课程标准

先锋工作室 VANGUARD

数理化

公式定律

【一典通】

解析通
应用通

《公式定律一典通》编写组 编

高中版

吉林教育出版社

数理化

公式定律

【一典通】

解析通
应用通

《公式定律一典通》编写组 编

高中版

吉林教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数理化公式定律一典通：高中版/《数理化公式定律一典通》编写组编．—长春：吉林教育出版社，2007.5
ISBN 978－7－5383－5261－0

Ⅰ．数…　Ⅱ．数…　Ⅲ．①理科(教育)—公式—高中—教学参考资料　②理科(教育)—定律—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第041910号

□总 策 划：杨　琳
□责任编辑：杨　琳　高铁楠　□封面设计：王　康
□责任校对：卜莲清　陈海燕　□责任印制：徐铁军

吉林教育出版社出版发行
长春市同志街1991号　邮编：130021
电话：0431—85675379　85645959　85645965
传真：0431—85633844　85645959
电子函件：xf 8640@ sina.com
吉林教育出版社制版

长春市第九印刷有限公司印装
长春市二道区泉眼镇街道1888号　邮编：130124
2007年5月第1版　2007年5月第1次印刷

开本：880×1230　1/32　印张：16.5　字数：488千
印数：00001—10000册
书号：ISBN 978－7－5383－5261－0

定价：18.80元

数理化公式定律一典通

编写组

◎主　任/傅荣强　石兴涛　初海涛

◎副主任/孟庆飞　宋　卓　庞孟栀

张书禅　张郁文　胡国庆

◎编　者/赵桂凤　朱　岩　姜中伟

刘　丹　楚艳秋　丁　齐

张琳琳　李晓民　宋冰倩

王　展　张云成　张　宇

孙　维　刘桂香　李晓东

李耀田　李　霞　金　铁

梁玉珍　王欣宇　李　洋

刘振堂　金永吉　石铁明

丁忠军　祁青松　王思凯

赵大川　潘　妍　李延军

牛宝金　刘文雅　曹瑛珂

目录 mulu

第一部分 数学

集合与函数

数列

三角函数

平面上的向量

不等式

解析几何

立体几何

排列 组合 二项式定理 概率

微积分

复 数

第二部分 物 理

力与运动

曲线运动与机械能

电场与恒定电流

磁与电

第三部分 化 学

基本概念

基础理论

元素、单质及其化合物

有机化学

化学实验

第一部分

数学

解析通

应用通

集合与函数

1. 集 合

1.1 $A\subseteq B$

解析通

(1) $A\subseteq B$ 的意义

① $\varnothing\subseteq B$

规定空集 $\varnothing$ 是任意集合 B 的子集.

② $A\subseteq B$

设 $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$,如果对任意的 $x\in A$,都有 $x\in B$ 成立,那么称 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$.

此种情况下,条件与结论的相互关系可以简记为

$$\text{若 } x\in A,\text{则 } x\in B\Leftrightarrow A\subseteq B.$$

(2) $A\subsetneqq B$ 的意义

① $\varnothing\subsetneqq B$

设 $B\neq\varnothing$,规定 $\varnothing\subsetneqq B$.

② $A\subsetneqq B$

设 $A\neq\varnothing$,如果 $A\subseteq B$,且至少存在一个 $x\in B$,但 $x\notin A$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

(3) $A=B$ 的意义

如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,那么称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

由以上讨论可知,$A\subseteq B$ 有两个方面的含义,即 $A\subsetneqq B$,或 $A=B$. 对其理解,可类比实数 $x\leqslant y\Leftrightarrow x<y$ 或 $x=y$.

应用通

例 已知集合 $A=\{3,4,5\}$,$B=\{C|C\subseteq A\}$,求集合 B.

▶**解**:$A=\{3,4,5\}$,A 的子集为 $\varnothing$,$\{3\}$,$\{4\}$,$\{5\}$,$\{3,4\}$,$\{3,5\}$ $\{4,5\}$,$\{3,4,5\}$.

又 $B=\{C|C\subseteq A\}$,

所以 $B=\{\varnothing,\{3\},\{4\},\{5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{3,4,5\}\}$.

老师忠告

①对 B 的理解应为"B 是集合的集合". 这是因为 B 中的代表元素为 C,C 适合的条件是 $C\subseteq A$,即 C 是 A 的子集,进一步明确对 B 的理解,即 B 是集合 A 的子集的集合. ②要注意,求 A 的子集时,易丢掉 $\varnothing$ 和它本身.

1.2 $\complement_U A=\{x\mid x\in U,且\ x\notin A\}$

解析通

已知全集 $U\neq\varnothing$,集合 $A\subseteq U$,由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 在 U 中的补集,记作 $\complement_U A$,即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U,且\ x\notin A\}.$$

几何解释见图 1-1.

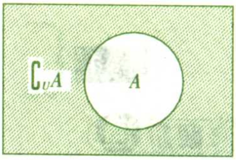

图 1-1

由补集的定义,有

$\complement_U(\complement_U A)=A$,$\complement_U\varnothing=U$,$\complement_U U=\varnothing$.

应用通

例 若全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,5\}$,$B\subsetneqq\complement_U A$,则这样的集合 B 最多有(　　)

A. 5 个　　B. 7 个　　C. 6 个　　D. 8 个

▶**点拨**:弄清符号“$\subsetneqq$”与“$\complement_U A$”的含义是解本题的关键.

▶**解**:$\complement_U A=\{2,3,4\}$,$B$ 是 $\{2,3,4\}$ 的真子集,B 可以是 $\varnothing$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{4\}$,$\{2,3\}$,$\{2,4\}$,$\{3,4\}$,共 7 个.

选 B.

1.3 $A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}$

解析通

(1)$A\cap B$ 的意义

①若 A、B 至少有一个为 $\varnothing$,则 $A\cap B=\varnothing$.

②若 $A\neq\varnothing$,且 $B\neq\varnothing$,则

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}.$$

③几何解释见图 1-2.

图 1-2

(2)由交集的定义可得到如下关系:

$A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$,$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap B=B\cap A$.

应用通

例 设集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$. 当 a 为何值时,$A\cap B\neq\varnothing$ 和 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立?

▶解：$B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$.

由 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$ 可知，$3\in A$，$2\notin A$，

否则，与 $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾.

将 3 代入方程 $-x^2-ax+a^2-1=0$，得 $a=-2$，或 $a=5$.

当 $a=-2$ 时，$A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$，此时，集合 A 满足题设条件.

当 $a=5$ 时，$A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，此时 $A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$，集合 A 不符合题意. 所以 $a=-2$.

1.4 $A\cup B=\{x|x\in A，或\ x\in B\}$

解析通

(1) $A\cup B$ 的意义

①若 $A=B=\varnothing$，则 $A\cup B=\varnothing$.

②若 $A=\varnothing$（或 $B=\varnothing$），$B\neq\varnothing$（或 $A\neq\varnothing$），则 $A\cup B=B$（或 A）.

③若 $A\neq\varnothing$，且 $B\neq\varnothing$，则 $A\cup B=\{x|x\in A，或\ x\in B\}$.

(2) 由交集、并集的定义可以得到如下关系：

①$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

②$A\cup B=B\cup A$，$A\cup\varnothing=A$.

③$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

④$A\cup B=A$，且 $A\cup B=B\Leftrightarrow A=B$.

应用通

例 设方程 $x^2+x+2p=0$ 的解集是 A，方程 $2x^2+qx+2=0$ 的解集为 B，且 $A\cap B=\{1\}$，求 $A\cup B$.

▶解：由 $A\cap B=\{1\}$ 可知，$1\in A$，且 $1\in B$.

把 $x=1$ 代入方程 $x^2+x+2p=0$，可得 $p=-1$，这时，方程 $x^2+x+2p=0$ 即为 $x^2+x-2=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=1$，所以 $A=\{-2,1\}$. 同理可得 $B=\{1\}$. 所以 $A\cup B=\{-2,1\}$.

1.5 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$

解析通

$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$ 与 $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，表示集合间的交、并运算关系与集合间的包含关系的等价转换，即

若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$；反之，若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

若 $A\cup B=A$,则 $B\subseteq A$;反之,若 $B\subseteq A$,则 $A\cup B=A$.

几何解释见图 1-3(图中阴影部分表示 $A\cap B$,或 $A\cup B$).

(1)　　　　(2)

图 1-3

应用通

例 设 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid ax-2=0\}$,$A\cup B=A$,求由实数 a 构成的集合 C.

▶**解**:$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.

由 $A\cup B=A$ 可知,$B\subseteq A$.

因为 $B=\{x\mid ax-2=0\}$,所以,B 有三种可能,即

$$B=\varnothing,B=\{1\},B=\{2\}.$$

当 $B=\varnothing$ 时,$a=0$;当 $B=\{1\}$ 时,$a=2$;当 $B=\{2\}$ 时,$a=1$.

所以 $C=\{0,1,2\}$.

2. 函数的概念

2.1 $y=f(x)$

解析通

(1)函数 $y=f(x)$ 的定义

①古典定义

如果在某变化过程中有两个变量 x 与 y,并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值,按照某种对应法则,y 都有唯一确定的值和它对应,那么 y 就是 x 的函数,x 叫做自变量,x 的取值范围叫做函数的定义域,和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值,函数值的集合叫做函数的值域. y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.

②现代定义

从非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 $f:A\to B$,叫做 A 到 B 的函数,记作 $y=f(x)$,其中 $x\in A$,$y\in B$,原象集 A 叫做函数的定义域,象集 C 叫做函数的值域,一般地 $C\subseteq B$.

③两种定义的比较

函数的古典定义和现代定义本质上是一致的,只是两种形式的侧重点有所不同. 古典定义侧重于“运动变化”观点,现代定义侧重于“集合映射”观点,不论用哪种形式对函数加以定义,函数的内涵不会因为其定义形式的不同而有所差异;在函数的定义中涉及两个非空数集和一个对应法则,即定义域 A,值域 C 和对应法则 f,我们称之为函数的三要素,其中对应法则 f 是核心. 由于

函数的三要素确定以后，函数随之确定，因此函数是定义域、值域和对应法则的总和. 又由于函数的值域由其定义域和对应法则唯一确定，所以有时我们也说函数有两要素——定义域、对应法则；y 是 x 的函数，我们记作 $y=f(x)$. 对记号 $y=f(x)$ 的理解应是：$y=f(x)$ 不一定都是解析式的形式，有时 $y=f(x)$ 可能是表格，也可能是图象.

应用通

例 求下列函数的定义域：

(1) $g(x)=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{1-x}-1}$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\sqrt{x-2008}+\sqrt{2008-x}$.

▶**点拨**：一个函数由几部分构成，求其定义域：整式部分，x 不受限制；分式部分，分母不能为零；形如 $[\varphi(x)]^0$ 的部分，$\varphi(x)\neq 0$；形如 $\sqrt[2n]{\psi(x)}$ 的部分，$\psi(x)\geqslant 0$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

▶**解**：(1) 由题意可知，$g(x)$ 的定义域由不等式组

$\begin{cases} x+1\neq 0, \\ 1-x\geqslant 0, \\ \sqrt{1-x}-1\neq 0 \end{cases}$ 确定，解这个不等式组，得 $x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0, x\neq -1$，∴ 函数的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1]$.

(2) ∵ $f(x)$ 中的 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ 恒成立，

∴ $f(x)$ 的定义域由下面的不等式组确定：

$$\begin{cases} x-2008\geqslant 0, \\ 2008-x\geqslant 0, \end{cases}$$

解这个不等式组，得 $x=2008$，　　这种情形较特殊

∴ 函数的定义域是 $\{2008\}$.

2.2 $y=f[g(x)]$

解析通

复合函数 $y=f[g(x)]$ 的意义

如果 y 是 u 的函数，记为 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数，记为 $u=g(x)$，且 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的交集非空，则通过 u 确定了 y 是 x 的函数 $y=f[g(x)]$，这时 y 叫做 x 的复合函数，其中 u 叫做中间变量，$y=f(u)$ 叫做外层函数，$u=g(x)$ 叫做内层函数.

应用通

例 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f(x+m)+f(x-m)$ $(m>0)$ 的定义域.

▶**解**:$f(x)$的定义域是$[0,1]$.

解不等式组$\begin{cases}0\leqslant x+m\leqslant 1,\\0\leqslant x-m\leqslant 1,\end{cases}$得$\begin{cases}-m\leqslant x\leqslant 1-m,\\m\leqslant x\leqslant 1+m.\end{cases}$ ㊟

当$1-m<m$,即$m>\frac{1}{2}$时,不等式组㊟的解集为$\varnothing$;

当$1-m>m$,即$0<m<\frac{1}{2}$时,不等式组㊟的解集为

$$\{x|m\leqslant x\leqslant 1-m\};$$

当$1-m=m$,即$m=\frac{1}{2}$时,不等式组㊟的解集为$\left\{x|x=\frac{1}{2}\right\}$.所以,$f(x+m)+f(x-m)$的定义域是

当$m>\frac{1}{2}$时,$\varnothing$;

当$0<m<\frac{1}{2}$时,$\{x|m\leqslant x\leqslant 1-m\}$;

当$m=\frac{1}{2}$时,$\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3. 函数的性质

3.1 $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$,$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

解析通

(1)$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$与$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$的意义

对于给定区间上的函数$f(x)$,如果对于这个区间上的任意两个自变量的值x_1,x_2,当$x_1<x_2$时,都有$f(x_1)<f(x_2)$[$f(x_1)>f(x_2)$],那么就说函数$f(x)$在这个区间上是增函数(减函数).这个区间叫做$f(x)$的单调区间.

(2)关于单调函数的重要结论

①若函数$y=f(x)$和$y=g(x)$在公共区间A上都是增(减)函数,则函数$y=f(x)+g(x)$在A上也是增(减)函数.

②若两个正值函数$y=f(x)$和$y=g(x)$在公共区间A上都是增(减)函数,则函数$y=f(x)\cdot g(x)$在区间A上也是增(减)函数.

③若两个负值函数$y=f(x)$和$y=g(x)$在公共区间A上都是增(减)函数,则函数$y=f(x)\cdot g(x)$在区间A上也是减(增)函数.

(3)复合函数的单调性

设函数$y=f(u)$和$u=g(x)$在公共区间A上都是单调函数,那么函数$y=f[g(x)]$在A上也是单调函数;并且,若$y=f(u)$和$u=g(x)$的单调性相同(反),则$y=f[g(x)]$是增(减)函数,也就是说,当$y=f(u)$和$u=g(x)$同是增函数或者同是减函数时,$y=f[g(x)]$是增函数;当$y=f(u)$和$u=g(x)$一增一减时,那么$y=f[g(x)]$就是减函数.

应用通

例 证明函数$f(x)=x^{\frac{2}{3}}+a(a\in\mathbf{R})$在$[0,+\infty)$上是增函数.

▶证明: 设元 设$0\leqslant x_1<x_2<+\infty$,则

$x_2-x_1>0$.

因为$f(x_2)-f(x_1)$ 作差

$$\left.\begin{aligned}&=(x_2^{\frac{2}{3}}+a)-(x_1^{\frac{2}{3}}+a)\\&=x_2^{\frac{2}{3}}-x_1^{\frac{2}{3}}\\&=(x_2^{\frac{1}{3}}+x_1^{\frac{1}{3}})(x_2^{\frac{1}{3}}-x_1^{\frac{1}{3}})\\&=\frac{(x_2^{\frac{1}{3}}+x_1^{\frac{1}{3}})(x_2-x_1)}{x_2^{\frac{2}{3}}+x_2^{\frac{1}{3}}x_1^{\frac{1}{3}}+x_1^{\frac{2}{3}}}>0.\end{aligned}\right\}\text{变形,判号}$$

所以,$f(x)=x^{\frac{2}{3}}+a$在$[0,+\infty)$上是增函数. 定论

▶注意:①本题由$x_2^{\frac{1}{3}}-x_1^{\frac{1}{3}}$到$\dfrac{x_2-x_1}{x_2^{\frac{2}{3}}+x_2^{\frac{1}{3}}x_1^{\frac{1}{3}}+x_1^{\frac{2}{3}}}$一步,依据是立方差公式,即把$x_2-x_1$视为$(x_2^{\frac{1}{3}})^3-(x_1^{\frac{1}{3}})^3$. ②证明一个函数在某个区间上的单调性,其步骤是:作差→变形→判号→定论.

3.2 $f(-x)=\pm f(x)$

解析通

(1)$f(-x)=-f(x)$与$f(-x)=f(x)$的意义

对于函数$f(x)$,如果对于函数的定义域内的任意一个x,都有$f(-x)=-f(x)$[$f(-x)=f(x)$],那么函数$f(x)$就叫做奇函数(偶函数).

定义域关于原点对称,是函数具有奇偶性的必要但非充分条件;

如果函数的定义域关于原点对称,函数值恒为零,那么它既是奇函数又是偶函数;

偶函数的图象关于y轴对称,奇函数的图象关于原点对称.

(2)关于奇偶函数的重要结论

①如果$f(x),x\in D_1$与$g(x),x\in D_2$都是奇函数,那么在$D_1\cap D_2$上,$f(x)+g(x)$是奇函数,$f(x)\cdot g(x)$是偶函数.

类似的有:"奇±奇=奇","奇×奇=偶","偶±偶=偶","偶×偶=偶","奇×偶=奇".

②若$f(x)$是具有奇偶性的单调函数,则奇(偶)函数在正负对称区间$(-m,0)$与$(0,m)(m\in\mathbf{R})$上的单调性是相同(反)的.

③对于复合函数$F(x)=f[g(x)]$,有

若$g(x)$为偶函数,则$F(x)$为偶函数;