么, 为产出 $x_1^{(i)}$ 个单位的第 i 类产品, 需消耗 $x_1^{(i)}a_{ij}^{(1)}$ 个单位的第 j 类产品. 这样, 今年的产出 x_1, 共消耗了 $\sum\limits_{i=1}^{d} x_1^{(i)}a_{ij}^{(1)}$ 个单位的第 j 类产品. 此即是去年投入的第 j 类产品的总和. 于是得出 $x_0^{(j)} = \sum\limits_{i=1}^{d} x_1^{(i)}a_{ij}^{(1)}$. 写成向量形式:

$$x_0 = x_1 A_1.$$

矩阵 A_1 反映出今年的生产效率, 故称之为**效率方阵**, 也称为**结构方阵**或**消耗系数方阵**. 现在, 我们考虑无消费的理想情形 (带消费情形才有实际意义, 但两者在数学上的处理类似, 以后再讨论), 即把产综 x_1 全部投入再生产而经一年后产出 x_2. 在此条件下, 跟上面一样, 我们有 $x_1 = x_2 A_2$. 依此递推, 得出

$$x_0 = x_n A_n \cdots A_1.$$

如假定 $A_n = A_{n-1} = \cdots = A_1 = A$ (在短期内可视为生产率稳定), 则上式成为 $x_0 = x_n A^n$, $n \geqslant 0$. 如 A 可逆, 则导出

$$x_n = x_0 A^{-n}, \qquad n \geqslant 0. \tag{1.1}$$

换句话说, 知道初始产综和效率方阵, 我们便可预报第 n 年的产出 x_n. 这就是著名的**投入产出法**. 可能许多读者都有所耳闻. 早在1968年, 联合国统计司便将它列为国民经济核算的工具. 我国从1974年便开始编制国民经济投入产出表.

正特征向量法

问题是, 经济如何发展好? 当然, 所谓 "好" 有不同的标准. 在我国, 曾长期存在一种看法, 即 "快" 就是 "好". 此刻, 我们不评论此标准的合理性而暂且就事论事, 如何才能快? 由 (1.1) 式可见, 效率在短期内不变, 即 A 不变. 那么, 问题成为如何选初始投入 x_0 才能使 x_n 最大. 如选好投入, 即使某一产品 $x_0^{(j)}$ 不够, 我们还可以进口加以补充. 换言之, 我们希望比值 $x_1^{(j)}/x_0^{(j)}$ 越大越好. 但这句话有问题. 可能对某个 j, 这个比值很大, 但对另一个 j, 这个比值却很小. 我们采用最优化理论中的**极小极大化原理**作为标准: 即在给定效益方阵 A 的前提下, 找出 x_0 使之达到

$$\max_{\substack{x_1>0\\ x_0=x_1A}} \min_{1\leqslant j\leqslant d} \frac{x_1^{(j)}}{x_0^{(j)}},$$

这是个最稳妥的办法. 在日常生活中, 人们常取平均的办法: $\frac{1}{d}\sum\limits_{j=1}^{d} x_1^{(j)}/x_0^{(j)}$. 对于数据相差不多的情形, 取平均是一个好办法. 然而, 若数据相差很大, 取平均就会有很大的失真. 例如讲一个球队的运动员的平均年龄就很合适, 但若谈一个托儿所的阿姨和婴儿的平均年龄便会闹笑话. 因而这里不用平均而采用前一标准. 这样做还有一种内在的原因, 即期望各产品按照同一比例增长而避免失调. 读者不难从随后的讨论中领悟出这一点.

现在我们要问: 依照上述标准, 最好的增长速度是多少? 为回答这个问题, 先交待两个概念. 称一个矩阵或向量**非负** (或**正**), 如果它的一切元素非负 (或正). 前面的效益方阵 A_1 即是非负的. 称非负矩阵 $A = (a_{ij})$ **不可约**, 如对于任何的 i 和 j, 存在 $i_1, \cdots, i_m$ 使得

$$a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{m-1}, i_m} a_{i_m, j} > 0.$$

定理 1.1 (华罗庚基本定理 ([33])). 设 A 可逆、非负不可约, 以 u 表示其最大特征根 $\rho = \rho(A)$ 所对应的左特征向量 (必定可取为正的).

(1) 如果取 $x_0 = u$ (不计正常数因子), 则 $x_n = x_0\rho^{-n}$, $n \geqslant 1$. 此时有最快增长速度 ρ^{-1}.

(2) 若再设 A^{-1} 不是非负的, 而且 $0 < x_0 \neq u$, 则必定存在 n_0 和 j_0 使得 $x_{n_0}^{(j_0)} \leqslant 0$. 此时称经济走向崩溃.

"崩溃" 是指发展到某个年份, x_n 必含零或负分量, 即**崩溃时间**

$$T := \inf\{n \geqslant 1, \text{存在 } j \text{ 使 } x_n^{(j)} \leqslant 0\}$$

有限. 此定理给出了最优的生产方案, 即最好的 (按比例) 投入方案. 如果 T 总是很大, 那么我们就不必在意. 这是因为, 比如说, 我们只订五年计划. 情况究竟如何, 还是让我们先看看华罗庚先生的下述例子.

例 考虑工、农业两种产品. 取 $A = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}$. 则

$$u = \left(\frac{5}{7}(\sqrt{2409} + 13),\ 20\right) \approx (44.34397483, 20).$$

下表给出当 x_0 取为 u 的前几位有效数字时, 对应的崩溃时间 T 的值.

x_0	T
(44, 20)	3
(44.344, 20)	8
(44.34397483, 20)	13

由此足以看出经济的敏感性. 上述结论 (2) 甚妙, 它表明: 依据所具备的客观条件, 经济有它自身的合理的发展速度. 太快了不好, 太慢了也不行. 其实点破了也就很容易明白. 我们可以在一夜之间办起无数的工厂, 但没有足够的电力和交通, 这些厂子能运转起来吗? 我们可创办很多很多的大学, 但没有教师, 没有足够财力的支持, 资料室是空的, 实验仪器一样也没有, 能算得上大学吗?

华罗庚基本定理的证明

当然, 华罗庚先生的主要贡献是定理的第二部分. 如何看出这一结论, 这需要相当的功夫, 矩阵论方面的功夫. 那么, 这跟**马尔可夫链** (简称为马氏链) 有何关系?

对于马氏链, 基本的量是**转移概率矩阵** (也称为**随机矩阵**) $P = (p_{ij})$. 这种矩阵可由两个条件来刻画: 一切元素非负 $(p_{ij} \geqslant 0)$ 而每一行和为 1 $(\sum\limits_j p_{ij} = 1)$. 我们有如下基本的极限性质.

定理 1.2. 若 P 为 (有限) 正方阵, 则对于一切 i 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} =: \pi_j > 0 \quad 而且 \quad \sum_j \pi_j = 1, \tag{1.2}$$

此处 $P^n = (p_{ij}^{(n)})$ 表示 P 的 n 次幂.

现在, 我们暂且从这里出发, 就正方阵这一基本情形证明华罗庚基本定理.

华罗庚基本定理的证明 (正方阵情形)

a) 首先, 对于不可约非负方阵, 有著名的

Perron-Frobenius 定理 不可约、非负方阵的最大特征根 ρ 为正, 而且它所对应的左、右特征向量 u (行向量) 和 v (列向量) 也都是正的.

无妨设 $uv = 1$ (归一化). 此定理容易从矩阵论的书籍中找到, 因而不再给出证明.

b) 其次, 由 $P^{n+1} = P^n P$ 易见, 定理 1.2 中的 π 满足方程 $\pi = \pi P$. 进而 $\pi = \pi P^n$. 由此及定理 1.2 易证, 满足方程 $\pi = \pi P$ 的分布 π 唯一. 现在, 对于给定的不可约正方阵 $A = (a_{ij})$, 命 $p_{ij} = \dfrac{a_{ij}v_j}{\rho(A)v_i}$, 则 (p_{ij}) 为正随机矩阵. 由

$$\sum_i u_i v_i p_{ij} = \frac{1}{\rho(A)} \sum_i u_i a_{ij} v_j = u_j v_j$$

及 $uv = 1$ 并应用定理 1.2, 得知这个随机矩阵有极限分布 $\pi_i = u_i v_i$. 由数学归纳法易证 $p_{ij}^{(n)} = \dfrac{a_{ij}^{(n)} v_j}{\rho(A)^n v_i}$. 于是由定理 1.2 得出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{ij}^{(n)}}{\rho(A)^n} = v_i \pi_j / v_j = v_i u_j.$$

写成矩阵形式

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^n = vu. \tag{1.3}$$

c) 设 $A > 0$, 则必定有 $A^{-1} \not\geqslant 0$. 无妨设 $\rho(A) = 1$ 且 $x_0 > 0$ 及 $x_0 v = 1$. 则由 $Av = v \Longrightarrow A^n v = v \Longrightarrow v = A^{-n} v$. 另一方面, 由 $x_n = x_0 A^{-n}$ 知

$$x_n v = x_0 A^{-n} v = x_0 v = 1.$$

于是若 $x_n > 0$ 对一切 n 成立, 则 $\{x_n : n \geqslant 1\}$ 为有界集, 因而其闭包必有极限点. 可抽子列 $\{n_k\}$ 使得

$$x_{n_k} \longrightarrow 某\ \bar{x} \geqslant 0 \quad 且 \quad \bar{x} v = 1. \tag{1.4}$$

最后, 由于

$$\begin{aligned} x_0 &= \lim_{k\to\infty} x_0 A^{-n_k} A^{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} A^{n_k} \\ &= \bar{x} v u \qquad (\text{由 } (1.3) \text{ 和} (1.4)) \\ &= u, \qquad (\text{由 } (1.4)) \end{aligned}$$

故为保证 $x_n > 0$ 对一切 n 成立, x_0 必须取为 u. □

留意在此证明中, 只需用到 (1.2) 便已足够. 而条件 "$A > 0$" 来自定理 1.2 中的假定 "$P > 0$". 我们将在下节放松这一条件. 现在, 我们回过头来证明定理 1.2.

定理 1.2 的证明 固定 j, 命

$$m_n = \min_i p_{ij}^{(n)}, \qquad M_n = \max_i p_{ij}^{(n)}.$$

以下的证明分三步.

1) $M_n \downarrow$, 2) $m_n \uparrow$, 3) $M_n - m_n \to 0$.

先证 1). 记 $\delta = \min_{i,j} p_{ij}$. 取 $i_0 = i_0(n)$ 使 $m_n = p_{i_0 j}^{(n)}$. 则

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \max_i \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n)} = \max_i \left[\sum_{k \neq i_0} p_{ik} p_{kj}^{(n)} + p_{ii_0} p_{i_0 j}^{(n)} \right] \\ &\leqslant \max_i \left[\sum_{k \neq i_0} p_{ik} M_n + p_{ii_0} m_n \right] = \max_i \left[(1 - p_{ii_0}) M_n + p_{ii_0} m_n \right] \\ &\leqslant M_n - (M_n - m_n)\delta. \end{aligned}$$

类似地可证 2):

$$m_{n+1} \geqslant m_n - (m_n - M_n)\delta.$$

故由上述两条得出 3):

$$0 \leqslant M_n - m_n \leqslant (M_1 - m_1)(1 - 2\delta)^{n-1} \to 0. \quad \square$$

事实上, 最后一步还给出了 $p_{ij}^{(n)}$ 收敛于 π_j 的一个收敛速度估计.

随机模型

在实际中, 效率方阵 A 并非决定性的, 总存在各种偶然性因素. 例如农业生产依赖于气候. 即使忘掉客观因素, 对于大矩阵 A, 特征值 ρ 也不可能精确算出, 误差总是存在的. 试问这些因素的影响如何? 首先的猜测可能是无所谓. 还是回到上述例子, 在每一年, 以随机矩阵 $A_n = (a_{ij}^{(n)})$ 代替上述的 $A = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij}^{(n)}$ 以概率 2/3 与决定性情形相同, 即仍然取值 a_{ij}. 但 $a_{ij}^{(n)}$ 以 1/6 的概率分别取值 $(1 \pm 0.01)a_{ij}$, 即以 1/3 的小概率作 1% 的小摄动. 进一步假定诸

$a_{ij}^{(n)}$ $(i,j=1,2,\ n\geqslant 1)$ 相互独立. 我们还是从 $x_0=(44.344,\ 20)$ 出发. 其第 n 年崩溃的概率如下表.

n	1	2	3
概率	0	0.09	0.65

这表明在三年内崩溃的概率达 0.74, 与前面的决定性情形的 $T=8$ 相比, 相距甚远. 于是, 这个计划至多只能执行两年, 就必须进行调整. 以上讨论也表明, 在经济学的研究中, 如不考虑随机因素, 就会造成很大的失真. 这从一定角度上也解释了为什么人们普遍觉得投入产出法不好用. 随机因素被排除, 当然失真也就太大了. 初学概率论的人, 常以为概率论只是在人们说不清楚的问题上给出模糊的答案. 其实, 随机数学的运用, 会使问题的解答比决定性的处理更精密而不是更粗糙.

事实上, 在随机情形, 我们有

定理 1.3 (崩溃定理 ([6])). 在适当的条件下, 对于任何的 $x_0>0$, 崩溃时间以概率 1 有限, 即 $\mathbb{P}^{x_0}[T=\infty]=0$.

这里, 我们不准备详细解释定理中的 "适当的条件", 只是指出, 此定理的证明远非平凡. 需要用到随机矩阵乘积的极限理论这一当今概率论十分活跃的发展方向. 与独立随机变量和的极限理论相比, 此论题是如此年轻, 令人难以置信. 欲知详情, 请参考 [28] 及文中所列文献. 更新些, 作为随机矩阵理论和算子代数的交叉渗透, 十多年来形成了自由概率 (free probability) 的新的学科分支. 更多的信息可参见 [11,第 10 章].

注 1.4. 华罗庚先生最初研究此问题时主要是针对当时的计划经济而言的. 但他同时也指出此模型对市场经济也是适用的, 只不过产量指标 x_n 需换成价值指标. 详言之, 以 p_i 表示第 i 类产品的市场价格, 并命 V 为以 v_i/p_i 为元素的对角矩阵(回忆 (v_i) 是 $\rho(A)$ 的右特征向量). 则只需作如下变换即可

$$\begin{aligned}
&A\longrightarrow V^{-1}AV,\\
&\rho(A)\longrightarrow \rho(V^{-1}AV)=\rho(A),\\
&u\longrightarrow uV.
\end{aligned}$$

可见数学模型保持不变. 但需注意在市场经济中, 随机性还要大些.

注 1.5. 本节所讨论的无消费模型当然是理想化的, 更切合实际的是带消费模型. 假定把每种产品 $x^{(i)}$ 的增产部分拿出 $\theta^{(i)}\in(0,1)$ 的比例用于消费, 那么, 一年后能用于再生产的产综 (决定性情形) 为

$$y_1=x_0+(x_1-x_0)(I-\Theta)=y_0[A^{-1}(I-\Theta)+\Theta], \tag{1.5}$$

此处 $y_0 = x_0$, Θ 是以 $\{\theta^{(i)}\}$ 为元素的对角矩阵. 简记 $B = A^{-1}(I - \Theta) + \Theta$, 仿照本节开头所证, 得出第 n 年可用于再生产的产综为

$$y_n = y_0 B^n, \qquad n \geqslant 0.$$

可见, 从数学上讲, 我们只是用 B 代替 A^{-1} 而已. 然而, 带消费的经济模型更容易稳定, 这与实际相符 ([12]).

注 1.6. 对于带消费的经济模型, 应当有相应的崩溃定理, 但目前我们仅有部分解答 ([12]). 另一方面, 研究崩溃定理并非最终目的, 人们期望有某种最优的控制理论. 但此方向的研究目前尚属空白. 应当说, 目前经济数学的研究与实践依然有相当大的距离. 经济毕竟是一个极其庞大、极其复杂的系统, 也是一个有待开垦的大领域.

注 1.7. 正特征向量法已成为互联网搜索引擎的主要数学工具. 在网上搜索时, 我们输入若干关键词, 搜索引擎先搜索与这些关键词相关的网页,然后将网页排序输出. 排序的规则是网页的级别由高至低. 那么,这个级别如何定? 依据是网页之间的链接情况 (可适当加权). 基于不同的想法, 可以选用不同 (主要有三种) 的网页之间的链接矩阵 (相当于经济模型中的结构矩阵). 然后网页的级别就取为这个矩阵的正特征向量. 显然, 这方面的研究有着很大的应用价值和商业价值. 只要在

www.google.com

上输入关键词 “search engine, pagerank”, 便可找到诸多文献. 参见 [41, 42].

注 1.8. 我们以经济模型为例, 说明马氏链的应用. 这自然是挂一漏万. 在此模型中, 因为客观上存在着随机性, 我们被迫要使用随机数学. 这是被动的. 但新近出现了反面, 即在客观上并不存在随机性的领域, 人们主动地使用随机数学. 典型的例子是随机算法, 而其中的重要武器之一就是马氏链. 例如参见 [55].

§1.2 离散时间马氏链 常返性与遍历性

上节已看到转移概率矩阵的极限性质 “$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$” 的重要作用, 并已就 “$P > 0$” 的特殊情形证之. 本节的目的是处理更为一般的情形. 我们指出: 虽然此性质是纯分析的, 但一般情形的证明却需要概率方法. 在本节中, 我们将看到概率直觉的重要性.

马氏性

设 $E = \{i, j, k, \cdots\}$ 为有限集或可列集.