快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

复变函数
习题精解精练

（配西交大高等数学教研室第四版教材·高教版）

主 编 苑延华 张晓光 邓 慧

●课后习题 精析 精解
●同步训练 勤学 勤练

XITI
JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

5-44

快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

复变函数
习题精解精练

（配西交大高等数学教研室第四版教材·高教版）

主　编　苑延华　张晓光　邓　慧
主　审　张晓威

安徽建筑大学
藏書
图书馆

XITI
JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》(第四版)教材而编写的辅导书。本书按教材的章节顺序编排,每章包括典型题解析、书后习题解析和同步训练题及答案三部分内容,旨在帮助学生熟练掌握解题的基本方法和技巧,巩固所学的知识、开阔视野。

本书可作为高等学校学生学习复变函数的辅导书,也可供教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数习题精解精练/苑延华,张晓光,邓慧主编.
哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.4
ISBN 978-7-81073-981-8

Ⅰ.复… Ⅱ.①苑…②张…③邓 Ⅲ.复变函数-高等学校-解题 Ⅳ.O174.5-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 048073 号

出版发行	哈尔滨工程大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码	150001
发行电话	0451-82519328
传　　真	0451-82519699
经　　销	新华书店
印　　刷	哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本	787mm×1 092mm　1/16
印　　张	10.75
字　　数	221 千字
版　　次	2007 年 4 月第 1 版
印　　次	2007 年 4 月第 1 次印刷
定　　价	14.00 元

http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

复变函数是高等学校中物理、数学、电类等各专业必修的一门数学基础课，也是自然科学与工程技术中常用的数学工具。为了帮助读者正确理解和掌握复变函数的基本理论与方法，增强分析问题、解决问题的能力，我们编写了《复变函数习题精解精练》这本书。

全书共六章，每章由典型题解析、书后习题解析、同步训练题及同步训练题答案组成。在每一章的典型题解析部分，编者都给出了几个具有代表性题目的详细解答，并注重分析解题的思路、揭示解题的规律。书后习题解析部分，主要针对西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》(第四版)教材中的习题做了比较详细的解答，并对超出基本要求的习题加了“*”号，予以解答，以供需要者参考。同步训练题部分，主要汇编了能反映本章具体要求的一些检测题目，有单项选择题、填空题、计算题和证明题。这部分内容旨在使读者对学习效果进行自我检测。

本书第1章、第2章、第3章由张晓光、邓慧编写，第4章、第5章、第6章由苑延华编写。全书由苑延华统编定稿，由哈尔滨工程大学理学院张晓威副教授主审。

由于编者水平有限，书中错漏之处在所难免，敬请读者不吝赐教。

编　者

2007年3月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章　复数与复变函数

典型题解析

例1-1　试确定$\dfrac{z+2}{z-1}$的实部和虚部.

分析　将$z=x+\mathrm{i}y$代入原式,然后化简即可.

解　$$\frac{z+2}{z-1}=\frac{x+\mathrm{i}y+2}{x+\mathrm{i}y-1}=\frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y}=\frac{[(x+2)+\mathrm{i}y]\cdot[(x-1)-\mathrm{i}y]}{(x-1)^2+y^2}$$
$$=\frac{(x+2)(x-1)+y^2+\mathrm{i}[y(x-1)-y(x+2)]}{(x-1)^2+y^2}$$

则　$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{(x+2)(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2},\quad \mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right)=\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$$

例1-2　设$z\neq 0$,试证$|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z||\arg z|$.

分析　在证明有关复数模(或绝对值)的等式或不等式时,常用公式$|z|^2=z\cdot\bar{z}$,$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)$以及三角不等式$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.由于$z\neq 0$以及要证不等式中含有$|z|$和$\arg z$,故考虑复数$z$的指数形式$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$.

证明　设$z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$,$\theta=\arg z$且$-\pi<\theta\leqslant\pi$,则
$$\begin{aligned}|z-1|&=\big|z-|z|+|z|-1\big|\leqslant\big|z-|z|\big|+\big||z|-1\big|\\&=\big||z|-1\big|+|z|\cdot|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|\\&=\big||z|-1\big|+|z|\cdot|\cos\theta-1+\mathrm{i}\sin\theta|\\&=\big||z|-1\big|+|z|\cdot\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\\&=\big||z|-1\big|+2|z|\cdot\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\leqslant\big||z|-1\big|+|z|\cdot|\theta|\end{aligned}$$

这是因为当$0\leqslant\dfrac{|\theta|}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$时,$\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|=\sin\dfrac{|\theta|}{2}\leqslant\dfrac{|\theta|}{2}$成立,从而不等式$|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z|\cdot|\arg z|$成立.

例1-3　将函数$f(z)=x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)+\mathrm{i}y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$写成关于$z$的解析表达式.

解　常用以下三种方法:

(1)共轭法　将$x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$,$y=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$代入,得
$$f(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}\left(1+\frac{1}{z\cdot\bar{z}}\right)+\mathrm{i}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\cdot\left(1-\frac{1}{z\cdot\bar{z}}\right)=z+\frac{1}{z}$$

(2)拼凑法　凑成$x+\mathrm{i}y$的函数形式,则

$$f(z)=x+\mathrm{i}y+\frac{1}{x^2+y^2}(x-\mathrm{i}y)=z+\frac{1}{z\cdot\bar{z}}\cdot\bar{z}=z+\frac{1}{z}$$

(3) 设零法　令 $y=0$,求 $f(x)$,再得 $f(z)$,因 $f(x)=x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=x+\frac{1}{x}$,故

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

例 1-4　试讨论下式定义的函数的连续性:

$$f(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\varphi}, & z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\\ 2\pi, & z=0\end{cases}\quad(r>0,0<\varphi\leqslant 2\pi)$$

分析　对于分段函数连续性问题,一般是用定义讨论它在分段点处的连续性,在分段点外只需考虑每段上相应函数的连续性.本题中函数 $f(z)$ 的分段点相当于 $z=0$ 及 $\varphi=0$,即原点及正实轴上的点.

解　(1) $z=0$ 是 $f(z)$ 的不连续点.

因为 $\forall z\neq 0$,有 $|f(z)-f(0)|=\left|\frac{1}{2\varphi}-2\pi\right|$.

显然当 z 沿射线 $\arg z=\frac{\pi}{2}$ 趋于原点时,上式的值恒为 $2\pi-\frac{1}{\pi}\neq 0$,这说明 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的连续点.

(2) 正实轴上的每一点 z_0 也是 $f(z)$ 的不连续点.因 z_0 在正实轴上,所以 $z_0=z_0(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi)$ $(0<\varphi\leqslant 2\pi)$,即 $f(z_0)=\frac{1}{4\pi}$.然而当 z 沿圆周 $|z|=z_0$ 顺时针方向趋于 z_0 时,z 的辐角 $\varphi=\arg z\to 0$,这时

$$|f(z)-f(z_0)|=\left|\frac{1}{2\varphi}-\frac{1}{4\pi}\right|=\frac{2\pi-\varphi}{4\pi\varphi}>\frac{1}{4\varphi}\to\infty\qquad(\varphi\to 0)$$

(这里不妨令 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$).

(3) 除(1)、(2) 两种情况外,$f(z)$ 处处连续.事实上,若任意非原点、非正实轴上的点 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ 满足 $r_1>0,0<\varphi_1<2\pi$,那么

$$|f(z)-f(z_1)|=\left|\frac{1}{2\varphi}-\frac{1}{2\varphi_1}\right|=\frac{|\varphi-\varphi_1|}{2\varphi\varphi_1}$$

如图 1-1 所示,考虑 $|z-z_1|<\delta$,OA 与 OB 是圆周 $|z-z_1|=\delta$ 的两条切线,显然有 $|\varphi-\varphi_1|<\arcsin\frac{\delta}{r_1}$,而且可以选取适当的 $\delta>0$,使得 $\varphi>\frac{\varphi_1}{2}$(这是因为由 $|\varphi-\varphi_1|<\arcsin\frac{\delta}{r_1}$ 有 $-\varphi+\varphi_1<\arcsin\frac{\delta}{r_1}$,即 $\varphi>\varphi_1-\arcsin\frac{\delta}{r_1}$,故只要 $0<\arcsin\frac{\delta}{r_1}<\frac{\varphi_1}{2}$,即 $0<\delta<$

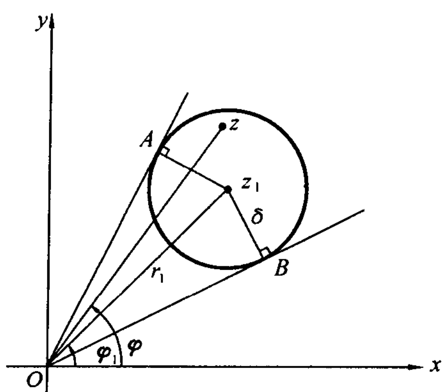

图 1-1

$r_1 \cdot \sin\frac{\varphi_1}{2}$,便有 $\varphi > \varphi_1 - \frac{\varphi_1}{2} = \frac{\varphi_1}{2}$).

于是当 $0 < \delta < r_1 \sin\frac{\varphi_1}{2}$ 时,有 $|f(z) - f(z_1)| = \frac{|\varphi - \varphi_1|}{2\varphi\varphi_1} < \frac{\arcsin\frac{\delta}{r_1}}{\varphi_1^2}$,这里用到了 $|\varphi - \varphi_1| < \arcsin\frac{\varphi_1}{2}$ 和 $\varphi > \frac{\varphi_1}{2}$ 两个不等关系.

令 $\frac{\arcsin\frac{\delta}{r_1}}{\varphi_1^2} < \varepsilon$(任意给定的正数),解得 $\delta < r_1 \sin(\varepsilon\varphi_1^2)$,取

$$\delta' = \min\left\{r_1 \sin\frac{\varphi_1}{2}, r_1 \sin(\varepsilon\varphi_1^2)\right\}$$

可知对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$,总存在 $\delta' > 0$,当 $|z - z_1| < \delta'$ 时,有

$$|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$$

成立.这就说明 $f(z)$ 在任意非原点、非正实轴上处处连续.

例 1-5 若以 $1, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$ 表示 1 的 n 个 n 次根,试从

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = (z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1})$$

两端令 $z \to 1$,证明 $2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)}{n}\pi = n$.

分析 1的 n 次根为$\sqrt[n]{1} = e^{\frac{2k\pi}{n}i}(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$,这样 $w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$,而且不难看出 $1, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$ 也是方程 $z^n - 1 = 0$ 的 n 个根,所以

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1})$$

两边同除以$(z - 1)$便得

$$(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1}) = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$$

当 $z \to 1$ 时,上式右端极限为 n;而当 $z \to 1$ 时,上式左端极限为$(1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1})$.我们只须利用复数的乘法验证

$$(1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1}) = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

证明 从等式

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = (z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_{n-1})$$

两端令 $z \to 1$,可知 $n = (1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1})$.又

$$\begin{aligned}1 - w_k &= 1 - e^{\frac{2k\pi}{n}i} = 1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} = 2\sin^2\frac{k\pi}{n} - 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\\ &= 2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sin\frac{k\pi}{n}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &= 2\sin\frac{k\pi}{n} \cdot e^{i\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&(1 - w_1)(1 - w_2)\cdots(1 - w_{n-1})\\ &= 2\sin\frac{\pi}{n}e^{i\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot 2\sin\frac{2\pi}{n}e^{i\left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)}\cdots 2\sin\frac{(n-1)\pi}{n} \cdot e^{i\left(\frac{n-1}{n}\pi - \frac{\pi}{2}\right)}\\ &= 2^{n-1} \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} \cdot e^{i\frac{\pi}{n}(1+2+\cdots+n-1)} \cdot e^{-\frac{n-1}{2}\pi i}\end{aligned}$$

$$= 2^{n-1} \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

故等式 $2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = n$ 成立.

书后习题解析

1.求下列复数 z 的实部与虚部,共轭复数、模与辐角:

(1) $\frac{1}{3+2\mathrm{i}}$; (2) $\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$; (3) $\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$; (4) $\mathrm{i}^8 - 4\mathrm{i}^{21} + \mathrm{i}$.

分析 复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的三角表示式、指数表示式分别为 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 与 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$,其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$,$\theta = \arg z$.一般在给定复数 z 后,模 r 的计算比较简单,关键是求 θ,而复数 z 的辐角主值可按式(1 - 3)来计算(其中$\frac{-\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{2}$).本题先对分母有理化再进行复数的四则运算,将各式化简成 $x + \mathrm{i}y$ 的形式,再回答问题.

解 (1) $\frac{1}{3+2\mathrm{i}} = \frac{3-2\mathrm{i}}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})} = \frac{1}{13}(3-2\mathrm{i}) = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}\mathrm{i}$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{13}, \mathrm{Im}(z) = -\frac{2}{13}, \bar{z} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}\mathrm{i}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

$$\arg z = \arctan\left[\left(-\frac{2}{13}\right)\Big/\frac{3}{13}\right] = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) = -\arctan\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Arg}z = -\arctan\frac{2}{3} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

(2) $\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = -\mathrm{i} - \frac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = -\mathrm{i} - \frac{-3+3\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{i}$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}, \mathrm{Im}(z) = -\frac{5}{2}, \bar{z} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\arg z = \arctan\left[\left(-\frac{5}{2}\right)\Big/\frac{3}{2}\right] = -\arctan\frac{5}{3}$$

$$\mathrm{Arg}z = -\arctan\frac{5}{3} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

(3) $\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{26-7\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{(26-7\mathrm{i})\mathrm{i}}{-2} = -\frac{7}{2} - 13\mathrm{i}$

$$\mathrm{Re}(z) = -\frac{7}{2}, \mathrm{Im}(z) = -13, \bar{z} = -\frac{7}{2} + 13\mathrm{i}$$

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + (-13)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{29}$$

$$\arg z = \arctan\frac{26}{7} - \pi$$

$$\operatorname{Arg}z = \arctan\frac{26}{7} - \pi + 2k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

(4) $i^8 - 4i^{21} + i = i^{4+4} - 4i^{5\times4+1} + i = 1 - 4i + i = 1 - 3i$

$$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = -3, \bar{z} = 1 + 3i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\arg z = \arctan\frac{-3}{1} = -\arctan 3$$

$$\operatorname{Arg}z = -\arctan 3 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

2.当 x,y 等于什么实数时,等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1 + i$ 成立?

解　因为分母不为零,所以原等式可化为

$$(x+1) + i(y-3) = (1+i)(5+3i) = 2 + 8i$$

利用复数相等的概念,得 $\begin{cases} x+1=2 \\ y-3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases}$,即 $x=1, y=11$ 时等式成立.

3.证明虚数单位 i 有这样的性质: $-i = i^{-1} = \bar{i}$.

证明　因为 $-i = \frac{-i\cdot i}{i} = \frac{-i^2}{i} = \frac{1}{i} = i^{-1}$,而 $\bar{i} = -i$,所以 $-i = i^{-1} = \bar{i}$.

4.证明:

(1) $|z|^2 = z\bar{z}$;　　(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;

(3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$;　　(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$;

(5) $\bar{\bar{z}} = z$;　　(6) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

分析　这类基本性质的证明通常要把 z 写成 $x + iy$ 的形式,然后从定义出发证明等式成立.

证明　(1) 设 $z = x + iy$,则 $|z|^2 = x^2 + y^2$,又

$$z\cdot\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

所以

$$|z|^2 = z\cdot\bar{z}$$

(2) 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$,则

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \pm z_2} &= \overline{(x_1+iy_1) \pm (x_2+iy_2)} = \overline{(x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)} \\ &= (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2) \\ \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 &= \overline{(x_1+iy_1)} \pm \overline{(x_2+iy_2)} = (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2)\end{aligned}$$

从而

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

(3) 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$,则

$$\begin{aligned}\overline{z_1\cdot z_2} &= \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 &= \overline{(x_1+iy_1)}\cdot\overline{(x_2+iy_2)} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

从而

$$\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$

(4) 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,则

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2}\right)} = \overline{\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{\overline{x_1 + \mathrm{i}y_1}}{\overline{x_2 + \mathrm{i}y_2}} = \frac{x_1 - \mathrm{i}y_1}{x_2 - \mathrm{i}y_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

所以

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

(5) 设 $z = x + \mathrm{i}y$,则 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$, $\overline{(\bar{z})} = \bar{\bar{z}} = x + \mathrm{i}y$,故 $\bar{\bar{z}} = z$.

(6) 设 $z = x + \mathrm{i}y$,则 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$,从而

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x = \mathrm{Re}(z)$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[x + \mathrm{i}y - (x - \mathrm{i}y)] = \frac{1}{2\mathrm{i}}(2\mathrm{i}y) = y = \mathrm{Im}(z)$$

结论得证.

5.对任何 $z, z^2 = |z|^2$ 是否成立?如果是,就给出证明;如果不是,对哪些 z 值才成立?

解 对任何复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 易知 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$, $|z|^2 = x^2 + y^2$,于是,由 $z^2 = |z|^2$ 可得 $x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = x^2 + y^2$,比较两边的实部、虚部,有

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

可得 $y = 0$, x 为任意实数.故对任何复数 $z, z^2 = |z|^2$ 不成立;只有当 z 为实数(虚部为零)时,等式 $z^2 = |z|^2$ 才成立.

6.当 $|z| \leqslant 1$ 时,求 $|z^n + a|$ 的最大值,其中 n 为正整数,a 为复数.

解 因为 $|z^n| = |z|^n$,由三角不等式及 $|z| \leqslant 1$ 可知

$$|z^n + a| \leqslant |z|^n + |a| \leqslant 1 + |a|$$

即 $|z^n + a|$ 的最大值为 $1 + |a|$.此时 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arg}a}{n}}$.

7.判定下列命题的真假:

(1) 若 c 为实常数,则 $c = \bar{c}$; (2) 若 z 为纯虚数,则 $z \neq \bar{z}$;

(3) $\mathrm{i} < 2\mathrm{i}$; (4) 零的辐角是零;

(5) 仅存在一个数 z,使得 $\frac{1}{z} = -z$; (6) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$;

(7) $\frac{1}{\mathrm{i}}\bar{z} = \overline{\mathrm{i}z}$.

解 (1) 真.因为实数的共轭复数是它本身,所以若 c 为实数,则必有 $c = \bar{c}$.

(2) 真.若 z 为纯虚数,则可设 $z = \mathrm{i}y$ $(y \neq 0)$,而 $\bar{z} = -\mathrm{i}y$.由于 $y \neq 0$,所以 $\mathrm{i}y \neq -\mathrm{i}y$,即 $z \neq \bar{z}$.

(3) 假.因为复数不能比较大小.

(4) 假.因为复数 0 的辐角是不确定的.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(5) 假.由$\frac{1}{z}=-z$可得$z^2=-1$,从而z可取$\pm i$两个值.

(6) 一般不成立.由三角不等式$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$可知,等号仅当$\arg z_1-\arg z_2=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时成立.

(7) 真.因为$\overline{iz}=\bar{i}\cdot\bar{z}=-i\bar{z}=\frac{1}{i}\bar{z}$.

8.将下列复数化为三角表示式和指数表示式.

(1)i; (2)-1; (3)$1+\sqrt{3}i$; (4)$1-\cos\varphi+i\sin\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$;

(5)$\frac{2i}{-1+i}$; (6)$\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}$.

分析 先将所给复数化简成形如$x+iy$的形式,再来确定模r及辐角主值$\arg z$,最后写出它的三角表示式及指数表示式.

解 (1)$r=|i|=1,\arg(i)=\frac{\pi}{2}$.所以i的三角表示式为$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.i的指数表示式为$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

(2)$r=|-1|=1,\arg(-1)=\pi$.所以-1的三角表示式为$-1=\cos\pi+i\sin\pi$. -1的指数表示式为$-1=e^{i\pi}$.

(3)$r=|1+\sqrt{3}i|=2,\arg(1+\sqrt{3}i)=\arctan\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$.所以$1+\sqrt{3}i$的三角表示式为$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.$1+\sqrt{3}i$的指数表示式为$1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(4)
$$r=|1-\cos\varphi+i\sin\varphi|=\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+(\sin\varphi)^2}$$
$$=\sqrt{2-2\cos\varphi}=\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}=2\sin\frac{\varphi}{2}\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$
$$\arg(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)=\arctan\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\arctan\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}}$$
$$=\arctan\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right)=\arctan\left(\tan\frac{\pi-\varphi}{2}\right)=\frac{\pi-\varphi}{2}$$
故$1-\cos\varphi+i\sin\varphi$的三角表示式为
$$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+i\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$$
$1-\cos\varphi+i\sin\varphi$的指数表示式为$1-\cos\varphi+i\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot e^{i\frac{\pi-\varphi}{2}}$.

(5) 因为$\frac{2i}{-1+i}=\frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{2-2i}{2}=1-i$则$r=|1-i|=\sqrt{2},\arg(1-i)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$,所以$\frac{2i}{-1+i}$的三角表示式为$\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$;$\frac{2i}{-1+i}$的指数表示式为$\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

(6) 因为$\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}=\frac{(e^{5\varphi i})^2}{(e^{-3\varphi i})^3}=\frac{e^{10\varphi i}}{e^{-9\varphi i}}=e^{19\varphi i}$,从而知其三角表示式为

$\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\cos19\varphi+\mathrm{i}\sin19\varphi$;其指数表示式为$\dfrac{(\cos5\varphi+\mathrm{i}\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}=\mathrm{e}^{19\varphi\mathrm{i}}$.

9.将下列坐标变换公式写成复数形式:

(1) 平移公式$\begin{cases}x=x_1+a_1\\y=y_1+b_1\end{cases}$,　(2) 旋转公式$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$.

解　(1) 令 $z=x+\mathrm{i}y,z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,c_1=a_1+\mathrm{i}b_1$,则原式相当于

$$z=x+\mathrm{i}y=(x_1+a_1)+\mathrm{i}(y_1+b_1)=(x_1+\mathrm{i}y_1)+(a_1+\mathrm{i}b_1)=z_1+c_1$$

故平移公式的复数形式为 $z=z_1+c_1$.

(2) 令 $z=x+\mathrm{i}y,z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,c=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$,则由原式有

$$\begin{aligned}z=x+\mathrm{i}y&=(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+\mathrm{i}(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)\\&=x_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)+y_1(\mathrm{i}\cos\alpha-\sin\alpha)\\&=x_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)+\mathrm{i}y_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\\&=(x_1+\mathrm{i}y_1)(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=z_1\cdot c_1=z_1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\end{aligned}$$

故旋转公式的复数形式为 $z=z_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$ 或 $z=z_1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

10.一个复数乘以 $-\mathrm{i}$,它的模与辐角有何改变?

解　设 $z=r\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,而 $-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$,则有$(-\mathrm{i})z=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\cdot r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r\mathrm{e}^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}}$,即复数 z 的模的大小不变而辐角减小$\dfrac{\pi}{2}$.

11.证明:$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$,并说明其几何意义.

分析　可将复数 z 设成$x+\mathrm{i}y$ 的形式再进行计算,但当有复数模的平方时,还可用共轭复数的性质进行运算.下面用此法进行证明.

证明　$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$

$$\begin{aligned}&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1+z_2)(\bar z_1+\bar z_2)+(z_1-z_2)(\bar z_1-\bar z_2)\\&=z_1\cdot\bar z_1+z_1\cdot\bar z_2+z_2\bar z_1+z_2\cdot\bar z_2+z_1\cdot\bar z_1-z_1\cdot\bar z_2-z_2\cdot\bar z_1+z_2\cdot\bar z_2\\&=2(z_1\cdot\bar z_1+z_2\cdot\bar z_2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2)\end{aligned}$$

几何意义为:以 z_1,z_2 为邻边的平行四边形的两条对角线长度的平方和等于它相邻两边长度平方和的2倍.

12.证明下列各题:

(1) 任何有理分式函数 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 可以化为 $X+\mathrm{i}Y$ 的形式,其中 X 与 Y 为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数;

(2) 如果 $R(z)$ 为(1) 中的有理分式函数,但具有实系数,那么 $R(\bar z)=X-\mathrm{i}Y$.

(3) 如果复数 $a+\mathrm{i}b$ 是实系数方程$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$的根,那么 $a-\mathrm{i}b$ 也是它的根.

证明　(1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$,有

$$P(z)=P_1(x,y)+\mathrm{i}P_2(x,y),\quad Q(z)=Q_1(x,y)+\mathrm{i}Q_2(x,y)$$

则 $P_i(x,y),Q_i(x,y)(i=1,2)$ 是 x,y 的实多项式,又有

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P_1(x,y)+\mathrm{i}P_2(x,y)}{Q_1(x,y)+\mathrm{i}Q_2(x,y)}$$

$$= \frac{1}{Q_1^2 + Q_2^2}[(P_1Q_1 + P_2Q_2) + \mathrm{i}(P_2Q_1 - P_1Q_2)]$$

令
$$X = \frac{P_1Q_1 + P_2Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}, \quad Y = \frac{P_2Q_1 - P_1Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}$$

可见 X, Y 都是具有实系数的 x, y 的有理分式函数,并且 $R(z) = X + \mathrm{i}Y$.

(2) 设 $P(z), Q(z)$ 是实系数多项式,则关系式 $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}, Q(\bar{z}) = \overline{Q(z)}$ 成立.

这是由于对于任一实系数多项式

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为实数,从而 $a_j = \bar{a}_j (j = 0,1,2,\cdots,n)$,因此

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n)} \\ &= \overline{a_0z^n} + \overline{a_1z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}z} + \bar{a}_n \\ &= a_0\bar{z}^n + a_1\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\bar{z} + a_n = P(\bar{z})\end{aligned}$$

从而
$$R(\bar{z}) = \frac{P(\bar{z})}{Q(\bar{z})} = \frac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}} = \overline{\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)} = \overline{R(z)} = \overline{(X + \mathrm{i}Y)} = X - \mathrm{i}Y$$

(3) 令 $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$,由题设知 $P(a + \mathrm{i}b) = 0$,再由(2)知

$$P(a - \mathrm{i}b) = P(\overline{(a + \mathrm{i}b)}) = \overline{P(a + \mathrm{i}b)} = \bar{0} = 0$$

从而知 $a - \mathrm{i}b$ 也是方程 $P(z) = 0$ 的根.

13.如果 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$,证明:

(1) $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos nt$;　(2) $z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2\mathrm{i}\sin nt$.

证明　由 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ 易知 $z^n = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt$,则

$$\frac{1}{z^n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} = \cos nt - \mathrm{i}\sin nt$$

所以(1)
$$z^n + \frac{1}{z^n} = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt + \cos nt - \mathrm{i}\sin nt = 2\cos nt$$

(2)
$$z^n - \frac{1}{z^n} = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt - \cos nt + \mathrm{i}\sin nt = 2\mathrm{i}\sin nt$$

14.求下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^5$;　(2) $(1 + \mathrm{i})^6$;　(3) $\sqrt[6]{-1}$;　(4) $(1 - \mathrm{i})^{1/3}$.

分析　一般先将所给的复数写成指数表示式或三角表示式形式,然后再进行乘方或开方运算.

解　(1) $\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$,所以

$$(\sqrt{3} - \mathrm{i})^5 = 2^5 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}} = 32\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] = -16\sqrt{3} - 16\mathrm{i}$$

(2) $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$,所以 $(1 + \mathrm{i})^6 = (\sqrt{2})^6\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}} = -8\mathrm{i}$.

(3) $-1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$,所以

$$\sqrt[6]{-1} = \mathrm{e}^{\frac{\pi + 2k\pi}{6}\mathrm{i}} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6} \quad (k = 0,1,\cdots,5)$$

即6个值分别是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$; i; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$; $-\mathrm{i}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

(4)$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$,所以

$$(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\mathrm{i}}\qquad(k=0,1,2)$$

即$(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$的值分别为

$$w_0=\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{7}{12}\mathrm{i}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right),\quad w_2=\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\mathrm{i}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

15.若$(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$,试求$n$的值.

解 由于 $(1+\mathrm{i})^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})^n=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$

$$(1-\mathrm{i})^n=\left\{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}^n=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}})^n=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$$

又知$(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$,所以$\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{4}\mathrm{i}}$,即$\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{2}\mathrm{i}}=1$.有$\cos\frac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}=1$,得$\begin{cases}\cos\frac{n\pi}{2}=1\\ \sin\frac{n\pi}{2}=0\end{cases}$,

从而$n=4k,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

16.(1)求方程$z^3+8=0$的所有根;(2)求微分方程$y'''+8y=0$的一般解.

解 (1)由$z^3+8=0$得$z=(-8)^{\frac{1}{3}}$,而$-8=8\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$,所以

$$z=\sqrt[3]{8\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}}=2\mathrm{e}^{\frac{\pi+2k\pi}{3}\mathrm{i}}\qquad(k=0,1,2)$$

即方程$z^3+8=0$的所有根为

$$z_0=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$$

$$z_1=2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-2$$

$$z_2=2\mathrm{e}^{\frac{5}{3}\pi\mathrm{i}}=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$$

(2)微分方程$y'''+8y=0$的特征方程为$r^3+8=0$,由(1)的结果可知方程$r^3+8=0$有三个互异的根:$1+\sqrt{3}\mathrm{i},-2,1-\sqrt{3}\mathrm{i}$,所以方程$y'''+8y=0$有三个线性无关的特解

$$y_1=\mathrm{e}^{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^x(\cos\sqrt{3}x+\mathrm{i}\sin\sqrt{3}x),\quad y_2=\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y_3=\mathrm{e}^{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^x(\cos\sqrt{3}x-\mathrm{i}\sin\sqrt{3}x)$$

从而可得原微分方程三个线性无关的实数特解为$\mathrm{e}^x\cos\sqrt{3}x,\mathrm{e}^{-2x},\mathrm{e}^x\sin\sqrt{3}x$,则所求微分方程的一般解为$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^x(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$,其中$C_1,C_2,C_3$为常数.

17.在平面上任意选一点z,然后在复平面上画出下列各点的位置:

$$-z,\bar{z},-\bar{z},\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}},-\frac{1}{\bar{z}}$$

解 设$z=x+\mathrm{i}y$,则$-z=-x-\mathrm{i}y$,故z与$-z$关于原点对称;

$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$,故z与$\bar{z}$关于实轴对称;

$-\bar{z}=-x+\mathrm{i}y$,故z与$-\bar{z}$关于虚轴对称;

$\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$,即$\frac{1}{z}$的辐角等于$\bar{z}$的辐角,$\frac{1}{z}$的模是$\bar{z}$的模的$\frac{1}{|z|^2}$倍;

$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{|z|^2}z$,可见$\frac{1}{\bar{z}}$ 与$\frac{1}{z}$ 关于实轴对称;

$-\frac{1}{\bar{z}}=-\frac{1}{|z|^2}z$,即 $-\frac{1}{\bar{z}}$ 与$\frac{1}{\bar{z}}$ 关于虚轴对称.

下面我们来讨论$\frac{1}{\bar{z}}$ 与 z 的几何位置关系.

设 P 是单位圆外一点,过 P 作单位圆的切线,切点为 T,连接 OT,OP,且过 T 作 OP 的垂线,垂足为 Q(如图 1-2所示),那么我们称 P,Q 两点关于单位圆周对称,且 OQ,OP 与 x 轴正向夹角相等,它们的长度有关系式 $OQ=\frac{1}{OP}$,这是因为 $\triangle OTQ \backsim \triangle OPT$,且 $OT=1$.

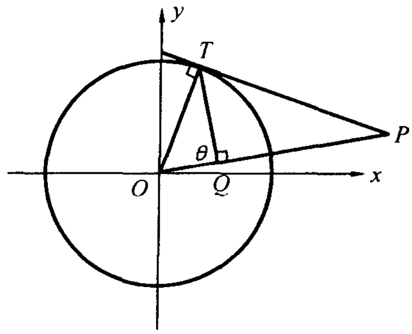

图 1-2

而由前面的讨论知$\frac{1}{\bar{z}}$ 与 z 有如下关系:它们的辐角相等,$\frac{1}{\bar{z}}$ 的模等于 z 的模的倒数.即

$$\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|=\left|\frac{z}{|z|^2}\right|=\frac{|z|}{|z|^2}=\frac{1}{|z|}$$

从而可知当 z 不在单位圆上时,z 与$\frac{1}{\bar{z}}$ 关于单位圆对称;当 z 在单位圆上时,z 与$\frac{1}{\bar{z}}$ 重合.于是复平面上 $-z,\bar{z},-\bar{z},\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}},-\frac{1}{\bar{z}}$ 的位置如图 1-3 所示.

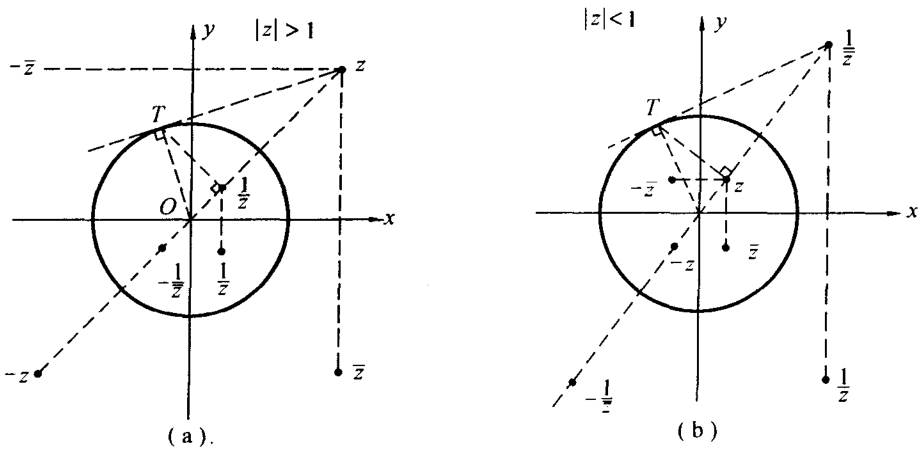

图 1-3

18.已知两点 z_1 与 z_2(或已知三点 z_1,z_2,z_3),问下列各点 z 位于何处?

(1)$z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$;　　(2)$z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$,其中 λ 为实数;

(3)$z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$.

分析　本题在求解过程中要用到解析几何的知识,这是因为复数是与平面向量一一对应的.

解 (1)设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, z=x+iy$,则根据

$$z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+i\cdot\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

有 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2), y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$,所以 z 是以 z_1 和 z_2 为端点的线段的中点.

(2)设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, z=x+iy$,则根据

$$\begin{aligned}z&=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2=\lambda(x_1+iy_1)+(1-\lambda)(x_2+iy_2)\\&=[x_2+\lambda(x_1-x_2)]+i[y_2+\lambda(y_1-y_2)]\end{aligned}$$

有 $x=x_2+\lambda(x_1-x_2), y=y_2+\lambda(y_1-y_2)$,所以 z 在 z_1, z_2 所确定的直线上,且实数 λ 表示线段 AC 与 BC 的长度比,即 $\lambda=\frac{|z-z_2|}{|z_1-z_2|}$(如图 1-4).

(3)设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, z_3=x_3+iy_3, z=x+iy$,则根据

$$z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)+i\cdot\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

有

$$x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\quad y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

故 z 位于以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形的重心处(如图 1-5).

事实上如图 1-5,四边形 $PQBR$ 为平行四边形,C, D 分别为边 PQ, BR 的中点,A 是对角线的交点,E 是 QD 与 PB 的交点.由 C, D 分别是 PQ, BR 的中点及 $PQBR$ 为平行四边形,知 $RC \parallel QD$,从而知 $PM=ME$ 及 $ME=BE$.这是因为 CM, DE 分别是 $\triangle PQE$ 和 $\triangle MBR$ 的中位线,从而知向量

$$z-z_1=\frac{1}{3}\vec{BP}=\frac{1}{3}[(z_3-z_1)+(z_2-z_1)]$$

整理可知 $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$.又 z 是 $\triangle PQR$ 的两条中线 PA 与 RC 的交点,即 z 是 $\triangle PQR$ 的重心.

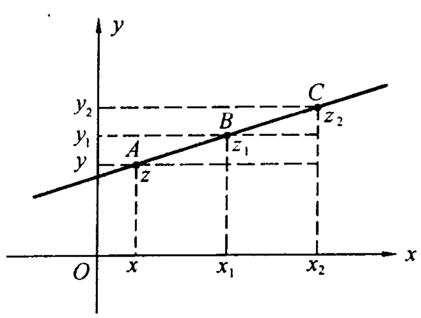

图 1-4

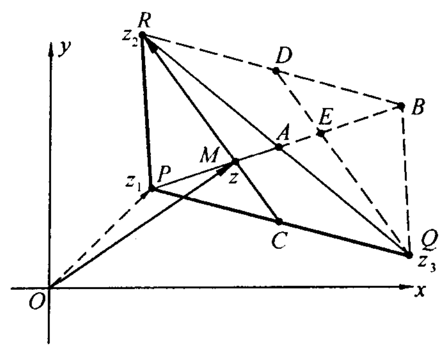

图 1-5

19.设 z_1, z_2, z_3 三点适合条件 $z_1+z_2+z_3=0, |z_1|=|z_2|=|z_3|=1$,证明 z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com