21 世纪高等院校教材

数学分析选讲

刘三阳 于 力 李广民 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

数学分析选讲

刘三阳　于　力　李广民　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

随着当代科学技术的日益数学化，许多工科专业对数学的需求与日俱增，在基础课设置上，越来越不满足于传统的高等数学，希望用数学分析取代高等数学. 另一方面，数学分析作为数学专业最重要的基础课，初学一遍，往往难以学深弄透、融会贯通. 基于上述原因，我们兼顾两方面的需要，编写了这本数学分析选讲，取材大体基于而又略深于高等数学和数学分析教材，可以视为其自然引申、扩充、推广、交融和深化，其中不少内容是其他书上没有的或不易找到的，希望使学生学到一些以前未学而又不难学会的知识和方法、得到一次综合训练和充实提高的机会，在新的起点上温故知新，进一步夯实基础、巩固知识、强化训练、开阔视野、融会贯通、掌握方法、提高能力.

本书注重理论、方法和实例的有机结合，例题、习题丰富多样（附有部分习题答案），既重视一题多解（证），又强调一法多用、多题一解（证）、以例示理、以题释法，易学易用.

本书可以作为理工科学生的补充、提高教材，也可作为数学教师的教学参考书和考研学生的复习参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/刘三阳，于力，李广民编. —北京：科学出版社，2007
(21 世纪高等院校教材)
ISBN 978-7-03-019039-0

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①刘…②于…③李… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 077581 号

责任编辑：赵 靖 李晓鹏 / 责任校对：刘亚琦
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 6 月第一次印刷 印张：15 1/4
印数：1—4 000 字数：290 000

定价：20.00 元

前　言

数学分析是数学专业最重要的基础课，对后续课程的学习和研究影响甚大，它不但是众多学科分支的重要基础和有力工具，而且对培养学生的思维能力、夯实学生的数学基础、加强学生的数学基本功具有重要的作用和功效. 可以说，学好这门课程是打开大学阶段数学学习局面的关键.

随着当代科学技术的日益数学化，各门学科对数学的要求也日益提高，体现在大学课程设置上，就是各个专业普遍希望数学课程开设得更深一些、更多一些. 比如许多高校工科专业希望用数学分析取代高等数学，其初衷可喜可嘉. 但是，一方面，通常的高等数学除了微积分外，还包含空间解析几何和常微分方程等内容；另一方面，工科专业能够提供的课时却有限，而数学专业的数学分析则集中围绕微积分（不含空间解析几何和常微分方程）进行深入细致的讲述，需用课时较多. 因此，在内容多而深、课时又偏少的情况下，用数学分析取代高等数学，实施效果常常并不如愿，这是一个矛盾. 为了避免事与愿违、得不偿失，防止高不成、低不就，我们权且采取一种比较积极稳妥的办法，这就是先教通常的高等数学，再开设数学分析选讲，作为高等数学内容的补充、引申和深化，使学生在更高的起点上得到强化训练和提升.

另一方面，考虑到数学分析即使对于数学专业许多学生而言，初学一遍，也难以学深弄透、融会贯通. 因此，很有必要对某些内容细嚼慢咽，进行细化、强化、深化、融合和扩充，使学生进一步夯实基础、巩固知识、加强训练、开阔思路、掌握方法、提高能力.

基于上述考虑，我们兼顾两方面的需要，编写了这本《数学分析选讲》，取材大体基于而又略深于高等数学和数学分析教材（实数理论、闭区间上连续函数的性质和一致收敛性等少数内容基本上选自数学分析教材，以供工科学生选学），与其若即若离，不即不离，是其自然引申、扩展、推广、交融和深化. 不少内容在其他书上是没有的或不易看到的，希望使学生温故知新，学到一些以前未学而又不难学会的知识和方法，得到一次综合训练和充实提高的机会. 在写法上注重理论、方法和实例的有机结合，范例和习题丰富多样，既重视一题多解（证），又强调多题一解（证）、一法多用、以例示理、以题释法、借题习法，使学生易学易用.

本书初稿曾以讲义的形式在西安电子科技大学工科本硕连读班、教改班、数学专业高年级和全校公选课中多次使用，效果显著，很受欢迎. 在编写和修改过

程中，祝向荣教授、熊必璠教授等讲义使用者提出了宝贵的意见和建议，杨国平同志承担了大量的打印和校对工作，吴事良、刘丽霞同志仔细校对了清样，科学出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动. 在此，对他（她）们深表感谢. 在本书编写过程中，作者们参阅了大量书籍资料，恕不一一列举，特向有关作者谨致谢意.

由于时间紧迫、经验不足、水平有限，本书肯定存在不少缺点和问题，作者恳请读者批评指正.

编　者

2007 年 04 月

目　录

第 1 讲　求极限的若干方法

极限理论是数学分析的重要基础，求极限贯穿于数学分析的始终，其方法多种多样，这一讲介绍几种比较简便的方法.

1.1　用导数定义求极限

导数是用极限定义的，现在反其道而行之，利用导数定义来求某些数列及函数的极限.

例 1.1.1　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)$，$a>0$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^0}{\dfrac{1}{n}}=(a^x)'|_{x=0}=\ln a$.

例 1.1.2　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\ln n}$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}-\mathrm{e}^0}{\dfrac{\ln n}{n}}=(\mathrm{e}^x)'|_{x=0}=1$.

例 1.1.3　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-\sqrt[2n]{a})$，$a>0$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}na^{\frac{1}{2n}}(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{2n}}\dfrac{a^{\frac{1}{2n}}-1}{2\cdot\dfrac{1}{2n}}=\dfrac{1}{2}(a^x)'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}\ln a$，

或　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^0}{\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2n}}-a^0}{\dfrac{1}{2n}}\right]=\ln a-\dfrac{1}{2}\ln a=\dfrac{1}{2}\ln a$.

例 1.1.4　计算$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}3\cdot\dfrac{\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln 1}{\dfrac{3}{x}}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\sin\ln 1}{\dfrac{1}{x}}$

$$=3\cdot(\sin\ln t)'|_{t=1}-(\sin\ln t)'|_{t=1}=2\left.\frac{1}{t}\cos\ln t\right|_{t=1}=2.$$

例 1.1.5　计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{2^x-1}$，$m$，$n>1$，$\alpha$，$\beta\neq 0$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1-(\sqrt[n]{1+\beta x}-1)}{x}\cdot\dfrac{x}{2^x-1}$

$$=\left(\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}-\beta\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{\beta x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\right)^{-1}$$

$$=\left[\alpha(\sqrt[m]{1+x})'\big|_{x=0}-\beta(\sqrt[n]{1+x})'\big|_{x=0}\right]\cdot\left[(2^x)'\big|_{x=0}\right]^{-1}=\frac{n\alpha-m\beta}{mn\ln 2}.$$

例 1.1.6　计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-b^x)^2}{a^{x^2}-b^{x^2}}$，$a\neq b$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b^{2x}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x-1\right]^2}{b^{x^2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2}-1\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{a}{b}\right)^0}{x}\right]^2}{\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{x^2}-\left(\frac{a}{b}\right)^0}{x^2}}$

$$=\frac{\left\{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^t\right]'\Big|_{t=0}\right\}^2}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^t\right]'\Big|_{t=0}}=\frac{\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2}{\ln\frac{a}{b}}=\ln\frac{a}{b}.$$

例 1.1.7　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

解　设 $f_k(x)=x^{\frac{1}{k}}$，则

$$f_k'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f_k(x)-f_k(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f_k(1)-f_k(x)}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{\frac{1}{k}}}{1-x}=\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}\Big|_{x=1}=\frac{1}{k},$$

所以，原式$=\prod\limits_{k=2}^{n}f_k'(1)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$.

例 1.1.8　设 $f(x)$ 在 a 点可导，$f(a)>0$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}}$

$$=e^{[\ln f(x)]'|_{x=a}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

例 1.1.9　设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}$.

解　原式$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f'(x_0+2h)-2f'(x_0+h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left[2\,\frac{f'(x_0+2h)-f'(x_0)}{2h}-\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}\right]$$

$$=2f''(x_0)-f''(x_0)=f''(x_0).$$

例 1.1.10　设 $f'(0)\neq 0$，计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\mathrm{e}^x-f(0)}{f(x)\cos x-f(0)}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\mathrm{e}^x-f(0)}{x-0}\cdot\dfrac{x}{f(x)\cos x-f(0)\cos 0}$

$$=[f(t)\mathrm{e}^t]'\big|_{t=0}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)\cos x-f(0)\cos 0}$$

$$=[f(t)\mathrm{e}^t]'\big|_{t=0}/[f(t)\cos t]'\big|_{t=0}=\frac{f'(0)+f(0)}{f'(0)}.$$

例 1.1.11　设 $f'(a)$ 存在，计算$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\sum\limits_{i=1}^{k}f\left(a+\dfrac{i}{n}\right)-kf(a)\right]$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}i\cdot\dfrac{f\left(a+\dfrac{i}{n}\right)-f(a)}{\dfrac{i}{n}}=f'(a)\sum\limits_{i=1}^{k}i=f'(a)\cdot\dfrac{k(k+1)}{2}$.

例 1.1.12　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(a+\dfrac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\dfrac{k}{n}\right)^n\Big/a^{nk}$，$k$ 为自然数.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n\cdots\left(a+\frac{k}{n}\right)^n/a^{nk}\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}\ln\left(a+\frac{i}{n}\right)^n-\ln a^{nk}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}n\left[\ln\left(a+\frac{i}{n}\right)-\ln a\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}i\cdot\left[\frac{\ln\left(a+\frac{i}{n}\right)-\ln a}{\frac{i}{n}}\right]}=\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{a}}=\mathrm{e}^{\frac{k(k+1)}{2a}}.$$

习　题　1-1

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p-1\right]$，$p>0$；　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$，$m$，$n$ 为自然数；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(2\cdot\sqrt[n]{a}-1)^n$，$a>0$；

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$，$a>0$；　　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$，$a>0$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^{10}-(1-\sin x)^{10}}{\sin x}$；　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{(n+i)^m}{n^{m-1}}-kn\right]$，$m$ 为自然数.

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，计算$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

3. 设 $f'(x_0)$ 存在，计算 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$.

4. 设 $a>0$，$f(a)>0$，$f'(a)$ 存在，计算$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{\ln x-\ln a}}$.

1.2　用拉格朗日中值定理求极限

众所周知，拉格朗日中值定理是理论证明的有力工具. 实际上，它在计算某些函数的极限时也非常简便有效.

例 1.2.1　计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\xi}=1$，其中 ξ 位于 x 与 $\tan x$ 之间.

例 1.2.2　计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\cos\xi=1$，其中 ξ 位于 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间.

例 1.2.3　计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(xe^x)-\sin(xe^{-x})}{\sin x^2}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\xi\cdot x(e^x-e^{-x})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{\xi_1}}{x}=2$，其中 ξ 位于 xe^x 与 xe^{-x} 之间，ξ_1 位于 x 与 $-x$ 之间.

例 1.2.4　计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$，$a\neq b$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{ax-bx}\cdot\dfrac{ax-bx}{\sin ax-\sin bx}$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\xi_1}\cdot\frac{1}{\cos\xi_2}=1\ (\xi_1,\ \xi_2 \text{ 位于 } ax \text{ 与 } bx \text{ 之间}).$$

例 1.2.5　计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(1+\xi_x^2)\arctan\xi_x}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

$$\left(x<\xi_x<x+1,\quad \frac{x^2}{1+(1+x)^2}<\frac{x^2}{1+\xi_x^2}<\frac{x^2}{1+x^2}\right).$$

例 1.2.6　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^9}{n^{10}-(n-1)^{10}}$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^9}{10\xi^9}=\dfrac{1}{10}$ $(n-1<\xi<n)$.

例 1.2.7　计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$，$a\neq b$，$a>0$，$b>0$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2\ln a}-e^{x^2\ln b}}{[e^{x\ln a}-e^{x\ln b}]^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\xi_1}\cdot x^2(\ln a-\ln b)}{e^{2\xi_2}\cdot x^2(\ln a-\ln b)^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi_1}}{e^{2\xi_2}}\cdot\frac{1}{\ln a-\ln b}=\frac{1}{\ln\frac{a}{b}}$$（ξ_1 介于 $x^2\ln a$ 与 $x^2\ln b$ 之间，ξ_2 介于 $x\ln a$ 与 $x\ln b$ 之间）.

例 1.2.8　计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[(1+x)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}]$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[x^{\frac{1}{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot x^{\frac{1}{x}}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{\frac{1}{x}\ln x}[e^{\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{x})}-e^0]=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{\xi}\cdot\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{x^2}=1$$

$$\left(0<\xi<\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x},\ x\to+\infty\right).$$

例 1.2.9　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2a}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{na}{n^2}\right)$，$a>0$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{ka}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left[a\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{n^2}\right)\right]}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{n^2}\right)-\ln\frac{1}{a}\right]}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cdot\frac{1}{\xi}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cdot a}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}}=e^{\frac{a}{2}}，其中\frac{1}{a}<\xi<\frac{1}{a}+\frac{k}{n^2}.$$

例 1.2.10　计算$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x^x)-\sin(a^x)}{a^{x^x}-a^{a^x}}$，$a>1$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x^x)-\sin(a^x)}{x^x-a^x}\cdot\dfrac{x^x-a^x}{a^{x^x}-a^{a^x}}=\lim\limits_{x\to a}\cos\xi_1\cdot\dfrac{x^x-a^x}{a^{x^x}-a^{a^x}}$

$$=\lim_{x\to a}\cos a^a\cdot\frac{x^x-a^x}{a^{a^x}(a^{x^x-a^x}-a^0)}=\lim_{x\to a}\frac{\cos a^a}{a^{a^a}a^{\xi_2}\ln a}=\frac{\cos a^a}{a^{a^a}\ln a}$$（ξ_1 位于 a^x 与 x^x 之间，ξ_2 位于 0 与 x^x-a^x 之间）.

用柯西中值定理更简单，记 $f(x)=\sin x$，$g(x)=a^x$，则

$$原式=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{\cos(\xi)}{a^{\xi}\ln a}=\frac{\cos a^a}{a^{a^a}\ln a}$$（ξ 位于 a^x 与 a^a 之间）.

习 题 1-2

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\tan x\cdot\sin x^2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x^2}-x^{a^2}}{x^2-a^2}$，$a>0$；

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$；

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n})n^2}{\ln(n+1)}$.

2. 设 $f(x)$ 在 a 处可导，$f(a)>0$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f\left(a-\dfrac{1}{n}\right)}\right]^n$.

1.3 用等价代换求极限

大家知道，若 $f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$ $(x\to x_0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$($g(x)$，$g_1(x)$ 在 x_0 附近不为 0)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=A$. 事实上，因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\dfrac{g_1(x)}{g(x)}=A$，即等价代换不改变极限的存在性和极限值.

1. 由拉格朗日中值定理导出的若干等价代换及其应用

先利用拉格朗日中值定理给出下述一般命题：

命题 1.3.1 设

(1) $\alpha(x)$，$\beta(x)(\alpha\neq\beta)$在 x_0 的一个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=c$；

(2) $f(x)$ 在 $x=c$ 的一个邻域内可导且 $f'(x)$ 在 $x=c$ 处连续，$f'(c)\neq 0$. 则

$$f[\alpha(x)]-f[\beta(x)]\sim f'(c)[\alpha(x)-\beta(x)]\quad(x\to x_0).$$

证 由拉格朗日中值定理和题设条件有

$$\frac{f[\alpha(x)]-f[\beta(x)]}{\alpha(x)-\beta(x)}=f'(\xi_x),$$

其中 ξ_x 介于 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$之间. 于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[\alpha(x)]-f[\beta(x)]}{\alpha(x)-\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}f'(\xi_x)=f'(c),$$

因此有

$$f[\alpha(x)]-f[\beta(x)]\sim f'(c)[\alpha(x)-\beta(x)]\quad(x\to x_0).$$

根据命题 1.3.1，对常见的初等函数可得下列等价关系，其中 α,β 可以是自变量，也可以是函数(每一个等价关系中极限过程相同). 为引用方便，特殊情形也单独编号.

① $\ln\alpha-\ln\beta\sim\dfrac{1}{a}(\alpha-\beta)\qquad(a>0,\alpha\to a,\beta\to a,\alpha\neq\beta)$;

② $\ln\alpha-\ln\beta\sim\alpha-\beta\qquad(\alpha\to1,\beta\to1,\alpha\neq\beta)$;

③ $\ln\alpha\sim\alpha-1\qquad(\alpha\to1)$;

④ $\sin\alpha-\sin\beta\sim\alpha-\beta\qquad(\alpha\to0,\beta\to0,\alpha\neq\beta)$;

⑤ $\tan\alpha-\tan\beta\sim\alpha-\beta\qquad(\alpha\to0,\beta\to0,\alpha\neq\beta)$;

⑥ $b^\alpha-b^\beta\sim\ln b(\alpha-\beta)\qquad(b>0,\ b\neq1,\alpha\to0,\beta\to0,\alpha\neq\beta)$;

⑦ $\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^\beta\sim\alpha-\beta\qquad(\alpha\to0,\beta\to0,\alpha\neq\beta)$;

⑧ $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(\alpha-\beta)\qquad(a>0,\alpha\to a,\beta\to a,\alpha\neq\beta)$;

⑨ $\alpha^\lambda-\beta^\lambda\sim\lambda(\alpha-\beta)\qquad(\alpha\to1,\beta\to1,\alpha\neq\beta,\lambda\neq0)$;

⑩ $\alpha^\lambda-\alpha^\mu\sim(\lambda-\mu)(\alpha-1)\qquad(\alpha\to1,\ \lambda\neq\mu)$.

下面给出一些应用例题.

例 1.3.1　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x^2}-1}{\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$.

解　由等价关系②、③有

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\ln\sqrt[n]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)}=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}=\frac{1}{2n}.$$

例 1.3.2　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}-1}{\ln\cos x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x})}{\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x+\frac{1}{2}\ln\cos2x+\frac{1}{3}\ln\cos3x}{\ln\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos x}+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos2x}{\ln\cos x}+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos3x}{\ln\cos x}$$

$$=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos2x-1}{\cos x-1}+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-1}{\cos x-1}$$

$=1+2+3=6$（用洛必达法则或等价代换).

例 1.3.3　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x\ln\cos\sqrt{x}}{3^{x^2}-2^{-x^2}}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos\sqrt{x}-1)}{\ln 3^{x^2}-\ln 2^{-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(-\frac{1}{2}x\right)}{x^2(\ln 3+\ln 2)}=-\dfrac{1}{2\ln 6}$.

例 1.3.4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}}{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x}}$.

解　注意分母是无穷小量，利用等价关系 $t\sim\tan t$ $(t\to 0)$ 和①有

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\ln\mathrm{e}\right]}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x}\right)}\\
&=\mathrm{e}\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]\div\frac{1-\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}\\
&=\mathrm{e}\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]\cdot(2x+1)\\
&=\mathrm{e}\lim_{x\to\infty}2x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]+\mathrm{e}\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]\\
&=2\mathrm{e}\lim_{x\to\infty}x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]\\
&=2\mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}\\
&=2\mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}\\
&=2\mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{-\ln(1+t)-\ln 1}{2t}=-\mathrm{e}.
\end{aligned}$$

例 1.3.5　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\mathrm{e}^{x^2}-\sin x^2\mathrm{e}^{-x}}{\tan(\sin 2x)-\tan(\sin x)}$.

解　利用等价关系④和⑤有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^{x^2}-x^2\mathrm{e}^{-x}}{\sin 2x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\mathrm{e}^{x^2}-x\mathrm{e}^{-x})}{2x-x}=\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{x^2}-x\mathrm{e}^{-x})=1.$$

例 1.3.6　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^5-(1+\sin x)^5}{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}$.

解　利用等价关系④和⑨有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{5(\tan x-\sin x)}{\tan x-\sin x}=5.$$

例 1.3.7　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+x\sin x}-\sqrt[6]{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$.

解　利用等价关系⑨和⑩有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}(1+x\sin x-\cos x)}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(\cos x-1)}=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x-1}+\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}\right)=-6.$$

注　这一节参考和引用了甘泉教授的《高等数学解题精髓》一书中 2.4 节的部分内容，在此对作者表示感谢.

2. 加减运算下的等价代换

对乘除运算求极限，利用等价无穷小代换简便而有效. 而对加减运算则需格外谨慎. 下面定理给出了加减运算求极限时施行等价无穷小代换的条件.

命题 1.3.2　设 $\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1$ 均为 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}$ 存在，但不等于-1，证明：$\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$ $(x\to x_0)$.

证　需证 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1-\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha+\beta}\right)=0$　或　$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{\alpha+\beta-(\alpha_1+\beta_1)}{\alpha+\beta}\right)=0$. 因为

$$\frac{\alpha+\beta-(\alpha_1+\beta_1)}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha+\beta}+\frac{\beta-\beta_1}{\alpha+\beta},$$

注意到 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}\neq-1$ 故有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha+\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{1-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1}{\alpha}}{1+\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}}=0,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta-\beta_1}{\alpha+\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta-\beta_1}{\beta\left(\dfrac{\beta}{\alpha}+1\right)}=\frac{1-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_1}{\beta}}{1+\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}}=0.$$

注　显然条件 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}\neq-1$ 可换为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\neq-1$. 易知，若无穷小量 α 与 β（或 α_1 与 β_1）同时为正（负），且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ 存在，则有 $\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$.

例 1.3.8　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)+\sin 2x}{\tan x-2\arcsin 2x}$.

解　因为 $x\to 0$ 时，$\tan(\sin x)\sim x$，$\tan x\sim x$，$-2\arcsin 2x\sim-4x$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\neq-1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{-4x}=-\frac{1}{4}\neq-1,$$

所以

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{x+2x}{x-4x} = -1.$$

例 1.3.9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{e^{2\tan x}-e^{\sin x}}$.

解　因为 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\tan x}\to 1$，$\sqrt{1-\sin x}\to 1$，所以由等价关系⑦、⑧和命题 1.3.2 有

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\tan x+\sin x)}{2\tan x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x)}{2x-x} = 1.$$

例 1.3.10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2+1-\cos x}{1-\cos^3 x-\tan^2 x}$.

解　由等价关系⑨得 $1-\cos^3 x\sim 3(1-\cos x)$，由命题 1.3.2 有

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{1}{2}x^2}{3(1-\cos x)-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{3\cdot\frac{1}{2}x^2-x^2} = 3.$$

例 1.3.11　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\cos 2x}{(\tan 2x-\sin x)(\sin 2x-x)}$.

解　$原式=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+x)}-1+1-\cos 2x}{(2x-x)(2x-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)+\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x^2}{x^2}=3.$$

例 1.3.12　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(1+x)}{\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})}$.

解　利用等价关系②、③和命题 1.3.2 得

$$原式= \lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x^2+\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2+\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{1+x^2}-\ln 1}{x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

习　题　1-3

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\lambda-1}{(1+x)^\mu-1}$，$\mu\neq 0$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{\sqrt{1+x^2}-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\ \left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x}}\right]$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2}}{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}$.

2. 本节命题 1.3.2 中的条件 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}\neq -1$ 是否可换为 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha+\beta)\neq 0$?

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\ln\cos x}{e^{x^2}-e^{-x^2}-\sin x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x+\tan x}-\sqrt[3]{\cos x-\sin x}}{\ln(1+x)-\ln(1-\sin x)-\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e^x)+2\sin x}{\sin(2\tan 2x)-\sin(\tan 2x)-\tan x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{ax}-(1+bx)^{bx}}{(\tan 2x-x)(\sin x+x)}$，$a\neq b$.

1.4　用 Taylor 公式求极限

Taylor 公式是用多项式逼近函数的一种有效工具，具有广泛的应用. 这里只介绍带 Peano 余项的 Taylor 公式在求某些极限过程中的应用. 带 Peano 余项的 Taylor 公式是下述无穷小增量公式

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x\to 0)$$

或

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad (x\to x_0)$$

的推广，即若 $f(x)$ 在 x_0 处存在 n 阶导数，则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \qquad (x\to x_0).$$

该公式需要的条件较少，只需 n 阶导数在 x_0 处存在，但由此可以推知 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内存在 $k(k<n)$阶导数.

例 1.4.1　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^2\cdot\tan^2 x}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)-\left[1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2!}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{24}x^4-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$