高中一年级第二学期

学习指导

河南省基础教育教学研究室　编

数学

大象出版社

编写说明

为了全面贯彻落实《全日制普通高级中学教学大纲》的精神，使学生在掌握基础知识的同时，形成运用知识解决实际问题的能力，我室组织编写了"高中各科学习指导"丛书。广大师生在使用过程中对这套丛书给予了充分的肯定和好评，也对书中的不足之处提出了宝贵的修改意见。2004 年，教育部颁布了《全日制普通高级中学课程标准》，并在山东、广东、海南、宁夏四省区进行新教材实验。"课程标准"提出了许多新的教学理念和教学要求。为了适应高中课程改革发展的需要，我室组织一线教师和教学研究人员，依据现行"教学大纲"规定的知识和能力要求，参考新的"课程标准"的精神，采纳广大师生提出的合理建议，对这套丛书进行了重新编写。

本次编写以培养学生的创新精神和实践能力为宗旨，在强调指导功能的同时，突出了同步讲练。各册均紧扣教材内容编写，在栏目的设计上，除注重丛书的共性之外，还充分考虑了学科的特点，以使其更符合各学科的教学实际，更具针对性。

数学学科以章为大的编写单位，同步讲练具体到每一节。各章设置了以下栏目：

要点聚焦　是对本章知识的整合和浓缩，可以帮助同学们掌握预习的重点，把握学习的方向。

精讲精练　这一部分是主体，分节编写。每节下设"**本节精讲**"和"**本节精练**"两个子栏目，通过讲和练的有机结合，力求加强对教材知识的理解和巩固。其中许多不同层次的习题，更满足了不同程度学生的训练需求。

难点探究　既是对本章难点的深入分析，又是与高考接轨、向高考过渡的知识拓展，为同学们把握高考重点作了必要的点拨和铺垫。

综合测试　通过练习题的训练，加强对本章知识的综合性学习。

在各章讲练之后，设计了"**期中测试**"和"**期末测试**"两套试题，以方便同学们对所学知识进行自我检测。

考虑到使用的需要，我们对部分习题提供了参考答案（另外结集出版）。

这套丛书包括思想政治、语文、英语、数学、物理、化学、中国近代现代史、地理、生物九个学科，它最突出的特点就是有讲有练、讲练结合，将知识的概括与能力的训练有机地组织在一起；习题设计新颖、典型；板块设置也因学科特点而灵活调整，从而突出了实用性，达到了内容与形式的统一。

参加本册书编写的作者是骆传枢、张玉莲、张海营、冯瑞先、孙士放同志，最后由骆传枢、张玉莲、张海营同志统稿。

对使用中发现的错谬缺漏之处，恳请广大师生批评、指正。

河南省基础教育教学研究室

目　录

第四章　三角函数

要点聚焦

三角函数是重要的基本初等函数之一，是研究其他各部分知识的重要工具，在实际问题中也有着广泛的应用，因而是高考中对基础知识和基本技能考查的重要内容之一. 本章重点是：必须准确、深刻地理解本章的基本概念、熟练掌握和运用基本公式，注意分析问题和解决问题的灵活性；难点是三角函数知识与其他知识的综合应用，如：用单位圆中的三角函数线和三角函数的图象直观形象地反映函数的各种基本性质，是体现数形结合思想的重要内容，也是历届高考的重点之一.

1. 理解弧度的意义，并能正确地进行弧度和角度的换算.

2. 熟练掌握任意角的三角函数的定义及利用定义求各三角函数值. 熟悉三角函数值的符号规律，熟记某些特殊角的三角函数值.

3. 掌握同角三角函数的基本关系式和诱导公式，能熟练地运用这些公式求三角函数值、证明三角恒等式、化简三角函数式、已知三角函数值求角的方法.

4. 能推导并掌握两角和、两角差与二倍角的正弦、余弦、正切公式.

5. 能正确地运用学过的三角公式化简三角函数式，求某些三角函数值，证明较简单的三角恒等式及解决一些简单的实际问题.

6. 要会用"五点法"画正弦、余弦函数及 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图，掌握图象之间的平移、伸缩变化，会由 $y=\sin x$ 的图象通过图象变换画出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

7. 掌握基本三角函数的性质，会求 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期，或者经过简单的变形可化为上述形式函数的周期. 熟悉三角函数的单调性，能比较三角函数值的大小，会确定三角函数的单调区间，能判定三角函数的奇偶性，会求某些三角函数式的最大值或最小值.

精讲精练

一　任意角的三角函数

4.1　角的概念的推广

本节精讲

例 1　若 $90°<\beta<\alpha<135°$，则 $\alpha-\beta$，$\alpha+\beta$ 的范围分别是多少？

解：∵　$90°<\beta<\alpha<135°$，则有 $90°<\alpha<135°$，$90°<\beta<135°$，$\alpha-\beta>0°$.

又　$-135°<-\beta<-90°$，

∴　$0°<\alpha-\beta<45°$.

∴　$180°<\alpha+\beta<270°$.

点评:在给定角的范围的条件下,求两角和、差,可利用不等式性质在正角、零角、负角范围内施行变换.

例2　在与10030°角终边相同的角中,求满足下列条件的角.

(1)最大的负角;(2)最小的正角;(3)360°~720°的角.

解:(1)与10030°角终边相同的角的一般形式为$\beta=k\cdot 360°+10030°(k\in\mathbf{Z})$,

由$-360°<k\cdot 360°+10030°<0°$,得$-10390°<k\cdot 360°<-10030°$,

解得$k=-28$,

故所求的最大负角为$\beta=-50°$.

(2)由$0°<k\cdot 360°+10030°<360°$,

得$-10030°<k\cdot 360°<-9670°$,

解得$k=-27$.

故所求的最小正角为$\beta=310°$.

(3)由$360°\leqslant k\cdot 360°+10030°<720°$,

得$-9670°\leqslant k\cdot 360°<-9310°$,

解得$k=-26$.

故所求的角为$\beta=670°$.

点评:先写出终边相同的角的一般形式,再求满足条件的整数k即可,其中最大的负角在$-360°\sim 0°$之间,最小正角在$0°\sim 360°$之间.

例3　已知α是第二象限角,求$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角.

解:$\because$　α是第二象限角,则

$k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$　$k\cdot 180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+90°,k\in\mathbf{Z}$.

当k为奇数时,$\frac{\alpha}{2}$为第三象限角;

当k为偶数时,$\frac{\alpha}{2}$为第一象限角.

$\therefore$　$\frac{\alpha}{2}$为第一、第三象限角.

点评:(1)有的同学处理本问题时,由α是第二象限角,仅想到$90°<\alpha<180°$,从而得到$45°<\frac{\alpha}{2}<90°$,仅得到$\frac{\alpha}{2}$为第一象限角,而将$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角的情况丢掉,此种错误以后一定要避免.

(2)熟悉下列事实,对我们解答有关问题大有好处.

当α为第一象限角时,$\frac{\alpha}{2}$为第一、第三象限角的前半区域;

当α为第二象限角时,$\frac{\alpha}{2}$为第一、第三象限角的后半区域;

当α为第三象限角时,$\frac{\alpha}{2}$为第二、第四象限角的前半区域;

当 α 为第四象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第二、第四象限角的后半区域.

本节精练

一、选择题

1. 下列命题正确的是 【 】

A. 终边与始边重合的角叫做零角　　B. 终边相同的角是相等的角

C. 第三象限角必大于第二象限角　　D. 第二象限角不一定是钝角

2. 如果 α 是第四象限角，那么 $180°-\alpha$ 是 【 】

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

3. 已知 α 是锐角，那么 3α 是 【 】

A. 第一或第二象限的角　　B. 第二或第三象限的角

C. 第一或第二或第三象限的角　　D. 小于 270°的正角

4. 与 120°角终边相同的角是 【 】

A. $k\cdot 360°-600°(k\in\mathbf{Z})$　　B. $k\cdot 360°-120°(k\in\mathbf{Z})$

C. $(2k+1)\cdot 180°+120°(k\in\mathbf{Z})$　　D. $k\cdot 360°+660°(k\in\mathbf{Z})$

5. 若角 α 与 β 终边重合，则有 【 】

A. $\alpha+\beta=180°$　　B. $\alpha+\beta=0°$

C. $\alpha-\beta=k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$　　D. $\alpha+\beta=k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$

6. 设 α、β 满足 $-180°<\alpha<\beta<180°$，则 $\alpha-\beta$ 的范围是 【 】

A. $-360°<\alpha-\beta<0°$　　B. $-180°<\alpha-\beta<180°$

C. $-180°<\alpha-\beta<0°$　　D. $-360°<\alpha-\beta<360°$

二、填空题

1. 终边在第一、三象限的角平分线上的角可表示为____________.

2. 角 α 是第二象限角，则 $180°+\alpha$ 是第________象限角.

3. 终边在 y 轴负半轴上的角的集合是________________.

4. 在 $-180°$到 $180°$范围内，与 $-240°$角终边相同的角是________.

三、解答题

1. 写出终边在坐标轴上的角的集合(用 0°到 360°的角表示).

2. 写出与15°角终边相同的角的集合，并写出该集合中适合不等式 $-1080° \leqslant \beta < -360°$ 的元素 β.

3. 已知角 α 是第三象限角，试判断 2α，$\frac{\alpha}{3}$ 所在的象限.

4.2 弧度制

本节精讲

例 1 将下列角转化为另一种形式表示：

(1) $-300°$；(2) $\frac{8}{5}\pi$；(3) $\frac{\pi}{3}$.

解：(1) $-300° = -300 \times \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = -\frac{5}{3}\pi\ \text{rad}$；

(2) $\frac{8}{5}\pi = \frac{8}{5}\pi \times \frac{180°}{\pi} = 288°$；

(3) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180°}{\pi} = 60°$.

点评：角度与弧度的互换关键是掌握其换算公式：$1° = \frac{\pi}{180}\ \text{rad} \approx 0.01745\ \text{rad}$.

$1\ \text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.30° = 57°18'$. 另一方面，引进弧度制后，目的是使实数集与弧度制下的任意角建立一个一一对应关系.

例 2 把下列各角化成 $2k\pi + \alpha (0 \leqslant \alpha < 2\pi, k \in \mathbf{Z})$ 的形式，并指出它们是第几象限角.

(1) $-1485°$；(2) $\frac{23}{3}\pi$；(3) $1110°$.

解：(1) $-1485° = -5 \times 360° + 315° = -10\pi + \frac{7}{4}\pi$，

$\therefore\ -1485°$ 是第四象限角.

(2) $\frac{23}{3}\pi = 6\pi + \frac{5}{3}\pi$，

$\therefore$　$\frac{23}{3}\pi$ 是第四象限角.

(3) $1110° = 3\times 360° + 30° = 6\pi + \frac{\pi}{6}$,

$\therefore$　1110°是第一象限角.

点评:与角 α 终边相同的角的一般形式为:$\beta = 2k\pi + \alpha(k\in\mathbf{Z})$,这里注意,前面为 k 与 2π 的乘积,用角度表示,是 360°的整数倍;在同一个代数式中角度制与弧度制不能同时出现,如 $2k\pi + 45°(k\in\mathbf{Z})$ 的表示方法就是错误的.

例 3　已知扇形的周长为 20cm,当它的半径和圆心角各取什么值时,才能使扇形的面积最大?最大面积是多少?

解:设扇形的圆心角为 α,半径为 r,面积为 S,弧长为 l,

依题意有 $l + 2r = 20$.

$\therefore$　$l = 20 - 2r$.

$\therefore$　$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}(20-2r)r = -r^2 + 10r = -(r-5)^2 + 25$

$\therefore$　当 $r = 5$ 时,扇形面积 S 有最大值 25cm^2.

此时 $\alpha = \frac{l}{r} = 2$ rad.

点评:首先应将扇形的面积表示成半径的函数,然后求该函数取得最大值时的半径,再由弧长公式即可求得圆心角,其次应注意面积公式 $S = \frac{1}{2}lR = \frac{1}{2}|\alpha|R^2$.

本节精练

一、选择题

1. 下列命题中,是假命题的是　　【　　】

A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位

B. 1 度的角是周角的 $\frac{1}{360}$,1 弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$

C. 根据弧度的定义,180°的角一定等于 π 弧度的角

D. 不论是用角度制还是用弧度制度量角,都与圆的半径有关

2. 终边在第一、四象限的角的集合可以表示为　　【　　】

A. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

C. $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$　　D. $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi\right)\cup\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$

3. 已知集合 $A = \{\alpha \mid 2k\pi \leqslant \alpha \leqslant (2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}\}$, $B = \{\alpha \mid -4 \leqslant \alpha \leqslant 4\}$,则 $A\cap B$ 等于　【　　】

A. $\varnothing$　　B. $\{\alpha \mid -4 \leqslant \alpha \leqslant 4\}$

C. $\{\alpha \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi\}$　　D. $\{\alpha \mid -4 \leqslant \alpha \leqslant -\pi$ 或 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi\}$

4. $-330°$角的弧度数为　　【　　】

A. $-\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $-\frac{5}{3}\pi$　　D. $-\frac{11}{6}\pi$

5. 角 α 的终边落在区间 $\left(-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right)$ 内,则角 α 所在象限是 【 】

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

二、填空题

1. 若 $\alpha=-4$,则 α 在第________象限.
2. 将下列弧度(或角度)转化为角度(或弧度):

(1) $\frac{5\pi}{4}=$________;(2) $-\frac{7\pi}{8}=$________;(3) $18°=$________;(4) $-105°=$________.

3. 在直径为 10cm 的轮上有一长为 6cm 的弦,P 是弦的中点,轮子以每秒 5 弧度的角速度旋转,则经过 5 秒后点 P 转过的弧长是________.
4. 用弧度制表示第三象限角的集合是____________.
5. 将角 $-\frac{19}{3}\pi$ 表示成 $2k\pi+\alpha$ 的形式(其中 $0\leqslant\alpha<2\pi, k\in\mathbf{Z}$)为____________.
6. 一条弦的长等于半径,则这条弦所对的圆心角等于________ rad.
7. 经过 15 分,时钟分针转过的角度是________度,即为________ rad(用 π 表示).

三、解答题

1. 圆的半径为 5cm,$\frac{\pi}{12}$rad 的圆心角所对的弧长是多少?扇形面积是多少?

2. 求值:$\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}$.

3. 时针指到3点后，当分针在1小时内走55分时，时针到分针的夹角是多少度？多少弧度？

4. 扇形的圆心角度数是72°，半径等于25厘米，求：(1)扇形的周长；(2)扇形的面积.

5. 已知一扇形的周长为$c(c>0)$，当扇形的圆心角为多大时，它的面积最大？最大面积是多少？

4.3　任意角的三角函数

本节精讲

例 1　已知角 α 的终边上一点 $P(-12a,5a)(a\in\mathbf{R}$,且 $a\neq0)$,求 α 的各三角函数值.

分析:应先求出点 P 到原点的距离 r,再利用三角函数的定义求出其比值即可.

解:依题意有 $x=-12a,y=5a$,∴　$r=\sqrt{x^2+y^2}=13|a|$.

(1)若 $a>0$,则有 $r=13a$,

∴　$\sin\alpha=\frac{5}{13},\cos\alpha=-\frac{12}{13},\tan\alpha=-\frac{5}{12},\cot\alpha=-\frac{12}{5},\sec\alpha=-\frac{13}{12},\csc\alpha=\frac{13}{5}$.

(2)若 $a<0$,则 $r=-13a$,

∴　$\sin\alpha=-\frac{5}{13},\cos\alpha=\frac{12}{13},\tan\alpha=-\frac{5}{12},\cot\alpha=-\frac{12}{5},\sec\alpha=\frac{13}{12},\csc\alpha=-\frac{13}{5}$.

点评:角的终边上所给的点的坐标含有字母 a,为了确定角的终边所在象限,决定所求函数值的符号,必须对 a 进行讨论,否则会出现错误.

例 2　若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,证明:$\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

分析:单纯的三角函数证明不等式比较抽象,若借助三角函数线来解决,能起到事半功倍的效果.

证明:设 $P(x,y)$ 为角 α 终边上的任一点,它与原点的距离为 $r(r>0)$.

由 $\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r}$,得　$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{x+y}{r}$.

∵　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,∴　$x>0,y>0$.

又　$x+y>r$,有 $\frac{x+y}{r}>1$.

∴　$\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

点评:三角函数线是利用数形结合思想解决有关问题的重要工具,要善于应用这一知识.

例 3　已知角 θ 的终边上一点 $P(-\sqrt{3},m)$,且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}m$,求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

解:依题意,$r=\sqrt{3+m^2}$,

∵　$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}m$,∴　$\frac{m}{\sqrt{3+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}m$.

解之,得 $m=0$ 或 $m=\pm\sqrt{5}$.

当 $m=0$ 时,$r=\sqrt{3},P(-\sqrt{3},0)$,

∴　$\cos\theta=\frac{x}{r}=-1,\tan\theta=\frac{y}{x}=0$;

当 $m=\sqrt{5}$ 时,$r=2\sqrt{2},P(-\sqrt{3},\sqrt{5})$,

∴　$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{6}}{4},\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$;

当 $m=-\sqrt{5}$ 时，$r=2\sqrt{2}$，$P(-\sqrt{3},-\sqrt{5})$，

$\therefore\quad \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

点评：首先根据条件求出 m，然后要分类讨论，这种分类讨论的思想在三角中会经常用到.

例 4　化简求值：

$a^2\sin(-1350°)+b^2\tan405°-(a-b)^2\cot765°-2ab\cos(-1080°)$.

解：原式 $=a^2\sin(-4\times360°+90°)+b^2\tan(360°+45°)-(a-b)^2\cot(2\times360°+45°)-2ab\cos(-3\times360°)$

$=a^2\sin90°+b^2\tan45°-(a-b)^2\cot45°-2ab\cos0°$

$=a^2+b^2-(a-b)^2-2ab$

$=0$.

点评：利用终边相同的角的同一三角函数值相等，将任意角的三角函数化为 0°～360°间的三角函数，进而求解.

本节精练

一、选择题

1. 下列命题中，正确的是　【　　】

A. 若 $\cos\alpha<0$，则 α 是第二或第三象限角

B. 若 $\alpha>\beta$，则 $\cos\alpha<\cos\beta$

C. 若 $\sin\alpha=\sin\beta$，则 α 与 β 的终边相同

D. α 是第三象限角的充要条件是：$\sin\alpha\cos\alpha>0$ 且 $\cot\alpha\cos\alpha<0$

2. α 是第二象限角，$P(x,\sqrt{5})$ 为其终边上一点，且 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$，则 $\sin\alpha$ 的值为　【　　】

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

3. 设角 α 是第二象限角，且 $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=-\cos\dfrac{\alpha}{2}$，则角 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是　【　　】

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

4. 已知 $|\cos\theta|=\cos\theta$，$|\tan\theta|=-\tan\theta$，$\theta\neq2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 θ 在　【　　】

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

5. α 是第四象限角，则下列函数值一定是负值的是　【　　】

A. $\sin\dfrac{\alpha}{2}$　　B. $\cos\dfrac{\alpha}{2}$　　C. $\tan\dfrac{\alpha}{2}$　　D. $\cos2\alpha$

6. $\dfrac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}+\dfrac{|\cos\alpha|}{\cos\alpha}+\dfrac{\tan\alpha}{|\tan\alpha|}+\dfrac{|\cot\alpha|}{\cot\alpha}$ 的值域是　【　　】

A. $\{-2,4\}$　　B. $\{-2,0,4\}$　　C. $\{1,0,-1\}$　　D. $\{-4,-2,0,2,4\}$

7. $\cos\left(-\dfrac{79}{4}\pi\right)$ 的值为　【　　】

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知角 α 的正弦线和余弦线是长度相同、方向相反的有向线段，则 α 的终边在　【　　】

A. 第一象限角平分线上　　B. 第四象限角平分线上

C. 第二、四象限角平分线上　　D. 第一、三象限角平分线上

二、填空题

1. 已知角 α 的终边过点 $M(-3,1)$，则 $\cot\alpha=$________，$\sec\alpha=$________.

2. 已知角 α 的终边过点 $N(8a,15a)(a\neq0)$，则 $\tan\alpha-\sec\alpha=$________.

3. 当 $0<\alpha<\pi$，则使 $\sin\alpha>\frac{1}{2}$ 和 $\cos\alpha<\frac{1}{2}$ 同时成立的 α 的取值范围是________.

4. 式子 $m^2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+mn\cos\pi-n^2\cos(-\pi)+mn\tan\frac{3\pi}{4}\cdot\sec2\pi$ 的值为________.

5. 已知角 α 的终边经过点 $(3a-9,a+2)$，且 $\cos\alpha\leq0$，$\sin\alpha>0$，则 a 的取值范围是________.

三、解答题

1. 根据条件确定 α 所在象限角：

(1) $2\sin\alpha+3\cos\alpha=0$；

(2) $\tan\alpha>0$ 且 $\sin\alpha+\cos\alpha>0$.

2. 设 $0\leq\theta<2\pi$，若 $\sin\theta<0$ 且 $\cos2\theta<0$，求 θ 的取值范围.

3. 求函数 $y=\sqrt{\frac{1}{2}-\sin x}+\sqrt{-\cos x}$ 的定义域.

4. 已知 $|\cos\theta|=\cos\theta$, $|\tan\theta|=-\tan\theta$, 求 $\frac{\theta}{2}$ 的终边所在位置.

5. 利用三角函数的定义证明恒等式: $\frac{\cot\alpha+\csc\alpha-1}{\cot\alpha-\csc\alpha+1}=\cot\alpha+\csc\alpha$.

4.4　同角三角函数的基本关系式

本节精讲

例 1　(1) 已知 $\cot\alpha=-3$, 求 $\tan\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的值; (2) 已知 $\sin\alpha=m(|m|\leqslant 1)$, 求 $\tan\alpha$ 的值.

解: (1) $\because\ \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$, $\therefore\ \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=-\frac{1}{3}$.

$\because\ \tan\alpha=-\frac{1}{3}<0$, $\therefore\ \alpha$ 是第二或第四象限角.

当 α 是第二象限角, 有

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{9}{10},$$

$\therefore\quad \cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}.$

$\therefore\quad \sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}.$

当 α 是第四象限角,则

$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10},\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$

(2)①当 $m=0$ 时,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0.$

②当 $m=\pm1$ 时,α 的终边落在 y 轴上,$\tan\alpha$ 无意义.

③当 α 在第一、四象限时,$\cos\alpha>0$.

$\therefore\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-m^2},$

从而　$\tan\alpha=\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}=\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}.$

当 α 在第二、三象限时,$\cos\alpha<0$,

$\therefore\quad \cos\alpha=-\sqrt{1-m^2},$

从而　$\tan\alpha=\frac{m}{-\sqrt{1-m^2}}=-\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}=\frac{m\sqrt{1-m^2}}{m^2-1}.$

点评:由某角的一个三角函数值求该角其他三角函数值时,一般可按照先求倒数关系,再求平方关系(通常平方关系只能用一次),最后求商数关系. 但要注意平方关系中正、负号的选取,如果已知三角函数值含有字母,平方关系中正、负号不定,需要讨论角所在象限以便确定符号.

例 2　已知 $\tan\alpha=2$,求值:(1)$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$;(2)$\sin\alpha\cos\alpha$;(3)$\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+1$.

解:(1)$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{2+1}{2-1}=3.$

(2)$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2}{2^2+1}=\frac{2}{5}.$

(3)$\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+1=\frac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1=\frac{\tan^2\alpha-2}{\tan^2\alpha+1}+1=\frac{2^2-2}{2^2+1}+1=\frac{7}{5}.$

点评:解决这类题的思路是先讨论 α 在第一或第三象限时 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值,再求出所要求的值,但这样计算量太大. 因(1)中分母为含 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的一次齐次式,可转化为 $\tan\alpha$ 来求解. (2)是先把分母看作 1,并用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 来替代.

例 3　化简下列各式:

(1)$\sin^2\alpha\cdot\tan\alpha+\cos^2\alpha\cdot\cot\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;(2)$\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}$.

(1)**解法一**:

$$原式=\frac{\sin^2\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{\sin^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

解法二：

$$原式=(\sin^2\alpha\tan\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)+(\cos^2\alpha\cot\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=\tan\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cot\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$

$$=\tan\alpha+\cot\alpha$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

(2) $$原式=\frac{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}{1-(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)}$$

$$=\frac{1-[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha]}{1-[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha](\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}$$

$$=\frac{1-1+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1-1+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}.$$

点评：(1)在解法一中，将切化为弦，再化简，仍然是按减少函数种类的思想进行的. 这种切割化弦的思想是一种重要的三角恒等变换的思想.

(2)解法二中的逆用公式将 $\sin\alpha\cos\alpha$ 用 $\tan\alpha\cos^2\alpha$ 表示，较为灵活.

(3)三角函数式的化简结果应最简.

例 4　证明：$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

分析：本例可有多种证明方法，其共同点是“盯住目标，逐步转化”.

证法一：由左到右，以右式为“果”，左式通分，分子因式分解以产生因子 $\cos\alpha-\sin\alpha$：

$$左边=\frac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha},$$

此时，分子还缺少“2”这个因子，多余 $1+\sin\alpha+\cos\alpha$ 这个因子，故分子分母同乘以 2，并尽量设法使分母产生因子 $1+\sin\alpha+\cos\alpha$，以便约分.

$$左边=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha+2\cos\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=右边.$$

∴　原式成立.

证法二：仍由左到右，以右式为“果”，因右式分母有因子 $1+\sin\alpha+\cos\alpha$，故将左式分母分