21世纪数学系列教材

线性代数

（高职、成人教育适用）

（第二版）

林升旭　邓爱平

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

- 重视能力的培养　关注素质的提高
- 例题典范　习题分层（基础、提高、综合）
- 结构严谨　条理清晰
- 深入浅出　学以致用

21世纪数学系列教材

(高职、成人教育适用)

线性代数

(第二版)

林升旭　邓爱平

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(第二版)/林升旭　邓爱平
武汉:华中科技大学出版社,2006年10月
ISBN 7-5609-2002-0

Ⅰ. 线…
Ⅱ. ①林…　②邓…
Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. O151.2

线性代数(第二版)　林升旭　邓爱平

责任编辑:李　德　封面设计:刘　卉
责任校对:章　红　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉众心设计室
印　刷:湖北科学技术出版社黄冈印刷厂

开本:787×960　1/16　印张:13.5　字数:236 000
版次:2006年10月第2版　印次:2006年10月第6次印刷　定价:19.00元
ISBN 7-5609-2002-0/O·191

内 容 提 要

本书根据教育部关于高等教育工科线性代数教学基本要求，在作者多年来教学实践的基础上编写，适用于教学主导型的高等院校.由华中科技大学数学系老师编写.

本书共分六章，内容有行列式，矩阵运算，线性方程组，矩阵的特征值与特征向量，二次型及向量空间.针对高职和成人教育的特点，论述力求详尽、易懂，内容注意适用、够用.为便于自学与复习，每章有内容小结，每节配有思考题和基本练习题，每章末配有综合练习题，书末附有习题答案和提示，以便自检.

本书还适合作为高等工科院校各类办学形式的本、专科的教学用书，也可供工程技术人员学习参考.

二版前言

本书是根据教育部高等教育工科线性代数的基本要求，在作者多年来的教学实践的基础上编写而成的. 在初版若干年后，这次修订增删了部分章节内容，并将原书遗留的错误加以改正.

线性代数是高等工科院校的一门基础课，有较强的逻辑性和抽象性. 考虑到成人教学的特点，为适应成人教育的要求与发展，本书在编写上力求编排紧凑，内容适度，条理清楚，循序渐进，文字叙述力求简明，深入浅出，具有如下特点.

(1) 突出基本概念、理论和方法. 尽量从提出问题或引入具体易懂的例子与实例阐明重要的概念、结论与方法，并列举了较多的典型例子帮助读者加深理解；对某些定理则不拘泥于繁琐的理论推导，而用例子加以剖析引导，注意其应用，从而减少理论上的难度，使之易教易学.

(2) 每章有内容小结，使读者对整章的知识有清晰、全面的概括和了解.

(3) 有丰富的练习题. 题型有思考判断题，选择题，填空题，计算题和适量的证明题. 每小节有基本练习题，每章末有综合练习题，分 A 组和 B 组. A 组题适合于少学时的专科，B 组题适合于本科及学有余力的学生. 书末附有练习答案，较难题目还给出了适当提示，便于自学与检查.

本书适于作为高等工科院校各类办学形式的本、专科教学用书. 本科授完全书需 48 学时，学时为 40 学时左右的专科、函授等，则根据专业的要求，采用 1～3 章内容，选修 4～5 章的部分内容，并选用 A 组练习题. 第 6 章中坐标变换及线性变换(打 * 号)的内容是为本科计算机等专业而编写的.

本书在编写过程中，得到了华中科技大学成人教育学院和数学系领导的大力支持和热心帮助，编者一并表示衷心感谢。

限于作者水平，书中错误在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2004 年 12 月

前　言

本书是根据高等学校工程本、专科线性代数教学基本要求和全国成人高等教育工科线性代数的基本要求，在作者多年的教学实践的基础上编写而成的.

线性代数是高等工科院校的一门基础课，有较强的逻辑性和抽象性. 考虑到成人教学的特点，为适应成人教育的要求与发展，本书在编写上力求编排紧凑，内容适度，条理清楚，循序渐进，文字叙述力求简明，深入浅出，具有如下特点.

(1)突出基本概念，理论和方法. 尽量从提出问题或引入具体易懂的例子与实例阐明重要的概念，结论与方法，并列举了较多的典型例子帮助读者加深理解；对某些定理则不拘泥于繁琐的理论推导，而用例子加以剖析引导，注意其应用，从而减少理论上的难度，使之易教易学.

(2)每章有内容小结，使读者对整章的知识有清晰、全面的概括和了解.

(3)有丰富的练习题. 题型有思考判断题，选择题，填空题，计算题和适量的证明题. 每小节有基本练习题，每章末有综合练习题，分 A 组和 B 组. A 组题适合少学时的专科，B 组题适合本科及学有余力的学生. 书末附有练习答案，较难题目还给出了适当提示，便于自学与检查.

本书适于作为高等工科院校各类办学形式(函授，夜大，脱产专科，自学考试，高职)的本、专科教学用书. 本科授完全书需 48 学时，学时为 40 学时左右的专科、函授等，则根据专业的要求，采用 1～3 章内容，选修 4～5 章的部分内容，并选用 A 组练习题. 第 6 章中坐标变换及线性变换(打 * 号)的内容是为本科计算机等专业而编写的.

本书在编写过程中，得到了华中理工大学成人教育学院和数学系领导的大力支持和热心帮助，编者一并表示衷心感谢.

限于作者水平，书中错误在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

1999 年 5 月

目　录

第一章　行　列　式

线性代数研究的主要对象是线性函数，对线性函数的研究可转化为对线性方程组解的讨论，而行列式正是因解线性方程组的需要建立起来的，因此行列式是研究线性代数的一个基本工具. 这一章将由简单的二、三阶行列式推广到 n 阶行列式，然后讨论 n 阶行列式的基本性质及其计算方法，最后介绍利用行列式来解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

1.1　二、三阶行列式

行列式的概念源于解线性方程组，其中最简单的是二元线性方程组，它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 a_{ij} 表示第 i 个方程中第 j 个变量的系数，b_i 表示第 i 个方程的常数项.

用消元法来解方程组(1.1). 令第一、二个方程分别乘以 a_{22}，a_{12}，然后两式相减，消去未知数 x_2，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

同理消去未知数 x_1，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了便于叙述和记忆，我们引入如下记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

称为**二阶行列式**，其中 a_{ij} 称为这个二阶行列式第 i 行第 j 列元素，横排为行，竖排为列.

由(1.2)式知，二阶行列式是四个数排成两行两列，用一种称为**对角线法则**计算得出的数. 从左上角到右下角(称主对角线)上元素相乘，带正号，从右上角到左下角(称副对角线)上元素相乘，带负号，两个乘积项的代数和就是二阶行列式的值.

当 $D\neq 0$ 时，利用二阶行列式，方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\tag{1.3}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

D_1，D_2 分别是 D 的第 1，2 列元素换成常数项所得行列式. 因 D 的每个元素是方程组(1.1)的未知数系数，且按原顺序排列，故称 D 为方程组(1.1)的**系数行列式**.

例 1 用二阶行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=-1, \\ 5x_1+3x_2=3. \end{cases}$$

解 计算三个二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1,\quad D_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-6,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=11.$$

由(1.3)式得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-6,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=11.$$

对于三元三个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}\tag{1.4}$$

与解二元线性方程组类似，先由第一、二两个方程消去未知数 x_3，得到一个只含有 x_1，x_2 的二元方程，再由第一、三两个方程(或由第二、三方程)消去未知数 x_3，得另一个只含有 x_1，x_2 的二元方程，由所得两方程消去 x_2，可得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

记 x_1 的系数为

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},\end{aligned}\tag{1.5}$$

称为**三阶行列式**. 其等号左边是九个数排成的三行三列，右边是六个乘积项的代数和，仍采用对角线法则计算：主对角线上的三个元素之积及平行于主对角线的三个元素之积带正号，副对角线上三个元素之积及平行于副对角线的三个元素之积带负号. 如图 1.1 所示，带正号的项用实线连接，带负号的项用虚线连接.

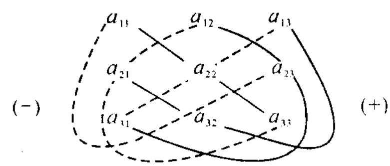

图 1.1　系数行列式的计算

(1.5)式的 D 称为方程组(1.4)的系数行列式.同样地,记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.$$

当 $D\neq0$ 时,x_1 可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

类似地,可解得

$$x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

分别为 D 的第二、三列换为常数项所得行列式.

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ x_1-x_2+2x_3=5, \\ 2x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$$

解　用对角线法则计算行列式,得

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,\quad D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=16,\quad D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=24,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

用对角线法则计算二、三阶行列式，既直观又快捷，但对于高于三阶的行列式，对角线法则就不再适用. 为给出 n 阶行列式的定义，下面先讨论排列的有关性质.

练 习 1.1

1. 在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的展开式中，

(1) 含 a_{12} 的项有几个？各带什么符号？

(2) 含 $a_{12}a_{21}$ 的项有几个？各带什么符号？

(3) 有含 $a_{12}a_{32}$ 的项吗？

2. 计算下列二、三阶行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

3. 试用二、三阶行列式的定义证明下列各式：

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11}+a_{31} & ka_{12}+a_{32} & ka_{13}+a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

4. 解方程组

(1) $\begin{cases} x_1\cos\theta-x_2\sin\theta=a, \\ x_1\sin\theta+x_2\cos\theta=b; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 8x+3y=2, \\ 6x+2y=3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 2x \quad -z=1, \\ 2x+4y-z=1, \\ -x+8y+3z=2. \end{cases}$

1.2 n 元排列

1.2.1 排列的有关概念

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 排成的一个有序数组，称为一个 **n 元排列**.

例如 1324，23415 分别是一个 4 元和 5 元排列. 由中学数学的排列组合知识，可知 n 元排列共有 $n!$ 个，其中 n 元排列 $123\cdots n$ 称为按自然顺序的排列.

定义 1.2　在 n 元排列 $i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$ 中，若 $i_p>i_q$，则称 i_pi_q 组成一个**逆序**. 排在 i_q 前比 i_q 大的数字的个数，称为这个排列中 i_q 的逆序数. 排列中所有数字的逆序数之和，称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$.

例 1　求下列排列的逆序数：

(1) 1324；　(2) 23514；　(3) $n(n-1)\cdots 321$.

解　(1) 从左到右，依次讨论每个数字在排列 1324 中的逆序数，1 的逆序数为 0，3 的逆序数为 0，2 的逆序数为 1，4 的逆序数为 0. 然后把它们相加，得到排列的逆序数为

$$\tau[1324]=0+0+1+0=1.$$

(2) $\tau[23514]=0+0+0+3+1=4$.

(3) $\tau[n(n-1)\cdots 321]=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

自然顺序的排列 $123\cdots n$ 中，每个数字的逆序数都为零，因此 $\tau[123\cdots n]=0$.

定义 1.3　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

如上例中排列 1324 是奇排列，排列 23514 和自然顺序排列 $123\cdots n$ 是偶排列，而排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的奇偶性取决于 n 的值.

把排列中的某两个数字交换位置，其余数字不动，称为排列的一次**对换**. 相邻两个数字的对换称为**邻换**.

例 2　设排列 21354，(1)数字 1，5 对换，(2)数字 3，5 邻换. 判断原排列与新排列的奇偶性.

解　$\tau[21354]=0+1+0+0+1=2$. 排列 21354 是偶排列.

(1) 把排列中的 1，5 对换得到新排列 25314.

$$\tau[25314]=0+0+1+3+1=5.$$

排列 25314 为奇排列.

(2) 把排列中的 3，5 邻换得到新排列 21534.

$$\tau[21534]=0+1+0+1+1=3.$$

排列 21354 为奇排列.

1.2.2　排列的一些基本性质

定理 1.1　一次对换改变排列的奇偶性.

证明　分两步进行：①邻换改变排列的奇偶性；②一次对换可转化为奇数次邻换.

(1) 设 n 元排列 $i_1\cdots i_pi_q\cdots i_n$，经 i_p，i_q 邻换得 $i_1\cdots i_qi_p\cdots i_n$. 由于除 i_p，i_q 外其余数字不动，故这些数字的逆序数都没有改变. 若 $i_p>i_q$，则邻换后 i_p 的逆序数不变，i_q 的逆序数减 1，从而排列的逆序数减 1，奇偶性改变；若 $i_p<i_q$，则邻换后 i_p 的逆序数增 1，i_q 的逆序数不变，从而排列的逆序数增 1，奇偶性改变，故一次邻换就使原排列偶(奇)变奇(偶).

(2) 设 n 元排列

$$i_1\cdots i_p\, i_{p+1}\cdots i_{p+s} i_q\cdots i_n \tag{1.6}$$

经 i_p, i_q 对换得到

$$i_1\cdots i_q\, i_{p+1}\cdots i_{p+s} i_p\cdots i_n, \tag{1.7}$$

从(1.6)式出发，把 i_p 与 i_{p+1} 邻换，再与 i_{p+2} 邻换，…也就是把 i_p 依次向右移，经过 $s+1$ 次邻换，排列(1.6)式变成

$$i_1\cdots i_{p+1}\cdots i_{p+s} i_q i_p\cdots i_n. \tag{1.8}$$

从(1.8)式出发，把 i_q 依次向左移，经过 s 次邻换，排列(1.8)式就变成了排列(1.7)式. i_p 与 i_q 的对换可通过 $2s+1$ 次邻换得到.

综合(1)、(2)，奇数次邻换改变排列的奇偶性，故一次对换改变排列的奇偶性.

推论 一个 n 元排列经过一系列对换变为自然顺序排列时，所做对换的次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

这是因为：设排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经 k 次对换变成排列 $123\cdots n$，由定理 1.1，奇偶性改变了 k 次，则 $(-1)^k\cdot(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}=(-1)^{\tau[123\cdots n]}=1$，可得 $(-1)^k=(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}$，即 $j_1j_2\cdots j_n$ 与对换次数 k 有相同的奇偶性.

该推论说明了排列奇偶性的固有性质.

练 习 1.2

1. 确定下述排列的逆序数，并确定排列的奇偶性：

(1) 32145； (2) 1347652； (3) 523147698； (4) $246\cdots(2n)(2n-1)\cdots531$.

2. 选择 i 和 j，使

(1) $127i356j9$ 成偶排列；

(2) $36i4j2895$ 成奇排列.

3. 试写出从排列 1324 到 3412 的那些对换，至少写出两种不同步骤的对换，并比较两种步骤下对换次数的奇偶性.

4. 试验证 5 元排列 45132 经过一系列对换变为自然顺序排列 12345 时，所做对换的次数与这个排列的奇偶性相同.

1.3 n 阶行列式

第一节已给出了二、三阶行列式的定义，由(1.5)式，可看出三阶行列式有如下结构特点.

(1) 等式右边的每项是三个数的乘积. 这三个数按行下标的自然顺序排列，即行下标排序都是 123，而列下标构成某个 3 元排列，可记为 $j_1j_2j_3$. 则各项的一般形式为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，说明这三个数取自行列式的不同行不同列.

(2) 等式右边乘积项的列下标排列不重复，且无遗漏，恰好是全部 3 元排列，共 3! 项.

(3) 项的符号：带正号的三项其列下标排列为 123,231,312，均为偶排列，带负号的三项列下标排列为 132,213,321，均为奇排列．因此当行下标按自然顺序排列时，列下标排列的奇偶数决定了各乘积项的符号．

三阶行列式可缩写为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{[j_1j_2j_3]}(-1)^{\tau[j_1j_2j_3]}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

$\sum\limits_{[j_1j_2j_3]}$ 表示对三元排列 $j_1j_2j_3$ 对应的 6 项求和．

定义 1.4　n^2 个数 a_{ij}，$i,j=1,2,\cdots,n$，排成如下形式的 n 行 n 列，所确定的数

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{[j_1j_2\cdots j_n]}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.9}$$

称为 **n 阶行列式**，简记为 $D=\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列元素，$\sum\limits_{[j_1j_2\cdots j_n]}$ 表示对所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 对应的项(共 $n!$ 项) 求和．

由定义来确定 n 阶行列式的值，一般是首先对不同行不同列的 n 个元素作乘积，然后把这些乘积的元素所处位置的行下标按自然数排序，则列下标排列的奇偶性决定该项符号，再对所有这样的 $n!$ 个乘积项求和，即可得行列式的值．

例 1　确定四阶行列式中项 $a_{32}a_{14}a_{43}a_{21}$ 所带的符号．

解　把该项的行下标按自然排序得 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，其列下标排列的逆序数为

$$\tau[4123]=0+1+1+1=3,$$

故该项带负号．

例 2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式主对角线以下的元素全为零，称为**上三角行列式**．

解　由定义知道 n 阶行列式的一般项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

考察上三角行列式 D 的非零项．因 D 的第 n 行除 a_{nn} 外，其余全为零，故所有含 $a_{nj_n}(j_n\neq n)$ 的乘积项也全为零，因而只考虑 $j_n=n$ 的项即可；再看第 $n-1$ 行，除 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 外，其余全为零，从而只需考虑 $j_{n-1}=n-1$ 或 n 的情形，乘积项中每个数取自

不同行不同列，那么只有取 $j_{n-1}=n-1$；这样逐步上推，D 的非零项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 该项列下标排列的逆序数 $\tau[1\ 2\cdots n]=0$，带正号. 于是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地，可以计算**下三角行列式**（主对角线以上的元素全为零）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别，**对角行列式**（主对角线以外的元素全为零）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 行列式 D 中，只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项不等于零，所以

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau[4321]}1\times 2\times 3\times 4$$

$$=(-1)^{6}24=24.$$

对于 n 阶行列式，我们还可以给出它的另外一个定义：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{[i_1 i_2\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1 i_2\cdots i_n]}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}. \qquad (1.10)$$

等号右边各项只不过是(1.9)式各项的列下标按自然顺序重排，由行下标排列的逆序数决定该项的符号. 这个定义与(1.9)式是完全一致的. 因为：(1.10)式的项 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$