SHUXUE FENXI

数学分析
专题研究

林木元 著

ZHUANTI YANJIU

广西民族出版社

数学分析专题研究

林木元　著

广西民族出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学分析专题研究/林木元著．—南宁：广西民族出版社，2007.3

ISBN 978-7-5363-5272-8

Ⅰ.数… Ⅱ.林… Ⅲ.数学分析—研究 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 032229 号

数学分析专题研究

林木元 著

出版发行	**广西民族出版社**（地址：南宁市桂春路 3 号 邮政编码：530028）
发行电话	(0771)5523216 5523226 传真：(0771)5523246
E-mail	CR@gxmzbook.cn
责任编辑	黄 莹
封面设计	黄 莹
责任校对	郑季銮
责任印制	蓝剑风
印 刷	梧州商务印刷厂
规 格	890 毫米×1240 毫米 1/32
印 张	6
字 数	156 千
版 次	2007 年 4 月第 1 版
印 次	2007 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5363-5272-8/G・2083 定价：18.00 元

如发现印装质量问题，影响阅读，请与出版社联系调换。 电话：(0771)5523216

序

数学分析是数学学科一门极为重要的基础课，内容十分丰富，所需学习时间也比较长. 学好、掌握好这门课程，是数学系每个学生的愿望. 在学习过程中如何深刻理解数学分析课程中的一些重要的基本概念和关键问题，是每个数学系学生关心和急切需要解决的问题. 林木元同志所著《数学分析专题研究》一书，正好符合以上要求. 它对涉及数学分析课程教学的老师和正在数学系学习的学生，很实用，很有启迪，且具有一定的魅力，有助于促进创新型人才的培养.

本书是林木元同志在三十多年的教学实践中，结合教学搞科学研究的结晶. 结合教学搞科学研究，是高等学校教师提高教学质量的必由之路. 在高等学校，每个教师都必须结合本专业、本课程积极地进行科学研究. 所谓的"纯教师"是不存在的，因为对一个教学好、深受学生欢迎的高等学校教师来说，它既表明该教师对本专业、本课程内容的熟练，同时也表明该教师对本专业、本课程的教学方法的研究一定是下了工夫的. 而对本专业、本课程教学方法的研究是高等学校教师科学研究的重要内容之一. 本书的"数列极限概念教学研究"就是一例.

从本书中可以看到，林木元同志不仅结合自身的教学工作对本课程的教学方法深入细致地进行了研究，而且对本课程的教学内容从深度和广度上作了不少科学研究，写出了很多好的专题研究. 工夫不负有心人，《数学分析专题研究》一书终于出版了，这确是难能可贵的.

本人认为，本书是数学分析课程很好的教学参考书，特别对在读的数学系学生拓展学习思路大有帮助.

郑步南

广西师范大学数学科学学院

2006 年 5 月　桂林・王城

目　　录

第一章　函　数

第二章　微分学

第三章　积分学

附录　微分方程

第一章 函 数

§1.1 一类级数的求和

算术级数：$a,a+d,a+2d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots$ (1)

与几何级数：$1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$ (2)

是大家熟知的两个基本级数，且它们的前 n 项和公式也是众所周知的.从这两个基本级数出发，可构造出一类新的级数：

$$a,(a+d)q,(a+2d)q^2,\cdots,[a+(n-1)d]q^{n-1},\cdots \tag{3}$$

显然，级数(3)是每一项均由级数(1)和(2)的对应项之乘积而得到.为了下面叙述方便，我们不妨称级数(3)为差比级数.在此主要研究这类级数的前 n 项和公式及若干应用.

定理 差比级数(3)的前 n 项和公式为

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{1}{q-1}\left\{a(q^n-1)+d\left[(n-1)q^n-\dfrac{q^n-q}{q-1}\right]\right\} & (q\neq1),\\ na+\dfrac{n(n-1)}{2}d & (q=1).\end{cases}$$

证明 当 $q=1$ 时，显然，差比级数就是算术级数(1)，此时，其前 n 项和公式就是我们熟悉的算术级数的前 n 项和公式 $S_n=na+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

当 $q\neq1$ 时，差比级数的前 n 项和

$$\begin{aligned}S_n&=a+(a+d)q+(a+2d)q^2+(a+3d)q^3+\cdots\\&\quad+[a+(n-1)d]q^{n-1}\\&=a+(aq+dq)+(aq^2+2dq^2)+\cdots\\&\quad+[aq^{n-1}+(n-1)dq^{n-1}]\\&=a(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})+d[q+2q^2+3q^3+\cdots\\&\quad+(n-1)q^{n-1}]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=a\frac{1-q^n}{1-q}+d[(q+q^2+\cdots+q^{n-1})+(q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})\\
&\quad+(q^3+q^4+\cdots+q^{n-1})+\cdots+(q^{n-2}+q^{n-1})+q^{n-1}]\\
&=a\frac{1-q^n}{1-q}+d\left(q\frac{1-q^{n-1}}{1-q}+q^2\frac{1-q^{n-2}}{1-q}+\cdots\right.\\
&\quad\left.+q^{n-2}\frac{1-q^2}{1-q}+q^{n-1}\right)\\
&=a\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{dq}{1-q}[(1-q^{n-1})+q(1-q^{n-2})+\cdots\\
&\quad+q^{n-3}(1-q^2)+q^{n-2}(1-q)]\\
&=a\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{dq}{1-q}[(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2})-(n-1)q^{n-1}]\\
&=a\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{dq}{q-1}\left[(n-1)q^{n-1}-\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right]\\
&=\frac{1}{q-1}\left\{a(q^n-1)+d\left[(n-1)q^n-\frac{q^n-q}{q-1}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

这里的证明是先将差比级数前 n 项和的各项拆散，然后重新分组，使每一组都成为几何级数之和，最后应用几何级数前 n 项和公式. 当然也可以采用数学归纳法来证明.

特别，令定理中的 $d=0$，且 $q\neq1$ 时，差比级数便成为几何级数，此时

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}\quad(q\neq1).$$

差比级数前 n 项和公式有诸多应用，下面仅举几例予以说明.

例 1 设 $x\neq1$，求 n 次多项式 $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$ 的和 S_n.

解 令定理中的 $a=d=q=x\neq1$，由定理，得

$$
\begin{aligned}
S_n(x)&=\frac{1}{x-1}\left\{x(x^n-1)+x\left[(n-1)x^n-\frac{x^n-x}{x-1}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{x-1}\left[x^{n+1}-x+(n-1)x^{n+1}-\frac{x^{n+1}-x^2}{x-1}\right]
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{x-1}\left(nx^{n+1}-x-\frac{x^{n+1}-x^{2}}{x-1}\right) \quad (x\neq 1).$$

显然，当 $x=1$ 时，为自然数级数.

例 2 求 $S_n=nx+(n-1)x^2+\cdots+2x^{n-1}+x^n \quad (x\neq 1)$.

解 $S_n=x[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$，

令上式中 $a=n,d=-1,q=x\neq 1$，由定理，得

$$S_n=\frac{x}{1-x}\left(n-x\,\frac{1-x^n}{1-x}\right)=\frac{nx}{1-x}-\frac{x^2(1-x^n)}{(1-x)^2}.$$

例 3 求 $S_{n+1}=1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+\cdots+n\cdot 2+(n+1)$.

解 $S_{n+1}=(n+1)+n\cdot 2+(n-1)\cdot 2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-1}$
$+1\cdot 2^n$，

令上式中 $a=n+1,d=-1,q=2$，依定理，得

$S_{n+1}=2^{n+2}-(n+3)$.

例 4 求 $S_n=5+55+555+\cdots+\underbrace{55\cdots5}_{n个}$.

解
$$\begin{aligned}S_n&=5\times1+5\times11+5\times111+\cdots+5\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}\\&=5\times(1+11+111+\cdots+\underbrace{11\cdots1}_{n个})\\&=5\times[1+(1+10)+(1+10+100)+\cdots\\&\quad+(1+10+\cdots+1\underbrace{00\cdots0}_{(n-1)个})]\\&=5\times[n+(n-1)10+(n-2)10^2+\cdots+2\cdot10^{n-2}\\&\quad+10^{n-1}]\end{aligned}$$

中，括号内是差比级数，令 $a=n,d=-1,q=10$，由定理，得

$$S_n=\frac{5}{10-1}\left\{n(10^n-1)+(-1)\left[(n-1)10^n-\frac{10^n-10}{10-1}\right]\right\}$$

$$=\frac{5}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right).$$

例 5 求数列 $1,\frac{4}{2^2},\frac{6}{2^3},\cdots,\frac{2n}{2^n},\cdots$ 的前 n 项和.

解 $S_n=1+\frac{4}{2^2}+\frac{6}{2^3}+\cdots+\frac{2n}{2^n}$

$$=\frac{2}{2}+\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2}+(n-1)\frac{1}{2^{n-1}},$$

对照定理,在此令 $a=1,d=1,q=\frac{1}{2}$,于是有

$S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}.$

可见,熟练掌握差比级数的求和公式,对解决这类数学问题是很有用处的.

§ 1.2 高阶等比级数

作为杨辉三角应用之一的高阶等差级数已为大家所熟悉(见文献[1]),但是有关研究高阶等比级数的文章所见甚少.本文介绍高阶等比级数的概念和判定、通项公式以及敛散性的判别.设给定数列$\{u_n\}$:

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots \tag{1}$$

不是常数列,且各项均不为0.归纳地定义

$$\begin{cases} \Delta_0 u_i = u_i, \\ \Delta_1 u_i = \dfrac{\Delta_0 u_{i+1}}{\Delta_0 u_i}, \\ \Delta_2 u_i = \dfrac{\Delta_1 u_{i+1}}{\Delta_1 u_i}, \quad i=1,2,3,\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_k u_i = \dfrac{\Delta_{k-1} u_{i+1}}{\Delta_{k-1} u_i}. \end{cases}$$

我们将数列$\{\Delta_j u_n\}$($j=0,1,2,\cdots,k,\cdots$)称为数列(1)的j阶等比数列.如果数列(1)的k阶等比数列是各项不等于1的常数列,则称数列(1)为k阶等比数列.显然此时数列(1)的任何高于$k+1$阶的等比数列必是各项等于1的常数列.普通的等比数列(常数列除外)都是一阶等比数列,反之亦然.

定理1 如果数列(1)是高阶等比数列,则

$$u_n = \prod_{r=0}^{n-1} (\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r}. \tag{2}$$

证明 当$n=1$时,显然定理成立.当$n=2$时,

$$u_2 = \prod_{r=0}^{1} (\Delta_r u_1)^{C_1^r} = (\Delta_0 u_1)^{C_1^0} \cdot (\Delta_1 u_1)^{C_1^1} = u_1 \cdot \frac{u_2}{u_1} = u_2.$$

定理亦成立.假设当$n=k$时定理成立,就是

$$u_k = \prod_{r=0}^{k-1} (\Delta_r u_1)^{C_{k-1}^r}.$$

当 $n=k+1$ 时,必有

$$u_{k+1}=\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_k^r}.$$

事实上,由于数列(1)是高阶等比数列,则$\{\Delta_1 u_n\}$也必是高阶等比数列,其阶数等于数列(1)的阶数减 1. 由归纳假设知

$$\Delta_1 u_k=\prod_{r=0}^{k-1}(\Delta_{r+1}u_1)^{C_{k-1}^r}=\prod_{r=1}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_{k-1}^{r-1}},$$

于是

$$\begin{aligned}
u_{k+1}&=\Delta_0 u_{k+1}=\Delta_0 u_k\cdot\Delta_1 u_k\\
&=\prod_{r=0}^{k-1}(\Delta_r u_1)^{C_{k-1}^r}\cdot\prod_{r=1}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_{k-1}^{r-1}}\\
&=(\Delta_0 u_1)^{C_{k-1}^0}\cdot\prod_{r=1}^{k-1}(\Delta_r u_1)^{C_{k-1}^r}\cdot\prod_{r=1}^{k-1}(\Delta_r u_1)^{C_{k-1}^{r-1}}\cdot(\Delta_k u_1)^{C_{k-1}^{k-1}}\\
&=(\Delta_0 u_1)^{C_{k-1}^0}\cdot\prod_{r=1}^{k-1}(\Delta_r u_1)^{C_{k-1}^r+C_{k-1}^{r-1}}\cdot(\Delta_k u_1)^{C_{k-1}^{k-1}}\\
&=(\Delta_0 u_1)^{C_k^0}\cdot\prod_{r=1}^{k-1}(\Delta_r u_1)^{C_k^r}\cdot(\Delta_k u_1)^{C_k^k}\\
&=\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_k^r}.
\end{aligned}$$

根据归纳法,由此定理获证.

推论 如果数列(1)是 k 阶等比数列,当 $n>k$ 时,则

$$u_n=\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r}. \tag{3}$$

证明 假设数列(1)是 k 阶等比数列,则它的任何比 k 阶高的等比数列的各项都等于 1,就是当 $r\geqslant k+1$ 时,有

$\Delta_r u_i=1, i=1,2,3,\cdots$

当然有

$\Delta_r u_1=1, r=k+1,k+2,k+3,\cdots,n-1,\cdots$

于是

$$u_n=\prod_{r=0}^{n-1}(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r}$$
$$=\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r}\cdot\prod_{r=k+1}^{n-1}(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r}$$
$$=\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r}.$$

此推论告诉我们,若已给出 k 阶等比数列的前 $k+1$ 项的值,那么由式(3)便可以把它的任何项 $u_n(n>k+1)$ 的值确定出来,从而这个数列就被唯一确定了.

例 已知三阶等比数列$\{u_n\}$的前四项依次是 5,20,240,17290,试求该数列的通项.

解 容易知道 $\Delta_0 u_1=5,\Delta_1 u_1=4,\Delta_2 u_1=3,\Delta_3 u_1=2$.

当 $n>4$ 时,有

$$u_n=\prod_{r=0}^{3}(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r}$$
$$=(\Delta_0 u_1)^{C_{n-1}^0}(\Delta_1 u_1)^{C_{n-1}^1}(\Delta_2 u_1)^{C_{n-1}^2}(\Delta_3 u_1)^{C_{n-1}^3}$$
$$=5\cdot 4(n-1)\cdot 3\cdot\frac{1}{2!}(n-1)(n-2)\cdot$$
$$2\cdot\frac{1}{3!}(n-1)(n-2)(n-3),$$

这里对于 $n\leqslant 4$ 时亦成立.

定理 2 对于数列(1)的 j 阶等比数列,它的第 n 项可以用数列(1)的从第 n 项开始的连续 $j+1$ 项表示为

$$\Delta_j u_n=\prod_{r=0}^{j}u_{n+j-r}{}^{(-1)C_j^r}. \tag{4}$$

此定理可以仿照定理 1 应用数学归纳法证明.

假设数列(1)为 k 阶等比数列,此时

$\Delta_{k+1}u_n=1(n=1,2,3,\cdots)$,

在式(4)中取 $j=k+1$,得

$$\prod_{r=0}^{k+1}u_{n+k+1-r}{}^{(-1)^r C_{k+1}^r}=1.$$

若将此式变形，易得到

$$\prod_{p=0}^{k+2} u_{n+p-1}{}^{(-1)^{k+2-p}C_{k+1}^{p-1}}=1. \tag{5}$$

于是我们得到下述推论.

推论 数列(1)为 k 阶等比数列的充要条件是式(5)成立.

证明 至于充分性，其证明并不困难. 设式(5)成立，依上述倒推知 $\Delta_{k+1}u_n=1, n=1,2,3,\cdots$，而 $\dfrac{\Delta_k u_{n+1}}{\Delta_k u_n}=\Delta_{k+1}u_n$，由此并应用归纳法可证

$\Delta_k u_n=\text{cosst}\neq 1(n=1,2,3,\cdots)$.

可见 $\{\Delta_k u_n\}$ 是一个非 1 的常数列.

故此时数列(1)是 k 阶等比数列.

例如，前面例题中给出的数列 5, 20, 240, 17280, 14929920, …是三阶等比数列，就有

$$\prod_{p=1}^{5} u_p{}^{(-1)^{5-p}C_4^{p+1}}=u_1u_2^{-4}u_3^6u_5^{-4}=\frac{5\cdot 240^6\cdot 14929920}{20^4\cdot 17280^4}.$$

定理 3 数列(1)为 k 阶等比数列的充要条件是它的通项中所含的 $k+1$ 个乘积因子高次幂的次数为关于 n 的 k 次有理整函数.

证明 关于必要性由定理 1 及其推论知晓. 下面证明充分性.

我们不妨设

$$u_n=f_0(n)=\prod_{r=0}^{k} a_r^{n^r},$$

其中 $a_r\neq 0(r=0,1,2,\cdots,k)$，且 $a_k\neq 1$，则

$$\Delta_1 u_n=\frac{f_0(n+1)}{f_0(n)}=\frac{\prod\limits_{r=0}^{k} a_r^{(n+1)^r}}{\prod\limits_{r=0}^{k} a_r^{n^r}}.$$

显然 $(n+1)^r-n^r=\sum\limits_{p=0}^{r} C_r^p n^{r-p}$ 是 n 的 $r-1$ 次多项式，因而 $\Delta_1 u_n$ 的乘积因子中最高次幂的次数就是 $(n+1)^k-n^k=\sum\limits_{p=1}^{k} C_k^p n^{k-p}$

的最高次项 kn^{k-1}，于是 $\Delta_1 u_n$ 中含有的 k 个乘积因子最高次幂的次数为 kn^{k-1}. 记

$$\Delta_1 u_n = f_1(n) = \sum_{r=0}^{k-1} b_r^{n^r},$$

其中 $b_r \neq 0 (r=0,1,2,\cdots,k-1)$，且 $b_{k-1} = a_k^k \neq 1$，则

$$\Delta_2 u_n = \frac{f_1(n+1)}{f_1(n)} = \sum_{r=1}^{k-1} b_r^{(n+1)^r - n^r},$$

其中所含的 $k-1$ 个乘积因子最高次幂的次数为 $(k-1)n^{k-2}$. 记

$$\Delta_2 u_n = f_2(n) = \sum_{r=0}^{k-2} C_r^{n^r},$$

其中 $C_r \neq 0 (r=0,1,2,\cdots,k-2)$，且 $C_{k-2} = b_{k-1}^{k-1} = a_k^{k(k-1)} \neq 1$.
依此类推，必可得到

$$\Delta_k u_n = f_k(n) = a_k^k \neq 1.$$

这就表明 $\{u_n\}$ 是 k 阶等比数列.

推论 如果数列(1)的各项都是正的实数，则它为 k 阶等比数列的充要条件是数列

$$\log_a u_1, \log_a u_2, \log_a u_3, \cdots, \log_a u_n, \cdots \tag{6}$$

为 k 阶等差数列，其中 $a>0, a\neq 1$.

证明 先证必要性. 因为数列(1)是 k 阶等比数列，其通项为

$$u_n = \prod_{r=0}^{k} (\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r},$$

其中 $\Delta_r u_1 > 0, r=0,1,2,\cdots,k_n$，则有

$$\log_a u_n = \log_a \prod_{r=0}^{k} (\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r} = \sum_{r=0}^{k} C_{n-1}^r \log_a(\Delta_r u_1).$$

可见数列(6)的通项是关于 n 的 k 次多项式，根据文献[2]定理2，知数列(6)为 k 阶等差数列.

充分性. 设数列(6)为 k 阶等差数列，由文献[2]定理1知其通项为

$$\log_a u_n = \sum_{r=0}^{k} C_{n-1}^r \overline{\Delta_r u_1},$$

其中$\overline{\Delta_r u_1}$表示数列(6)的 r 阶等差数列的首项，易证

$$\overline{\Delta_r u_1}=\log_a(\Delta_r u_1).$$

由于 $\sum\limits_{r=0}^{k} C_{n-1}^{r}\log_a(\Delta_r u_1)=\sum\limits_{r=0}^{k}\log_a(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^{r}}$

$$=\log_a\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^{r}},$$

$$\therefore u_n=\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^{r}}.$$

根据定理 3 知数列(1)是 k 阶等比数列.

定理 4 设 k 阶等比数列$\{u_n\}$的前 n 项的积为 $\prod_n$，则数列

$$\prod\nolimits_1,\prod\nolimits_2,\prod\nolimits_3,\cdots,\prod\nolimits_n,\cdots$$

是 $k+1$ 阶等比数列.

证明 本定理由数列$\{\prod_n\}$与数列$\{u_n\}$之间的关系 $u_n=\dfrac{\prod_n}{\prod_{n-1}}$ 直接推得.

对于 k 阶等比数列$\{u_n\}$，利用通项公式(3)，容易计算它的前 n 项的积. 因为只要注意到组合公式

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_{n-1}^r=C_n^{r+1}(n>r),$$

便有

$$\begin{aligned}\prod\nolimits_n&=u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdot\cdots\cdot u_n\\&=\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_0^r}\cdot\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_1^r}\cdot\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_2^r}\\&\quad\cdot\cdots\cdot\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_{n-1}^r}\\&=\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_0^r+C_1^r+C_2^r+\cdots+C_{n-1}^r}\\&=\prod_{r=0}^{k}(\Delta_r u_1)^{C_n^{r+1}}.\end{aligned}$$

于是我们得到下述定理.

定理 5 设$\{u_n\}$是 k 阶等比数列,则它的前 n 项的积为

$$\prod_n = \prod_{r=0}^{k} (\Delta_r u_1)^{C_n^{r+1}} . \tag{7}$$

如果数列(1)是 k 阶等比数列,则称无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{8}$$

为 k 阶等比级数.

定理 6 对于 k 阶等比级数(8),当$|\Delta_k u_1|<1$ 时收敛;当$|\Delta_k u_1|>1$ 时发散.

证明 因为级数(8)为 k 阶等比级数,根据定理 3,不妨设它的通项为

$$u_n = \prod_{r=0}^{k} a_r^{n^r} (a_r \neq 0,\ r=0,1,2,\cdots,k, a_k \neq 1).$$

由定理 3 充分性的证明得知

$\Delta_k u_n = a_k^{k!},\ n=1,2,3,\cdots$

令 $a=\min\{|a_0|,|a_1|,\cdots,|a_{k-1}|\}$,

$A=\max\{|a_0|,|a_1|,\cdots,|a_{k-1}|\}$,

则有 $a \leqslant |a_i| \leqslant A,\ i=0,1,2,\cdots,k-1.$

当 $n>k$ 时,显然有 $n^k > \dfrac{n^k-1}{n-1}$.

于是当$|\Delta_k u_1|>1$ 时,$|a_k|>1$,

$$|u_n| = \prod_{r=0}^{k} |a_r|^{n^r} \geqslant a^{\frac{n^k-1}{n-1}} |a_k|^{n^k} \to \infty \ (n\to\infty),$$

此时级数(8)发散.

当$|\Delta_k u_1|<1$ 时,$|a_k|<1$,

$$|u_n| \leqslant A^{\frac{n^k-1}{n-1}} |a_k|^{n^k} \to 0 \ (n\to\infty).$$

因为 $$\frac{A^{\frac{(n-1)^k-1}{n}} |a_k|^{(n+1)^k}}{A^{\frac{n^k-1}{n-1}} |a_k|^{n^k}} = A^{\frac{(n-1)(n+1)^k - n^{k+1}+1}{n(n-1)}} |a_k|^{(n+1)^k - n^k}$$